مقرر أول

في الجبـر المجرد

جون ب. فرالي

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

العبيكان
obeikan

A First Course in Abstract Algebra

7th Edition

Author: John B. Fraleigh

ISBN-13: 978-0201763904

ح مكتبة العبيكان، 1434هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

فرالي، جون ب

مقرر أول في الجبر المجرد./ جون ب فرالي؛ مجموعة من المترجمين.- الرياض 1434هـ

695 ص؛ 20× 28 سم

ردمك: 7 - 534 - 503 - 603 - 978

1 - الجبر 2 - الرياضيات أ. مجموعة من المترجمين (مترجم) ب. العنوان

ديوي: 512 رقم الإيداع: 4869 / 1434

الطبعة العربية الأولى 1435هـ ـ 2014م

تمت الترجمة والمراجعة بإشراف وزارة التعليم العالي

اللجنة الإشرافية

د. محمد بن عبدالعزيز العوهلي

د. عبدالله بن إبراهيم المهيدب

وبمشاركة منسقي التخصصات (د. محمود بن أحمد منشي، د. ناصر بن صالح المنصور، د. سعيد بن محمد العمودي، د. خالد بن منصور الشعيبي)

الترجمة

د. عماد أبوأصبع   د. صلاح العداسي

د. عمـر حـرزالله   د. أميـر جـبـر

المراجعة العلمية

د. معروف سمحان

التنسيق الإداري والمتابعة

معهد الأمير نايف للبحوث والخدمات الاستشارية، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية

العبيكان Obeikan

المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية - طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول هاتف: 4808654 فاكس: 4808095 ص.ب: 67622 الرياض 11517

www.obeikanpublishing.com http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

المحتويات

الوحدة الثالثة

الوحدة الرابعة

الوحدة الخامسة

الوحدة السادسة

الوحدة السابعة

الوحدة الثامنة *

الوحدة التاسعة

الوحدة العاشرة

---

* ليست مطلوبة إلى نهاية الكتاب.

** هذا الفصل متطلب سابق للفصلين 17 و36 فقط.

مقدّمة للمدرس

هذه مقدمة للجبر المجرّد، إذ إنه من المتوقع أن يكون الطلبة قد درسوا التفاضل والتكامل، وربما الجبر الخطي أيضًا، وعلى أيّة حال، فإنها متطلبات رياضية أولية؛ حيث تظهر الحاجة إلى التفاضل والتكامل والجبر الخطي غالبًا في الأمثلة التوضيحية والتمارين.

وكما هو الحال في الطبعات السابقة للكتاب، يبقى الهدف هو تعليم الطلاب أكبر قدر من المعلومات عن الزمر، والحلقات، والحقول في مقرر دراسي أول، وهذه أول تجربة للتعميم بدراسة الفرضيات الرياضية لكثير من الطلبة؛ وقد ضُمّن الكتاب تفسيرات مكثفة بخصوص ما نحاول تحقيقه، وكيف سنحاول عمله، ولماذا اخترنا هذه الطرق، حيث يشكل إتقان هذا الكتاب أساسًا قويًّا لعمل أكثر تخصصًا في الجبر، ويزود كذلك بتجربة قيمة لأيّ دراسة رياضية مستقبلية بالفرضيات.

تعديلات على الطبعة السادسة

ازدادت المادة التمهيدية من فصل واحد في الطبعة الأولى إلى أربعة فصول في الطبعة السادسة؛ ولأنني أفضل شخصيًّا قضاء وقت قليل قبل الدخول إلى الجبر؛ فقد قضيت وقتًا أقلّ في التمهيد، كان أغلبه مراجعة لكثير من الطلبة، إذ من الممكن ألا يترك لنا قضاء أربعة دروس في التمهيد الوقت الكافي لمعالجة المقرر الدراسي عند الوصول إلى المادة الجديدة؛ ولذلك، عدت في هذه الطبعة إلى فصل تمهيدي واحد على المجموعات والعلاقات، تاركًا بقية الموضوعات لمراجعتها عند الحاجة. ويظهر تلخيص للمصفوفات في ملحق هذه الطبعة.

تكوّنت الطبعتان الأوليان من فصول قصيرة متتالية، يمكن تغطيتها في محاضرة واحدة، وقد رجعت إلى هذا التصميم لتجنب الترقيم الثلاثي المتعب للتعريفات، والمبرهنات، والأمثلة، ...إلخ، أضف إلى ذلك، فقد تغيّر ترتيب العرض؛ وذلك استجابة لاقتراحات المراجعين، بحيث تُغطى مادة الزمر، والحلقات، والحقول بصورة طبيعية في فصل دراسي واحد أولاً، قبل المبرهنة المتقدّمة للزمر، الفصل 1 مقدمة جديدة، في محاولة لإعطاء الشعور حول طبيعة هذه الدراسة.

واستجابة لكثير من الطلبات أيضًا، فقد ضمّنت مادة على الزمر الشباهية في الطبولوجيا، التي ظهرت سابقًا في الطبعتين الأوليين؛ لأن حسابات زمر الشباه تقوي فهم الطالب لزمر العامل، مع مراعاة سهولة الوصول إلى المادة من الفصل 0 إلى 15، إذ يحتاج المرء فقط إلى القراءة عن الزمر الإبدالية الحرة في الفصل 38 من خلال المبرهنة 5.38 بوصفها تمهيدًا، ولأترك مجالاً لزمر الشباه، فقد حذفت مناقشة ذاتيات الحركة، والشيفرات الخطية الثنائية، والبنى الجبرية الإضافية التي ظهرت في الطبعة السادسة.

وضمّنت كذلك القليل من التمارين التي تطلب من الطالب أن يعطي جملة أو جملتين بوصفهما برهانًا مختصرًا لإثباتٍ ظهر في الكتاب، فضلًا عن أنني أعطيت مثالاً لما أتوقعه، قبل هذه التمارين.

بعض المزايا الأخرى

استمرّ تقسيم معظم التمارين إلى أجزاء تتكوّن من حسابات، ومفاهيم، ومبرهنة، وظهرت كذلك إجابات

للتمارين الفردية التي لا تسأل عن البرهان في آخر الكتاب، واستجابة للمقترحات وضعت إجابات للأجزاء (أ)، و(جـ)، و(هـ)، و(ز)، و(ط) فقط لتمارين الصواب والخطأ المكونة من عشرة أجزاء.

وتوجد كذلك الملاحظات التاريخية لفيكتور كاتز بالطبع، إضافة إلى دليل يحوي الحلول كاملة للتمارين جميعها، بما فيها التمارين التي تسأل عن البرهان، وهو متوافر للمدرسين من قبل الناشر.

تظهر خريطة التتابع بأرقام الفصول في المقدمات بصفتها مساعدة على عمل خطة الدراسة.

شكر

كل الامتنان لأولئك الذين راجعوا الكتاب، أو أرسلوا اقتراحاتهم وتصويباتهم، إذ إنني مدين بصورة خاصة لجورج م. بيرجمان، الذي استخدم الطبعة السادسة في عمل قائمة بالأخطاء المطبعية وغيرها، وأرسلها لي مع كثير من الاقتراحات القيمة للتطوير، أقدر حقيقة هذا الجهد الذي لا شك في أنه أنفق عليه الكثير من وقته.

وأود كذلك أن أعرب عن تقديري لويليام هوفمان، وجولي لاشانس، وسندي كودي من مؤسسة أديسون – ويزلي؛ لمساعدتهم في هذا المشروع. أخيرًا، لقد كنت محظوظًا جدًا بجون بروبست والفريق في "Tech Books" الذين قاموا بإنتاج هذا الكتاب من مخطوطتي، فقد أنتجوا أكثر صفحات الكتاب خالية من الأخطاء ، وساعدوني بكل أدب على حلّ مشكلة فنية واجهتها في أثناء إعداد دليل الحلول.

اقتراحات لمدرسي الجبر الجدد

الملاحظات التي أذكرها هنا ليست ضرورية لأولئك الذين درّسوا الجبر مرات عدّة، واكتشفوا الصعوبات، وطوروا حلولهم الخاصة.

يمثل هذا المقرر الدراسي نقلة نوعية للطلاب من تفاضل وتكامل البكالوريوس التقليدي، إذ لن يكون مجديًا لمعظم الطلاب استخدام أسلوب طلبة الدراسات العليا بعرض المحاضرة، وكتابة التعريفات والبراهين على السبورة لمعظم وقت المحاضرة، وقد وجدت أنه من الأفضل أن أقضي– على الأقل– النصف الأول من وقت المحاضرة، بإجابة أسئلة الواجب المنزلي، ومحاولة الحصول على متطوعين لإعطاء برهان أحد التمارين المطلوبة، وبوجه عام، التحقق من فهم الطلبة للمادة التي سبق، وكلفوا بها، إذ إنني أقضي عادة على الأقل آخر 20 دقيقة من محاضرة الـ 50 دقيقة، في الحديث عن الأفكار الجديدة للمحاضرة القادمة، وإعطاء برهان واحد على الأقل، تُعدّ محاولة كتابة التعريفات والبراهين جميعها على السبورة من وجهة النظر العملية مضيعة للوقت؛ لإنها بالطبع موجودة في الكتاب.

أقترح أن تكون –على الأقل– نصف التمارين المطلوبة من الطلاب من تمارين الحسابات، فقد اعتادوا عليها في التفاضل والتكامل، وعلى الرغم من وجود كثير من التمارين التي تسأل عن البراهين، والتي نحب تكليف الطلبة بها، فإنني أنصح بالتكليف بتمرينين أو ثلاثة من مثل هذه التمارين، ومحاولة تكليف أحدهم بشرح كيفية أداء كل برهان في المحاضرة المقبلة. أعتقد أنه يتعيّن تكليف الطلبة إثبات واحد على الأقل في كل واجب منزلي.

يواجه الطلبة وابلاً لا ينتهي من التعريفات والمبرهنات، وهو شيء لم يصادفه الطلبة قط من قبل، ولم يعتادوا إتقان هذا النوع من المواد، فضلًا عن أنّ علامات الامتحانات التي تبدو معقولة بالنسبة إلينا – والتي تطلب قليلاً من التعريفات والبراهين – تكون عادة قليلة ومحبطة لكثير من الطلبة.

وقد ظهرت توصيتي لمعالجة هذه المشكلة في المقال "Happy Abstract Algebra classes" في عدد نوفمبر عام 2001م في إصدار الـ (MMA FOCUS).

لدينا في جامعة رود أيلاند، مقرر دراسي لفصل واحد في الجبر المجرد لطلبة البكالوريوس، إذ إنّ فصولنا قصيرة جدًا، ومكوّنة من محاضرات بقرابة (42 – 50) دقيقة، أعطيت ثلاثة اختبارات في حصة الـ (50) دقيقة عندما درّست المقرر الدراسي ، تاركًا قرابة (38) حصة للتدريس، التي أكلف الطلبة فيها عادةً بواجبات منزلية، وأغطي المادة عادة في الفصول 0 – 11، 13 – 15، 18 – 23، 26، 27،

و29 – 32، التي تساوي (27) فصلاً، بالطبع، أقضي أكثر من حصة في كثير من الفصول، ولكني أجد عادة الوقت لتغطية فصلين آخرين، وأضيف أحيانًا الفصلين 16 و 17. (لا معنى لتقديم الفصل 16 إلا إذا قدّم الفصل 17، أو أقدم الفصل 36 لاحقًا) ، إضافة إلى أنني أغطي عادة الفصل 25 وأحيانًا الفصل 12 (راجع خريطة التتابع)، إذ إنّ الواجب يقضي بعدم إحباط الطلبة في الأسابيع الأولى للمقرر الدراسي.

مقدّمة للطالب

قد يحتاج هذا المقرر الدراسي إلى طرق مختلفة عن تلك التي استخدمتها في مقررات الرياضيات الدراسية السابقة، ومن الممكن أنك أصبحت معتادًا على أداء مسائل الواجب المنزلي من خلال الرجوع للكتاب والبحث عن مسائل مشابهة، ومن ثم تعديل بعض الأرقام فقط، هذا قد يصلح في القليل من تمارين هذا الكتاب، ولكنه لن يصلح لمعظمها، وقد أصبح الفهم لهذا الموضوع مهمًا جدًا، بحيث لا يُتعامل مع التمارين من غير دراسة الكتاب.

أقدم لك بعض المقترحات لدراسة هذا الكتاب، لاحظ أنّ الكتاب مليء بالتعريفات، والمبرهنات، والنتائج، والأمثلة، فالتعريفات حاسمة، ويجب أن نتفق على المصطلحات؛ لنحرز التقدم، وقد يتبع التعريفَ أحيانًا مثال يوضح المفهوم، إذ ربما تكون الأمثلة أكبر مساعد على دراسة الكتاب؛ ولذلك، أوليت اهتمامًا بالأمثلة، وأقترح أن تتجاوز إثباتات المبرهنات في قراءتك الأولى للفصل، إلا إذا كنت مغرمًا تمامًا بالبراهين، حيث يجب أن تقرأ نصّ المبرهنة، وتحاول أن تفهم فقط ماذا تعني، ثمّ يأتي في العادة مثال يوضح المبرهنة، وهذا يساعد تمامًا على فهم ما تقوله المبرهنة.

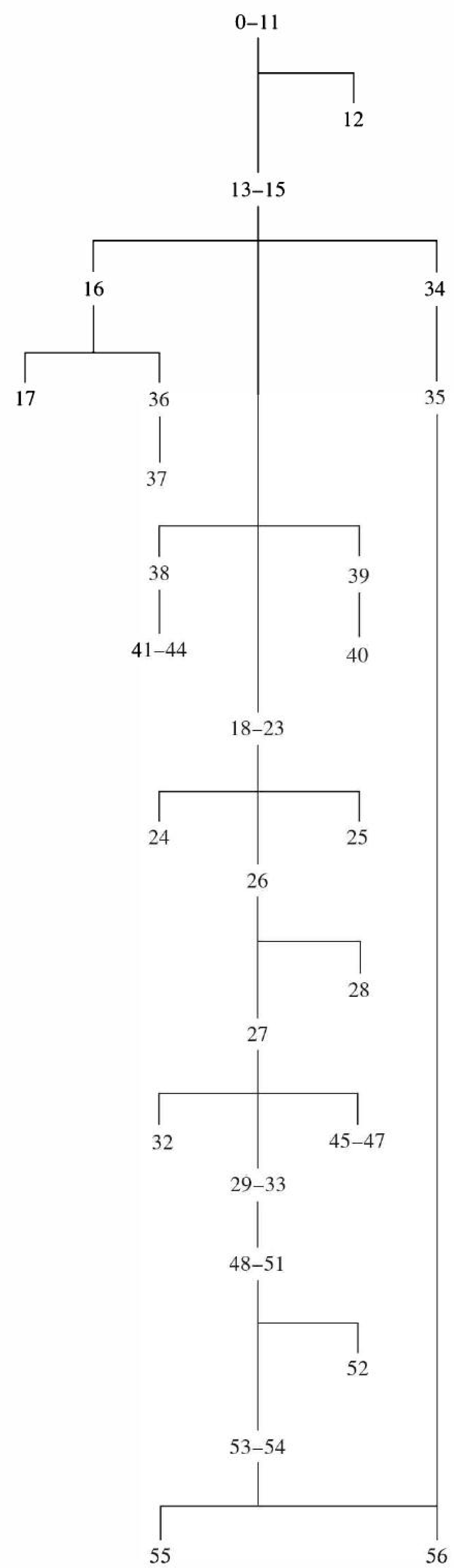
تلخيصًا لذلك، في قراءتك الأولى للفصل، أقترح أن تركز على المعلومات التي يعطيها الفصل، وتحاول اكتشاف فهم حقيقي له، فإذا لم تفهم نصّ المبرهنة، فمن المحتمل أنه لا معنى لقراءتك للإثبات. البراهين أساسية في الرياضيات، وإذا شعرت بأنك قد فهمت المعلومات المعطاة في الفصل، فعليك قراءة البراهين ومحاولة فهم بعضها على الأقل، ومن الجدير بالذكر أنّ براهين النتائج في العادة هي الأسهل؛ لأنها غالبًا تنتج مباشرة من المبرهنة، إضافة إلى أنّ الكثير من التمارين تحت العنوان «مبرهنة» تسأل عن البرهان؛ لذا، حاول ألا تحبط من البداية، فهي تحتاج إلى بعض التمرين والخبرة، فالبراهين في الجبر يمكن أن تكون أكثر صعوبة من البراهين في الهندسة والتفاضل والتكامل؛ لأنه لا توجد في العادة رسمات مقترحة يمكنك رسمها، وغالبًا ينتج البرهان بسهولة إذا حدث، ونظرت فقط إلى المصطلح الصحيح. بالطبع، لا فائدة من تصميم برهان إذا لم تفهم ما الذي تحاول إثباته، على سبيل المثال: إذا سألك تمرين لتثبت أنّ شيئًا معطًى ينتمي لمجموعة محددة، فيجب عليك أن تعرف المعيار المعرّف للعنصر في تلك المجموعة، ومن ثم تبرهن أنّ الشيء المعطى لك يحقق هذا المعيار.

هناك كثير من المساعدات لك على الدراسة في نهاية الكتاب. بالطبع، ستكتشف إجابات الأسئلة الفردية التي لا تسأل عن البرهان، وإذا مررت برمز لا تعرفه مثل $\mathbb{Z}_n$ مثلاً، فانظر إلى مسرد الرموز الذي يظهر بعد ثبت المراجع، أمّا إذا مررت بمصطلح لا تعرفه، مثل التماثل الذاتي الداخلي، فيمكنك البحث في مسرد المصطلحات عن الصفحة الأولى لظهور هذا المصطلح.

الخلاصة، على الرغم من أنّ فهم الموضوع مهم في كل مقرر دراسي للرياضيات، فإنه في الحقيقة حاسم لأدائك في هذا المقرر الدراسي، الذي عسى أن تجد فيه خبرة مجزية.

ج. ب. ف

خريطة التتابع



الفصل 0 المجموعات والعلاقات Sets And Relations

حول التعريفات ومفهوم المجموعة

لا يدرك كثير من الطلبة الأهمية الكبرى للتعريفات في الرياضيات، وتنشأ هذه الأهمية من حاجة الرياضيين إلى التواصل فيما بينهم، فلو حاول شخصان التواصل فيما بينهما حول موضوع ما، فلا بد أن يكونا مشتركين في فهم مفرداته التقنية. وعلى أيّ حال هناك ضعفٌ بنائي مهم في هذا الأمر.

إنه من المستحيل أن نعرّف كل مفهوم.

مثلًا افترض أننا عرّفنا مفهوم المجموعة على هذا النحو: "**المجموعة (set)** هي جماعة مكونة من أشياء"، فمن الطبيعي أن يسأل المرء عن المقصود بالجماعة، وهذا يجعلنا نعرفها على النحو الآتي: "الجماعة هي تجمّع من أشياء"، وهنا يظهر السؤال الآتي: ما التجمّع؟ ولأن مفردات اللغة منتهية، فسنجد أنفسنا بعد حين نستخدم كلمات سبق استخدامها (تقليدية أو مبتذلة)، وعندها يكون التعريف مفرغًا من معناه وعديم الأهمية، ويدرك الرياضيون أنه لا بدّ من وجود مفاهيم غير معرّفة أو بدائية نبدأ منها، وقد اتفقوا حاليًا على أن المجموعة هي أحد هذه المفاهيم البدائية، فضلًا عن أننا لن نعرّف المجموعة، لكننا نأمل أنه إذا ذكرت عبارات، مثل "مجموعة الأعداد الحقيقية" أو "مجموعة أعضاء مجلس الشيوخ الأمريكي" أن تكون مفاهيم الناس المختلفة للمقصود متشابهة بما يكفي لجعل التواصل معقولاً.

نجمل بعض الأشياء التي سنفترضها حول المجموعات باختصار كالآتي:

1. تتكوّن المجموعة S من **عناصر (elements)**، وإذا كان a أحد هذه العناصر، فنشير إلى ذلك بالرمز $a \in S$.
2. هناك مجموعة واحدة بالضبط ليس فيها عناصر، وهي **المجموعة الخالية (empty set)** ويرمز لها بِـ $\emptyset$.
3. يمكننا وصف المجموعة، إما بإعطاء صفة مميزة لعناصرها، مثل «مجموعة أعضاء مجلس الشيوخ الأمريكي» أو بسرد العناصر. الطريقة القياسية لوصف مجموعة بسرد العناصر هي بحصر أسماء العناصر – مفصولة بفواصل – بين حاصرتين، على سبيل المثال $\{1، 2، 15\}$ إذا وصفت مجموعة بصفة مميزة $P(x)$ لعناصرها x، فإنه عادة ما يستخدم رمز الحواصر $\{x \mid P(x)\}$ ويقرأ «مجموعة كل x بحيث إن العبارة $P(x)$ عن x صحيحة» وعليه:
$$\{x \mid 8 \text{ عدد صحيح موجب أقل من أو يساوي } x\} = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{2x \mid x = 1, 2, 3, 4\}$$
الرمز $\{x \mid P(x)\}$ عادة ما يسمى «رمز بناء– المجموعة».

4. **المجموعة حسنة التعريف** (**well defined**) تعني أنه إذا كانت S مجموعة و a شيء ما، فإنه إما a في S – ويرمز لها بـ $a \in S$ – أو بالتأكيد a ليس في S – ويرمز لها بـ $a \notin S$. ومن ثم يجب علينا ألا نقول أبَدًا "اعتبر المجموعة S لبعض الأعداد الموجبة،" لأنه ليس واضحًا فيما إذا كان $2 \in S$ أو $2 \notin S$. من الناحية الأخرى، يمكننا اعتبار المجموعة T لكل الأعداد الصحيحة الموجبة الأولية حسنة التعريف وذلك لأن كل عدد صحيح موجب هو بلا ريب إما أوليًّا أو غير أولي. ومن ثم $5 \in T$ و $14 \notin T$. من الممكن أن يكون صعبًا أن نحدد بالفعل ما إذا كان شيء ما في مجموعة. على سبيل المثال، عندما أرسل هذا الكتاب للطباعة من المحتمل أنه لم يكن معلومًا فيما إذا كان $2^{(2^{65})} + 1$ في T. على أي حال، من المؤكد أن $2^{(2^{65})} + 1$ إما أوليًّا أو غير أولي.

ومن غير الملائم في هذا الكتاب أن نُرْجِع تعريف كل شيء نستخدمه إلى مفهوم المجموعة، فمثلاً: لن نُعَرِّفَ العدد π بدلالة مجموعةٍ أبدًا.

كل تعريف هو عبارة من النوع إذا وفقط إذا.

مع هذا الفهم تُذكَر التعريفات عادة بحذف فقط إذا، لكنها دائمًا تُفهم بوصفها جزءًا من التعريف، وعليه، يمكننا تعريف المثلث متساوي الساقين على النحو: "يكون المثلث **متساوي الساقين (isosceles)** إذا كان له ضلعان متساويان في الطول،" وهذا نعني به حقيقةً أن المثلث متساوي الساقين إذا وفقط إذا كان له ضلعان متساويان في الطول.

يتعيّن علينا في كتابنا هذا تعريف الكثير من المصطلحات، فنستخدم على وجه التخصيص ترقيمًا وتعليمًا لتعريفات المفاهيم الجبرية الرئيسة التي نهتم بها، ولتجنب كمية مربكة من مثل هذه التعليمات والترقيمات، عرّفنا كثيرًا من المصطلحات ضمن متن الكتاب وتمارينه باستخدام الطباعة بالحرف الغامق.

اصطلاح الخط الغامق
المصطلح المطبوع بحرف غامق في جملة يتم تعريفه في تلك الجملة.

لا تعتقد أن عليك أن تحفظ التعريف حرفيًّا، بل إن الشيء المهم إدراك المفهوم، وعليه، يمكنك بالضبط تعريف المفهوم نفسه بكلماتك الخاصة، وهكذا فالتعريف الآتي: "**المثلث المتساوي الساقين** هو مثلث له ضلعان متساويان " هو على نحو كاملٍ صحيح، وقد كان لزامًا علينا أن نؤخر صياغتنا لمصطلح الخط الغامق إلى ما بعد استخدامنا له في مناقشة تعريف المجموعة؛ وذلك لأننا لم نكن عرّفنا المجموعة بعد!

سنعرّف في هذا الفصل بعض المفاهيم المألوفة بوصفها مجموعات، وذلك لتوضيحها ومراجعتها، ونعطي أولًا بعض التعريفات والرموز.

1.0 تعريف المجموعة B **مجموعة جزئيّة من مجموعة (subset of a set)** A يرمز لها بـ $B \subseteq A$ أو $A \supseteq B$ إذا كان كل عنصر في B هو في A، وستستخدم الرموز $B \subset A$ أو $A \supset B$ لـ $B \subseteq A$، لكن $B \neq A$. ■

لاحظ أنه وفقًا لهذا التعريف، لأيّ مجموعة A، A نفسها و ϕ كلتاهما مجموعتان جزئيّتان من A.

2.0 تعريف إذا كانت A أيّ مجموعة، فإن A **مجموعة جزئيّة غير فعليّة من (improper subset of)** A، أيّ مجموعة جزئيّة أخرى من A هي **مجموعة جزئيّة فعليّة من (proper subset of)** A ■

3.0 مثال لتكن $S = \{1, 2, 3\}$. هذه المجموعة S لها بصورة كلّية ثماني مجموعات جزئيّة، هي:

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$ ▲

4.0 تعريف لتكن A و B مجموعتين، المجموعة $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ و } b \in B\}$ هي **الضرب الديكارتي (Cartesian product)** لـ A و B. ■

5.0 مثال إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4\}$ ، فإن لدينا:

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$ ▲

خلال هذا الكتاب سينجز كثير من العمل متضمنًا مجموعات أعدادٍ مألوفة، لنعتني برموز هذه المجموعات مرة واحدة وأخيرة.

$\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة (الأعداد الصحيحة: الموجبة، والسالبة، والصفر).

$\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبيّة (الأعداد التي يمكن التعبير عنها بوصفها خوارج قسمة m/n لأعداد صحيحة، حيث $n \neq 0$).

$\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

$\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Q}^+$، و $\mathbb{R}^+$ هي مجموعات الأعداد الموجبة في $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ على الترتيب.

$\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركّبة.

$\mathbb{Z}^*$، $\mathbb{Q}^*$ ، $\mathbb{R}^*$ ، و $\mathbb{C}^*$ هي مجموعات الأعداد غير الصفريّة في $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و$\mathbb{C}$، على الترتيب.

6.0 مثال المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ هي المستوى الإقليدي المألوف الذي نستخدمه في أوّل مقرر دراسي تفاضل وتكامل لرسم بيانات دوالّ. ▲

العلاقات بين المجموعات

سنقدم الآن مفهوم ارتباط عنصر a من مجموعة A مع عنصر b من مجموعة B، التي يمكننا أن نرمز لها بـ $a\mathscr{R}b$ ، حيث إنّ الرمز $a\mathscr{R}b$ يُظْهِرُ العنصرين a و b بترتيب من اليسار إلى اليمين، كما في الرمز (a, b) لعنصر في $A \times B$ وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي لعلاقة $\mathscr{R}$ بوصفها مجموعة.

7.0 تعريف العلاقة (**relation**) بين مجموعتين A و B هي مجموعة جزئيّة $\mathscr{R}$ من $A \times B$ فنقرأ $(a,b) \in \mathscr{R}$ على النحو "a ترتبط بـ b"، ونكتب $a\ \mathscr{R}\ b$. ■

8.0 مثال (علاقة المساواة (**Equality Relation**)): توجد علاقة مألوفة واحدة بين مجموعة ونفسها، حيث نعُدّ كل مجموعة S ذكرت في هذا الكتاب تمتلكها: أي علاقة المساواة = المعرفة على مجموعة S بـ

= هي المجموعة الجزئيّة $\{(x,x) \mid x \in S\}$ من $S \times S$.

وعليه، لأيّ $x \in S$ لدينا $x = x$، لكن إذا كان x و y عنصرين مختلفين في S، فإن $(x,y) \notin =$، ونكتب $x \neq y$. ▲

سنشير إلى أيّ علاقة بين مجموعة S ونفسها – كما في المثال السابق– بوصفها **علاقة على** S (**relation on**).

9.0 مثال البيان للدالّة f حيث $f(x) = x^3$ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، هو المجموعة الجزئيّة $\{(x,x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ، وعليه، هي علاقة على $\mathbb{R}$ ، حيث تُحَدَّد الدالّة تمامًا من خلال بيانها. ▲

يقترح المثال السابق بدلاً من تعريف "دالّة" $y = f(x)$ لتكون "قاعدة" تخصِّص لكل $x \in \mathbb{R}$ عنصرًا واحدًا فقط $x \in \mathbb{R}$ ، ويمكننا بسهولة وصفها بأنها مجموعة جزئيّة من نوع مُعَيّن من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ، أي بوصفها علاقة من نوع معيّن، فنُحَرِّر أنفسنا من $\mathbb{R}$ ، ونتعامل مع أيّ مجموعتين X و Y.

10.0 تعريف **الدالّة (function)** ϕ التي ترسل X إلى Y، هي علاقة بين X و Y، مع الخاصيّة أن كل $x \in X$ تظهر بوصفها عضوًا أوّليًا لزوج مرتّب (x, y) واحد فقط في ϕ، وتُسمَّى دالّة كهذه أيضًا **تطبيقًا (map or mapping)** من X إلى Y. نكتب $\phi: X \to Y$، ونُعَبِّر عن $(x, y) \in \phi$ بـ $\phi(x) = y$، **والمجال (domain)** لـ ϕ هو المجموعة X أما المجموعة Y، فهي **المجال المقابل (codomain)** لـ ϕ، **والمدى (range)** لـ ϕ هو $\phi[X] = \{\phi(x) \mid x \in X\}$. ■

11.0 مثال يمكننا النظر إلى عملية جمع الأعداد الحقيقية بوصفها دالّة $+: (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$، أي دالّة ترسل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، فعلى سبيل المثال: التأثير لـ + على $(2,3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ معطًى برمز الدالّة على النحو: $+((2, 3)) = 5$. برمز المجموعات نكتب $((2, 3), 5) \in +$، وبالطبع الرمز المألوف لنا هو $2 + 3 = 5$. ▲

تعداد

عدد العناصر في مجموعة X هو **العدد الرئيس (cardinality)** لـ X ، ويرمز له عادة بـ $|X|$، فعلى سبيل المثال: لدينا $|\{2, 5, 7\}| = 3$، وسيكون مهمًّا لنا مَعْرِفة فيما إذا كانت مجموعتان لهما العدد الرئيس نفسه، فليس هناك مشكلة إن كانت كلتا المجموعتين منتهيتين؛ فيمكننا ببساطة عَدُّ العناصر في كل مجموعة. لكن، هل $\mathbb{Z}$ ، و $\mathbb{Q}$ ، و $\mathbb{R}$ لها العدد الرئيس نفسه؟ ولإقناع أنفسنا بأن مجموعتين X و Y لهما العدد الرئيس نفسه، نحاول أن نعرض لكل $x \in X$ ازدواجًا مع y واحدة فقط في Y، بطريقة يكون فيها كل عنصر من Y يُستعمل أيضًا مرة واحدة لهذه الازدواج، للمجموعتين $X = \{2, 5, 7\}$ و $Y = \{?, !, \#\}$ الازدواج الآتي:

$$2 \leftrightarrow ?,\ 5 \leftrightarrow \#,\ 7 \leftrightarrow !$$

يبيّن أن لهما العدد الرئيس نفسه، لاحظ أنه يمكننا أيضًا عرض الازدواج هذه على النحو: $\{(2, ?), (5, \#), (7, !)\}$، التي هي – بوصفها مجموعة جزئيّة من $X \times Y$ – علاقة بين X و Y. الازدواج:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & \cdots \end{array}$$

تبيّن أن المجموعتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^+$ لهما العدد الرئيس نفسه. ازدواج كهذا – يبيّن أن مجموعتين X و Y لهما العدد الرئيس نفسه– هو علاقة $\leftrightarrow$ من نوع خاص بين X و Y تُسمّى **تقابلًا أحاديًا (one-to-one correspondence)**؛ لأن كل عنصر x في X يظهر بالضبط مرة واحدة في هذه العلاقة، ويمكننا أن نَعُدَّ هذا التقابل الأحادي بأنه دالّة مجالها X، ومداها Y؛ وذلك لأن كل y في Y تظهر أيضًا في زوج ما $y \leftrightarrow x$ نصوغ هذه المناقشة في تعريف:

12.0 تعريف الدالّة[1] $\phi: X \to Y$ **أُحاديّة (one-to-one)**، إذا كان $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ فقط عندما $x_1 = x_2$ (انظر التمرين 37)، والدالّة ϕ **غامرة (onto)** لـ Y إذا كان المدى لـ ϕ هو Y. ■

إذا كانت مجموعة جزئيّة من $X \times Y$ دالّةُ أحاديّة ϕ ، ترسل X بصورة غامرة إلى Y، فإن كل $x \in X$ يظهر بوصفه عضوًا أوّليًا في زوج مرتب واحد فقط في ϕ، وكل $y \in Y$ يظهر أيضًا بوصفه عضوًا ثانيًا في زوج مرتب واحد فقط في ϕ. وعليه، إذا بادلنا العضوين الأول والثاني في الأزواج المرتّبة (x, y) جميعها في ϕ ؛ لنحصل على مجموعة أزواج مرتّبة (y, x) – حصلنا على مجموعة جزئيّة من $Y \times X$– التي تعطي دالّة أحاديّة ترسل Y بصورة غامرة إلى X، وتسمّى هذه الدالّة **دالّة المعكوس (inverse function)** لـ ϕ، ويرمز لها بـ ϕ^{-1}. بوجه عام، إذا كانت ϕ ترسل X بصورة أحاديّة وغامرة إلى Y، وكان $\phi(x) = y$؛ فإن ϕ^{-1} ترسل Y بصورة أحاديّة وغامرة إلى X وعليه فإن $x = \phi^{-1}(y)$.

13.0 تعريف مجموعتان، X و Y **لهما العدد الرئيس نفسه (same cardinality)**، إذا وجدت دالّة أُحاديّة تُرسل X بصورة غامرة إلى Y، أي إذا وجد تقابل أحادي بين X و Y. ■

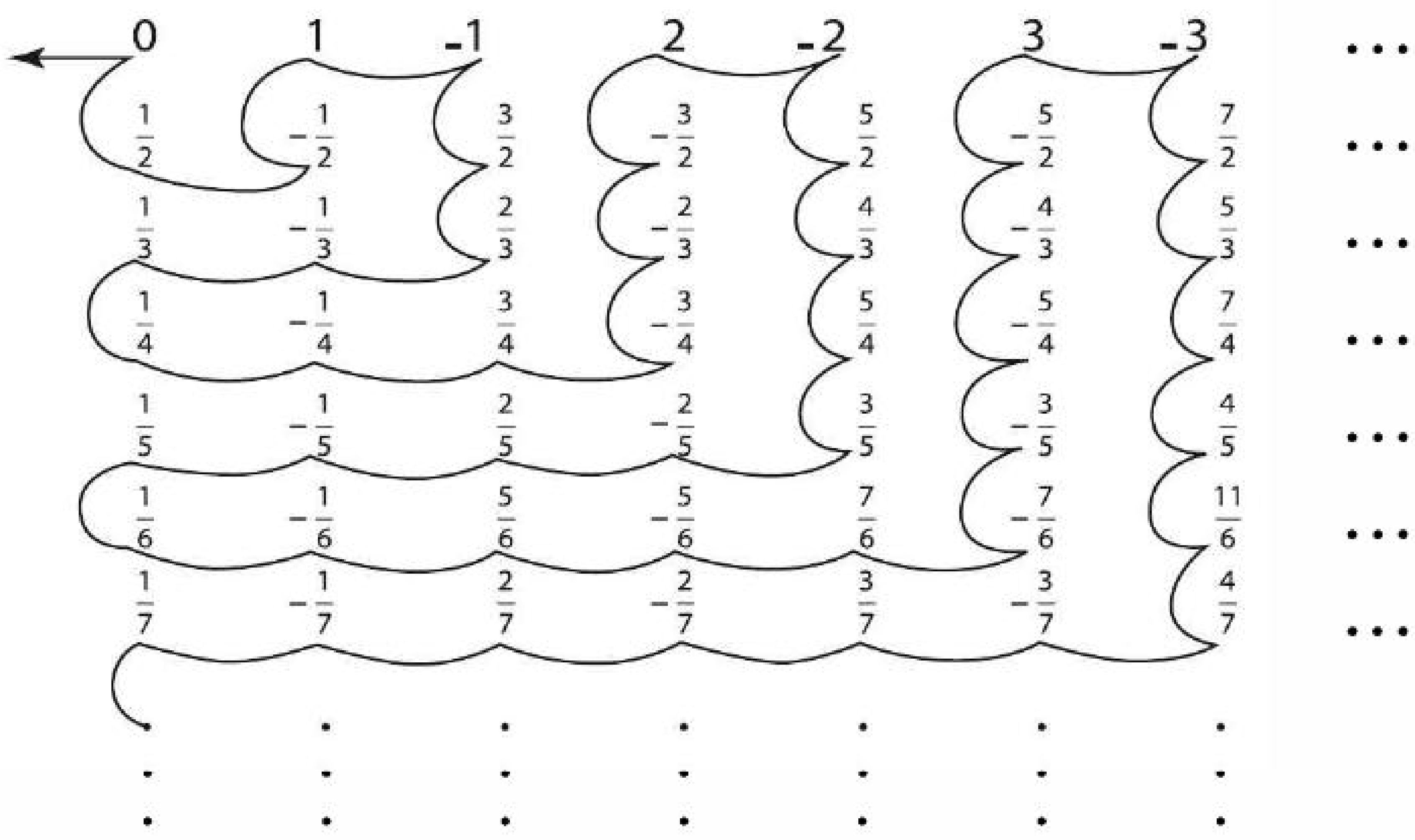
14.0 مثال الدالّة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، حيث $f(x) = x^2$ ليست أحاديّة؛ لأن $f(2) = f(-2) = 4$، لكن $2 \neq -2$، أيضًا هي ليست غامرة لـ $\mathbb{R}$ ؛ لأن المدى هو المجموعة الجزئيّة الفعليّة لكل الأعداد غير السالبة في $\mathbb{R}$. ومن ناحية أخرى فالدالة، $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرَّفة بـ $g(x) = x^3$ هي دالة أحاديّة وغامرة لـ $\mathbb{R}$. ▲

بَيَّنّا أن $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^+$ لهما العدد الرئيس نفسه، ونرمز لهذا العدد بـ $\aleph_0$ ؛ ولذلك، $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^+| = \aleph_0$، أضف إلى ذلك أنه من العجيب أن مجموعة جزئيّة فعليّة من مجموعة غير منتهية يمكن أن يكون عددها الرئيس هو العدد الرئيس نفسه للمجموعة الكاملة؛ إذ إن **المجموعة غير المنتهية (infinite set)** يمكن أن تُعرَّف بوصفها مجموعة لها هذه الخاصيّة.

إننا نتساءل بصورة طبيعية فيما إذا كانت المجموعات غير المنتهية جميعها لها العدد الرئيس نفسه، كالذي للمجموعة $\mathbb{Z}$. فالمجموعة يكون عددها الرئيس هو $\aleph_0$ إذا وفقط إذا كانت عناصرها جميعها يمكن أن تسرد في صف لا نهائي، بحيث نستطيع "ترقيمها" باستخدام $\mathbb{Z}^+$. الشكل 15.0 يشير إلى أن هذا ممكن للمجموعة $\mathbb{Q}$، ففي المصفوفة المربعة للكسور التي تمتد إلى اليمين وإلى الأسفل بصورة لا نهائية، وتحوي عناصر $\mathbb{Q}$ كلها، نرى خيطًا يشقّ طريقًا ملتويًا خلال هذه المصفوفة، لنتخيّل أنّ الكسور ملتصقة بهذا الخيط، وأننا أخذنا بداية الخيط، وسحبناه لليسار في اتجاه السهم، فإن الخيط سيستقيم، وستظهر عناصر $\mathbb{Q}$ جميعها عليه في صف لا نهائي كالآتي: $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{3}{2}, \ldots$ إذن لدينا أيضًا $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

---

1. نذكر اصطلاحًا فنيًّا آخر استخدم من قبَل تلاميذ بورباكي (N.Bourbaki) قد تشاهده في مكان آخر. في اصطلاح بورباكي الدالة الأحادية هي دالة **متباينة** (injection) والدالة الغامرة هي دالة **شاملة** (surjection)، أما الدالة الأحادية والغامرة فهي دالة **تقابل** (bijection).



الشكل 15.0

إذا كان العدد الرئيس للمجموعة $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ هو $\aleph_0$، فإن جميع عناصرها يمكن أن تسرد على صورة كسور عشرية غير منتهية ممتدة للأسفل، متخذة شكلًا لانهائيًا في عمود، ربما على النحو:

$$0.3659663426\ldots$$

$$0.7103958453\ldots$$

$$0.0.58493553\ldots$$

$$0.9968452214\ldots$$

$$\vdots$$

سنثبت الآن أنّ أيّ ترتيب على هذه الصورة، يجب أن يسقط عنصرًا ما في S، بالتأكيد S تحوي عددًا r، تكون فيه المنزلة ذات الترتيب n بعد الفاصلة العشرية هي رقم لا يساوي أيًّا من 0 و 9، ولا يساوي المنزلة ذات الترتيب n للعدد ذي الترتيب n في هذه القائمة، فمثلًا: من الممكن أن تبدأ r بـ $0.5637\ldots$. باختلاف الرقم 5 بعد الفاصلة العشرية عن الرقم 3، يتبيّن لنا أن r ليس العدد الأول في القائمة S المسرودة في الترتيب المبيّن، وباختلاف الرقم 6 عن 1 في المنزلة العشرية الثانية، يتبيّن لنا أيضًا أن r ليست العدد الثاني في القائمة، وهكذا ، ولأننا نستطيع عمل هذا التبرير مع أيّ قائمة، فإننا نرى أن S فيها عناصر أكثر بكثير مما يمكن قرنه بتلك في $\mathbb{Z}^+$. يشير التمرين 15 إلى أن $\mathbb{R}$ فيها عدد عناصر S نفسه، وقد رمزنا لعدد عناصر $\mathbb{R}$ بـ $|\mathbb{R}|$، ويشير التمرين 19 إلى أن هناك عددًا لانهائيًا من الأعداد الرئيسة المختلفة، حتى أكبر من $|\mathbb{R}|$.

التجزئة وعلاقات التكافؤ

تكون المجموعات **منفصلة (disjoint)** إذا لم تكن فيها اثنتان بينهما عنصر مشترك، وسنحتاج لاحقًا إلى أن نجزّئ مجموعة لها بنية جبريّة (مثلاً مفهوم الجمع) إلى مجموعات جزئيّة منفصلة، تصبح عناصر بنية جبريّة مرتبطة بالمجموعة، ثم نختم هذا الفصل بدراسة لمثل هذه التجزئات أو التقطيع للمجموعات.

16.0 تعريف التجزئة (**partition**) لمجموعة S هي عائلة لمجموعات جزئيّة غير خالية من S يكون فيها كل عنصر من S في واحدة فقط من هذه المجموعات الجزئيّة، والمجموعات الجزئيّة هي خلايا (**cells**) التجزئة. ■

عندما نناقش تجزئة لمجموعة S، نرمز للخليّة التي تحوي العنصر x في S بـ $\overline{x}$.

17.0 مثال بتقسيم $\mathbb{Z}^+$ إلى مجموعتين: المجموعة الجزئيّة للأعداد الصحيحة الموجبة الزوجيّة (تلك التي تقبل القسمة على 2)، والمجموعة الجزئيّة للأعداد الصحيحة الموجبة الفردية (تلك التي باقي قسمتها على 2 هو 1)، نحصل على تجزئة لـ $\mathbb{Z}^+$ إلى خليّتين.

فمثلاً، نستطيع أن نكتب

$$\overline{14} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots\}$$

أيضًا يمكننا تجزئة $\mathbb{Z}^+$ إلى ثلاث خلايا: واحدة تتألّف من الأعداد الصحيحة الموجبة القابلة للقسمة على 3، وأخرى تتألّف من الأعداد الصحيحة الموجبة التي يكون باقي قسمتها على 3 هو 1، والأخيرة تتألّف من الأعداد الصحيحة الموجبة التي يكون باقي قسمتها على 3 هو 2.

وبالتعميم – لكل عدد صحيح موجب n – يمكننا تجزئة $\mathbb{Z}^+$ إلى n خليّة وفقًا للباقي فيما إذا كان $0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ وذلك عند قسمة عدد صحيح موجب على n، فهذه الخلايا هي **صفوف البواقي قياس** n (**residue classes modulo**) في $\mathbb{Z}^+$، ويسألنا التمرين 35 أن نعرض هذه التجزئات للحالات $n = 2, 3, 5$. ▲

إن كل تجزئة لمجموعة S تعطي بطريقة طبيعية علاقة $\mathcal{R}$ على S: أي لـ $x, y \in S$، ليكن $x\,\mathcal{R}\,y$ إذا وفقط إذا كان x و y في الخليّة نفسها للتجزئة. باستخدام رمز المجموعة، يمكننا كتابة $x\,\mathcal{R}\,y$ على النحو: $(x,y) \in \mathcal{R}$ (انظر التعريف 7.0). وبقليل من التفكير، يظهر أنّ هذه العلاقة $\mathcal{R}$ على S تحقّق الخصائص الثلاث لعلاقة التكافؤ في التعريف الآتي:

18.0 تعريف علاقة التكافؤ (**equivalence relation**) $\mathcal{R}$ على مجموعة S، هي علاقة تحقّق الخصائص الثلاث الآتية لكل $x, y, z \in S$:

1. (منعكسة): $x\,\mathcal{R}\,x$.
2. (متناظرة): إذا كان $x\,\mathcal{R}\,y$، فإن $y\,\mathcal{R}\,x$.
3. (متعدية): إذا كان $x\,\mathcal{R}\,y$ و $y\,\mathcal{R}\,z$، فإن $x\,\mathcal{R}\,z$. ■

لنوضح، لماذا نجد العلاقة $\mathcal{R}$ المقابلة لتجزئة لـ S تحقّق شرط التناظر في التعريف؟ علينا أن نلاحظ فقط أنه إذا كان x و y في الخليّة نفسها (أي إن $x\,\mathcal{R}\,y$)، فإن y و x في الخليّة نفسها (أي إن $y\,\mathcal{R}\,x$). والآن نترك الملاحظات المشابهة لإثبات خاصيتي الانعكاس والتعدي للتمرين 28.

19.0 مثال لأيّ مجموعة غير خالية S، علاقة المساواة = المعرفة من خلال المجموعة الجزئية $\{(x, x) \mid x \in S\}$ من $S \times S$ هي علاقة تكافؤ. ▲

مثال 20.0 (**التطابق مقياس n**): ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$. علاقة التكافؤ على $\mathbb{Z}^+$ المقابلة لتجزئة $\mathbb{Z}^+$ إلى صفوف بواقي مقياس n التي نوقشت في المثال 17.0 هي **تطابق مقياس (congruence modulo n)**، ويرمز لها في بعض الأحيان بـ $\equiv_n$. بدلاً من كتابة $a \equiv_n b$، نكتب عادة $a \equiv b$ (مقياس n)، وتقرأ "a تطابق b مقياس n". مثلًا: لدينا $27 \equiv 15$ (مقياس 4)؛ لأن كليهما 15 و27 له الباقي 3 عند قسمته على 4. ▲

مثال 21.0 لتكن $\Re$ العلاقة على المجموعة $\mathbb{Z}$ المعرفة بـ $n\Re m$ إذا وفقط إذا كان $nm \geq 0$، لنحدد الآن فيما إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ.

منعكسة $a\Re a$؛ لأن $a^2 \geq 0$ لكل $a \in \mathbb{Z}$.

متناظرة: إذا كان $a\Re b$، فإن $ab \geq 0$ وهكذا $ba \geq 0$ ومن ثم $b\Re a$.

متعدية: إذا كان $a\Re b$ و $b\Re c$، فإن $ab \geq 0$ و $bc \geq 0$. وعليه، $ab^2c = acb^2 \geq 0$. إذا علمنا أن $b^2 > 0$، يمكننا استنتاج أنَّ $ac \geq 0$ وعليه فإن $a\Re c$. علينا فحص الحالة $b = 0$ على نحو منفصل، حيث تبيّن لحظة تفكير أن $-3\Re 0$ و $0\Re 5$، لكن ليس لدينا $-3\Re 5$. وعليه، فالعلاقة $\Re$ ليست متعدية، إذن فهي ليست علاقة تكافؤ. ▲

لاحظنا فيما سبق أن التجزئة تنتج علاقة تكافؤ طبيعية، وسوف نثبت الآن أن علاقة التكافؤ على مجموعة تعطي تجزئة طبيعية للمجموعة. المبرهنة الآتية تذكر كلتا النتيجتين بوصفها مرجعًا لهما.

مبرهنة 22.0 (**علاقات التكافؤ والتجزئات**): لتكن S مجموعة غير خالية، ولتكن $\sim$ علاقة تكافؤ على S. عندئذٍ $\sim$ تنتج تجزئة لـ S، حيث

$$\bar{a} = \{ x \in S \mid x \sim a \}$$

أيضًا، كل تجزئة لـ S تنشئ علاقة تكافؤ $\sim$ على S، حيث $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان a و b في خليّة التجزئة نفسها.

البرهان

يجب أن نثبت أن الخلايا المختلفة $\bar{a} = \{x \in S \mid x \sim a\}$ لـ $a \in S$ تعطي تجزئة لـ S؛ ولذلك، فإن كل عنصر في S هو في خليّة ما، وهكذا إذا كان $a \in \bar{b}$، فإن $\bar{a} = \bar{b}$. ليكن $a \in S$، عندئذٍ ومن خلال الشرط (1) فإن $a \in \bar{a}$، وهكذا a في خليّة واحدة على الأقل.

افترض الآن أن a أيضًا في خليّة $\bar{b}$. نحتاج إلى أن نثبت أنّ $\bar{a} = \bar{b}$ بوصفها مجموعات؛ وستثبت هذه أن a لا يمكن أن يكون في أكثر من خليّة واحدة، وهناك طريقة قياسية لإثبات أن مجموعتين متساويتان:

أثبت أن كل مجموعة هي مجموعة جزئيّة من الأخرى.

نثبت أولًا أن $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. ليكن $x \in \bar{a}$، عندئذٍ $x \sim a$؛ لكن $a \in \bar{b}$، وهكذا $a \sim b$، عندئذٍ – من خلال شرط التعدي (3) $x \sim b$، وهكذا $x \in \bar{b}$. وعليه، $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. نثبت بعد ذلك أن $\bar{b} \subseteq \bar{a}$. ليكن $y \in \bar{b}$، عندئذٍ $y \sim b$؛ لكن $a \in \bar{b}$، وهكذا $a \sim b$ ومن خلال شرط التناظر (2) $b \sim a$، عندئذٍ من خلال التعدي (3) فإن $y \sim a$ وهكذا $y \in \bar{a}$، لهذا أيضًا $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ وهكذا $\bar{b} = \bar{a}$، ويكون برهاننا قد اكتمل. ◆

كل خليّة في التجزئة الناشئة من علاقة تكافؤ، هي **صف تكافؤ (equivalence class)**.

تمارين 0

في التمارين من 1 إلى 4، صِف المجموعة بسرد عناصرها.

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\}$

2. $\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = 3\}$

3. $\{m \in \mathbb{Z} \mid mn = 60 \text{ for some } n \in \mathbb{Z} \mid\}$

4. $\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 - m < 115\}$

في التمارين من 5 إلى 10، قَرِّر فيما إذا كان الشيء الموصوف مجموعة بالفعل (حسنة التعريف)، ثم أعطِ وصفًا بديلًا لكل مجموعة.

5. $\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid$ n عدد كبير $\}$

6. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 < 0\}$

7. $\{n \in \mathbb{Z} \mid 39 < n^3 < 57\}$

8. $\{x \in \mathbb{Q} \mid$ x عدد صحيح تقريبًا$\}$

9. $\{x \in \mathbb{Q} \mid$ x يمكن أن يكتب وله مقام أكبر من 100$\}$

10. $\{x \in \mathbb{Q} \mid$ x يمكن أن يكتب وله مقام موجب أقل من 4$\}$

11. اكتب المجموعة $\{a, b, c\} \times \{1, 2, c\}$ بذكر عناصرها.

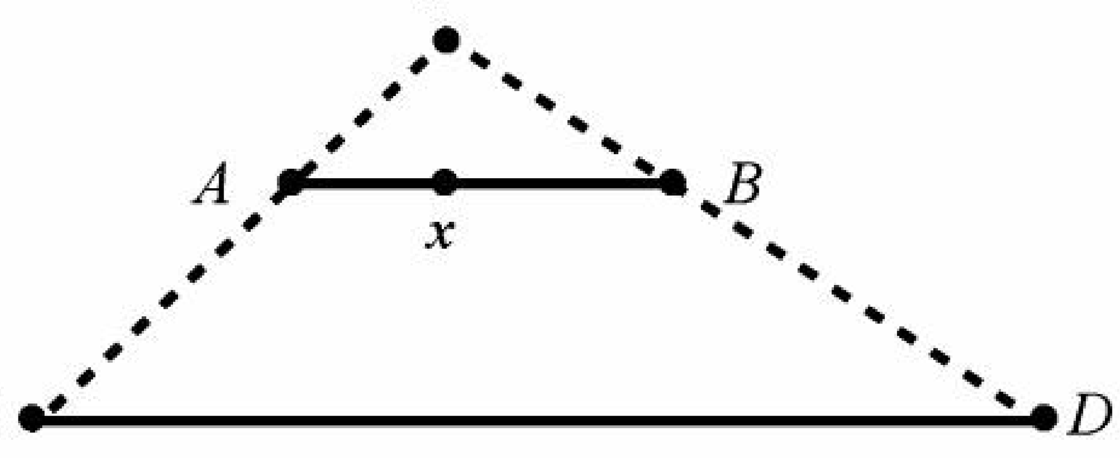
12. لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$. لكل علاقة بين A وB معطاة بوصفها مجموعة جزئيّة من $A \times B$، قَرِّر فيما إذا كانت دالّة ترسل A إلى B، وإذا كانت دالّة، قرِّر فيما إذا كانت أُحاديّة، وفيما إذا كانت غامرة لـِ B.

أ. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 6)\}$ ب. $\{(1, 4), (2, 6), (3, 4)\}$

جـ. $\{(1, 6), (1, 2), (1, 4)\}$ د. $\{(2, 2), (1, 6), (3, 4)\}$

هـ. $\{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$ و. $\{(1, 2), (2, 6), (2, 4)\}$

13. وضِّح هندسيًّا أن قطعتين مستقيمتين AB و CD مختلفتين في الطول لهما عدد النقاط نفسه، وذلك من خلال إشارتك في الشكل 23.0 إلى نقطة y على CD، يمكن أن تقرن بنقطة x على AB.



الشكل 23.0

14. تذكّر أن لـِ $a, b \in \mathbb{R}$ و$a < b$، **الفترة المغلقة (closed internal)** $[a, b]$ في $\mathbb{R}$ معرفة على النحو $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$. أثبت أنّ الفترات المعطاة لها العدد الرئيس نفسه، بإعطاء صيغة لدالّة أُحاديّة f ترسل الفترة الأولى بصورة غامرة إلى الثانية.

أ. $[0, 1]$ و $[0, 2]$ ب. $[1, 3]$ و $[5, 25]$ جـ. $[a, b]$ و $[c, d]$

15. أثبت أنّ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ و $\mathbb{R}$ لهما العدد الرئيس نفسه، [مساعدة: أوجد دالّة ابتدائيّة بالاستعانة

بالتفاضل والتكامل، ترسل فترة بصورة أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{R}$، وبعد ذلك بسحب وتقايس مناسبين، اجعل المجال هو المجموعة S].

لأي مجموعة A، نرمز بـ $\rho(A)$ **لمجموعة المجموعات الجزئيّة (Power set)** من A، فمثلاً: إذا كانت $A=\{a, b, c, d\}$، فإن $\{a,b,c\}\in\rho(A)$ المجموعة $\rho(A)$ تسمى مجموعة القوى **(Power set)**. التمارين من 16 إلى 19 تتعامل مع مفهوم مجموعة المجموعات الجزئيّة من A

16. اسرد عناصر مجموعة القوى للمجموعة المعطاة، وأعطِ العدد الرئيس لمجموعة القوى.

أ. ϕ ب. $\{a\}$ جـ. $\{a, b\}$ د. $\{a, b, c\}$.

17. لتكن A مجموعة منتهية، وليكن $|A|=s$. بالاعتماد على التمرين السابق، اقترح مخمنَّة عن قيمة $|\rho(A)|$، ثم حاول إثباتها.

18. لأيّ مجموعة A – منتهية أو غير منتهية – لتكن B^A مجموعة الدوالّ جميعها التي ترسل A إلى $B=\{0, 1\}$. أثبت أنّ B^A و $\rho(A)$ لهما العدد الرئيس نفسه [مساعدة: كل عنصر في B^A يُحدِّدُ بطريقة طبيعية مجموعة جزئيّة من A].

19. أثبت أنّ مجموعة القوى لمجموعة A – منتهية أو غير منتهية – فيها عناصر أكثر بكثير من أن تكون قادرة على أن توضع في تقابل أحادي مع A، ثم فسّر لماذا يعني هذا الحدس وجود عدد غير نهائي لأعداد رئيسة غير نهائيّة. [مساعدة: تخيل دالّة أُحاديّة ϕ معطاة ترسل A إلى $\rho(A)$، وأثبت أن ϕ لا يمكن أن تكون غامرة لـ $\rho(A)$ بمناقشة فيما إذا كان $x\in\phi(x)$ لكل $x\in A$، واستخدم هذه الفكرة لِتُعَرِّفَ مجموعة جزئيّة S من A ليست في مدى ϕ]. هل مفهوم مجموعة كل شيء مقبول من ناحية منطقية؟ لماذا أو لماذا لا؟

20. لتكن $A=\{1, 2\}$، ولتكن $B=\{3, 4, 5\}$.

أ. وضّح – باستخدام A و B – لماذا نعُدّ $2+3=5$، ثم استخدم استنتاجًا مشابهًا مع مجموعات من اختيارك لتقرّر ماذا ستعُدّ القيمة لـ

1. $3+\aleph_0$ .2. $\aleph_0+\aleph_0$.

ب. وضّح لماذا نعُدّ $3 \cdot 2 = 6$ برسم النقاط لـ $A\times B$ في المستوى $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، ثم استخدم استنتاجًا مشابهًا، وذلك بالاستعانة بشكل من الكتاب؛ لتقرر ماذا ستعُدّ قيمة $\aleph_0\cdot\aleph_0$.

21. كم عددًا في الفترة $0\le x\le 1$ يمكن أن يعبَّر عنه بالشكل ##. ، حيث كل # هو أحد الأرقام $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$؟ وكم عددًا يوجد على الشكل #####.؟ باتباع فكرة كهذه والتمرين 15، قرّر ماذا ستعُدّ القيمة لـ $10^{\aleph_0}$، وماذا عن $12^{\aleph_0}$ و $2^{\aleph_0}$؟

22. إكمالًا للفكرة في التمرين السابق وباستخدام التمرينين 18 و19، استخدم رمزًا أُسيًّا لتملأه في الفراغات الثلاثة؛ لتعطي سردًا لخمسة تعدادات، كل منها أكبر من الذي يسبقه.

$$\aleph_0, |\mathbb{R}|, \underline{\quad\quad}, \underline{\quad\quad}, \underline{\quad\quad}.$$

في التمارين من 23 إلى 27، أوجد عدد التجزئات المختلفة لمجموعة لها عدد العناصر المعطاة.

23. عنصر **24.** عنصران **25.** 3 عناصر

26. 4 عناصر **27.** 5 عناصر

28. افترض أنّ لديك تجزئة لمجموعة S. الفقرة التي أعقبت التعريف 18.0 وضّحت لماذا العلاقة:

$$x\,\mathscr{R}\,y \text{ إذا وفقط إذا كان } x \text{ و } y \text{ في الخليّة نفسها}$$

تحقّق شرط التناظر لعلاقة التكافؤ، اكتب تفسيرًا مشابهًا. لماذا تحقق أيضًا خاصيتا الانعكاس والتعدي؟

في التمارين من 29 إلى 34، حدّد فيما إذا كانت العلاقة المعطاة علاقة تكافؤ على المجموعة، ثم صِف التجزئة الناشئة من كل علاقة تكافؤ.

29. $n\mathscr{R}m$ في $\mathbb{Z}$، إذا كان $nm>0$

30. $x\mathscr{R}y$ في $\mathbb{R}$، إذا كان $x\geq y$

31. $x\mathscr{R}y$ في $\mathbb{R}$ ، إذا كان $|x|=|y|$

32. $x\mathscr{R}y$ في $\mathbb{R}$، إذا كان $|x-y|\leq 3$

33. $n\mathscr{R}m$ في $\mathbb{Z}^+$، إذا كان n وm لهما عدد المنازل نفسه في الرمز الاعتيادي للأساس 10.

34. $n\mathscr{R}m$ في $\mathbb{Z}^+$ ، إذا كان n و m لهما المنزلة الأخيرة نفسها في الرمز الاعتيادي للأساس 10.

35. مستخدمًا رمز المجموعة على الصورة $\{\ldots ,\#,\#,\#\}$ لمجموعة غير منتهية، اكتب صفوف الرواسب قياس n في $\mathbb{Z}^+$، التي نوقشت في المثال 17.0 لقيمة n المشار إليها.

أ. $n=2$ ب. $n=3$ جـ. $n=5$

36. ليكن $n\in\mathbb{Z}^+$، ولتكن ~ المعرَّفة على $\mathbb{Z}$ بـ $r\sim s$ إذا وفقط إذا كان $r-s$ يقبل القسمة على n، أي إذا وفقط إذا كان $r-s=nq$ لعنصر ما $q\in\mathbb{Z}$.

أ. أثبت أنّ ~ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$. (تُسمَّى "تطابق مقياس n" كما كانت لـ $\mathbb{Z}^+$. انظر الفرع ب) .

ب. أثبت أنه عندما نقتصر على المجموعة الجزئيّة $\mathbb{Z}^+$ من $\mathbb{Z}$، فإن ~ تمثل علاقة التكافؤ – تطابق مقياس n – للمثال 20.0.

جـ. خلايا هذه التجزئة لـ $\mathbb{Z}$ هي صفوف البواقي قياس n في $\mathbb{Z}$. أعد التمرين 35 لصفوف التكافؤ مقياس في $\mathbb{Z}$ بدلاً من أن يكون في $\mathbb{Z}^+$، مستخدمًا الرمز $\{\ldots,\#,\#,\#,\ldots\}$ لهذه المجموعات غير المنتهية.

37. يُخطئ الطلاب عادة في فهم مفهوم الدالّة (التطبيق) الأحاديّة، من الممكن أن يكون السبب معروفًا. انظر إلى الدالّة $\phi:A\to B$، فسترى أن لها اتجاهًا يترافق معها – من A إلى B – وتلاحظ أن توقع الدالّة الأحاديّة لتكون دالّة تحمل نقطة واحدة من A إلى نقطة واحدة من B – في الاتجاه المشار إليه بالسهم، يبدو ببساطة منطقيًّا، ولكن بالتأكيد كل دالّة من A إلى B تؤدي ذلك، والتعريف 12.0 لا يقول ذلك مطلقًا. والآن صَمِّم درسًا بأفضل ما تستطيع، تحلّ فيه الدوالّ الموصوفة في التعريف 12.0 محل دوالّ اثنين – إلى – اثنين. (إنه من المستحيل تقريبًا أن نتوسّع أكثر باستخدام تغيير المصطلح).

الوحدة الأولى

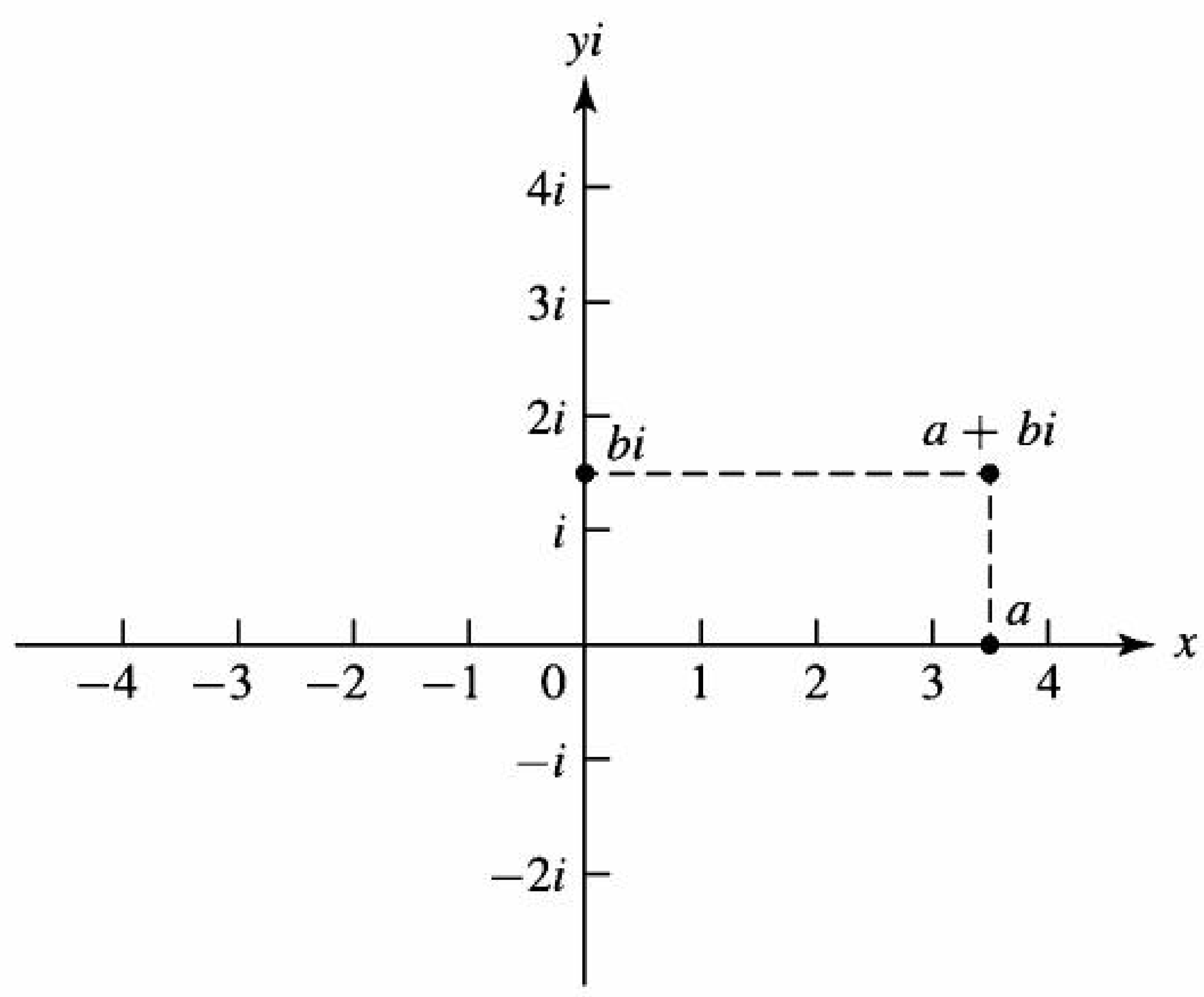
الزمر والزمر الجزئيّة Groups and subgroups

الفصل 1 مقدمة وأمثلة Introduction and Examples

في هذا الفصل، سنُعنى بإعطائك فكرة بسيطة عن طبيعة الجبر المجرد، فكلنا يألف جمع الأعداد الحقيقية وضربها، إذ إنّ كلًّا من الجمع والضرب يضمّ عددين للحصول على عدد واحد، فمثلًا يضم الجمع 2 و 3 للحصول على 5، نعدّ الجمع والضرب عمليات ثنائيّة، وفي هذا الكتاب، نجرّد هذا المفهوم، وندرس المجموعات التي لدينا فيها واحدة أو أكثر من هذه العمليات الثنائيّة، ثم نفكر في العملية الثنائيّة على مجموعة بأنها تعطي الجبر على هذه المجموعة، ونهتم بالصفات التركيبية لهذا الجبر، ولتوضيح ما نقصد بالصفة التركيبية مع مجموعتنا المألوفة $\mathbb{R}$، مجموعة الأعداد الحقيقية، نلاحظ أنّ المعادلة $x+x=a$ لها حلّ x في $\mathbb{R}$ لكل $a\in\mathbb{R}$، تحديدًا $x=a/2$، في حين أنّ معادلة الضرب المقابلة $x\cdot x=a$ ليس لها حلّ في $\mathbb{R}$ إذا كان $a<0$؛ لذلك $\mathbb{R}$ مع الجمع لها تركيب جبري مختلف عن $\mathbb{R}$ مع الضرب.

أحيانًا يكون التركيب الجبري نفسه لمجموعتين مختلفتين مع عمليتين ثنائيّتين نعدّهما بصورة طبيعية شديدتي الاختلاف، فعلى سبيل المثال: سنرى في الفصل 3 أنّ المجموعة $\mathbb{R}$ مع الجمع لها التركيب الجبري نفسه الذي لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$ مع الضرب!

هذا الفصل مصمّم ليجعلك تفكر في هذه الأشياء بصورة غير دقيقة، وسوف نتعامل مع كل شيء بدقّة في الفصلين 2 و 3. لننتقل الآن إلى بعض الأمثلة، حيث إنّ ضرب الأعداد المركبة ذات القيمة المطلقة 1 يزوّدنا بأمثلة عدة ستكون مفيدة في عملنا وموضّحة له، ونبدأ بمراجعة الأعداد المركبة وضربها.



الشكل 1.1

الأعداد المركبة

يمكن تصور العدد الحقيقي هندسيًّا بوصفه نقطة على خط عادة ما نعدّه المحور x. العدد المركب يمكن أن يُعدّ نقطة في المستوى الإقليدي، كما في الشكل 1.1. لاحظ أننا أسمينا المحور العمودي المحور yi وليس المحور y، وأسمينا النقطة على بعد وحدة واحدة فوق نقطة الأصل i وليس 1. والنقطة ذات الإحداثيات الديكارتية (a,b) سمّيت $a+bi$ في الشكل 1.1. إضافة إلى أنّ مجموعة **الأعداد المركبة (complex numbers)** $\mathbb{C}$ تعرف على النحو الآتي:

$$\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}.$$

نعدّ $\mathbb{R}$ مجموعة جزئيّة من الأعداد المركبة من خلال مطابقة العدد الحقيقي r بالعدد المركب $r + 0i$، فعلى سبيل المثال: نكتب $3 + 0i$ على أنها العدد 3 و $-\pi + 0i$ على أنها العدد $-\pi$ و $0 + 0i$ على أنها العدد 0، وبصورة مشابهة، نكتب $0 + 1i$ على أنها i و$0 + si$ على أنها si.

ظهرت الأعداد المركبة بعد ظهور الأعداد الحقيقية، وقُدِّم العدد المركب i لتوفير حلٍّ للمعادلة التربيعية $x^2 = -1$، لذلك احتجنا إلى:

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

للأسف، سُميت i **عددًا تخيليًا (imaginary number)**، وهذا الاصطلاح قاد أجيالًا من الطلاب إلى رؤيةٍ أكثر تشككًا إلى الأعداد المركبة منها إلى الأعداد الحقيقية. في الواقع، الأعداد كلها مثل $1, 3, \pi, -\sqrt{3}$ و i هي اختراعات من أذهاننا، فليس العدد 1 شيئًا ملموسًا، إذ لو توافر مثل هذا الشيء، فهو بالتأكيد سيكون في مكان رفيع من متحف علمي عظيم، يتدفق عليه سيل مستمرّ من الرياضيين، يحدّقون بـِ 1 في إعجاب ودهشة. أضف إلى ذلك أنّ بيان كيفية اختراع حلول لمعادلاتٍ كثيرةِ الحدود، حتى عندما تكون معاملات كثيرة الحدود ليست حقيقية هدفًا أساسيًا لهذا الكتاب!

ضرب الأعداد المركبة

يعرّف الضرب $(a + bi)(c + di)$ بالطريقة التي يجب أن يعرّف بها، لننعم في الخصائص المعتادة للعمليات الحسابية الحقيقية، ولتحقيق $i^2 = -1$ انسجامًا مع المعادلة (1).

تحديدًا، نرى أننا نرغب في أن يكون

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2\\ &= ac + adi + bci + bd(-1)\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

لذلك، نعرّف ضرب $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ كما يأتي:

$$z_1z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \tag{2}$$

وهي على الصورة $r + si$، حيث $r = ac - bd$ و $s = ad + bc$. التحقّق من صواب الخصائص المعتادة $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$، $z_1z_2 = z_2z_1$، و $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ لكل $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ أمرٌ روتيني.

2.1 مثال احسب $(2 - 5i)(8 + 3i)$

الحل لا نتذكر المعادلة (2) بل نحسب الضرب، كما فعلنا عند استنتاج تلك المعادلة، فنحصل على:

$$(2 - 5i)(8 + 3i) = 16 + 6i - 40i + 15 = 31 - 34i.$$ ▲

لتثبيت المعنى الهندسي لضرب الأعداد المركبة نعرّف أولًا **القيمة المطلقة (absolute value)** $|a+bi|$ لـ $a + bi$ بـ

$$|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

هذه القيمة المطلقة هي عدد حقيقي غير سالب، وهي المسافة من $a + bi$ إلى نقطة الأصل في الشكل 1.1. يمكننا الآن وصف العدد المركب z بصيغة الإحداثيات القطبية

$$z = |z|\ (\cos\theta + i\ \sin\theta), \tag{4}$$

حيث θ هي الزاوية المقيسة عكس عقارب الساعة من المحور x إلى المتجه من 0 إلى z، كما في الشكل 3.1. تنصّ صيغة مشهورة تنسب إلى ليونارد أويلر على أنّ:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta. \qquad \text{(صيغة أويلر)}$$

نطلب منك في التمرين 41 أن تشتق صيغة أويلر بصورة منهجية من مفكوك متسلسلة القُوى للدوال e^{θ}، $\cos\theta$، و $\sin\theta$. باستخدام هذه الصيغة، يمكننا التعبير عن z في المعادلة (4) بالصورة $z = |z|e^{i\theta}$. دعنا نكتب:

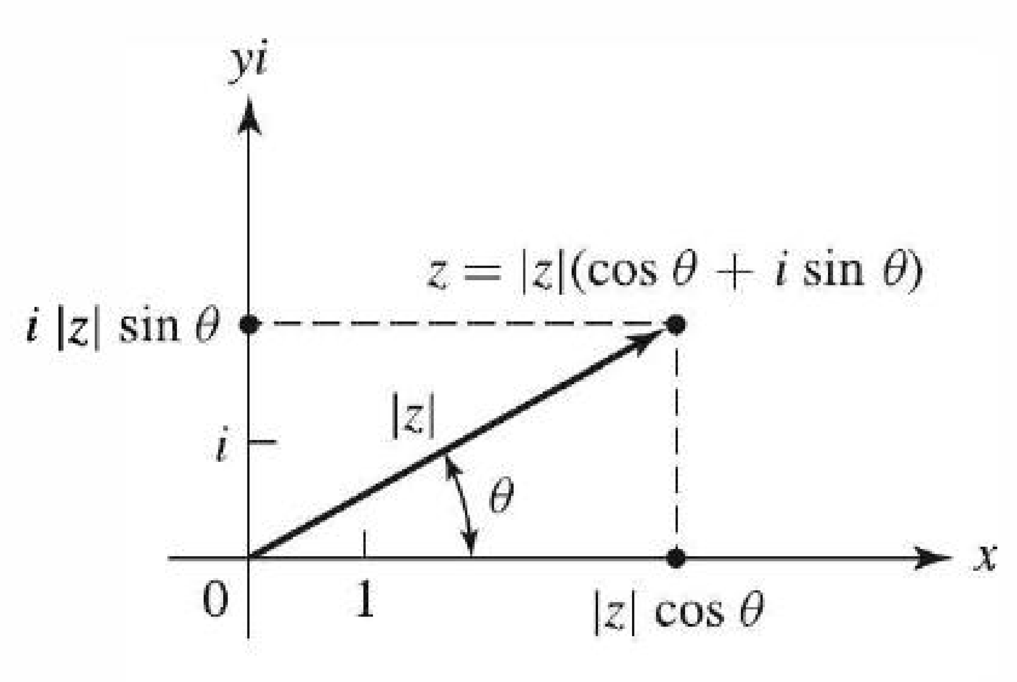
$$z_2 = |z_2|e^{i\theta_2} \quad \text{و} \quad z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$$

ونحسب حاصل ضربهما بهذه الصيغة، مفترضين أنّ قوانين الأسس تنطبق على أسس الأعداد المركبة. نحصل على:

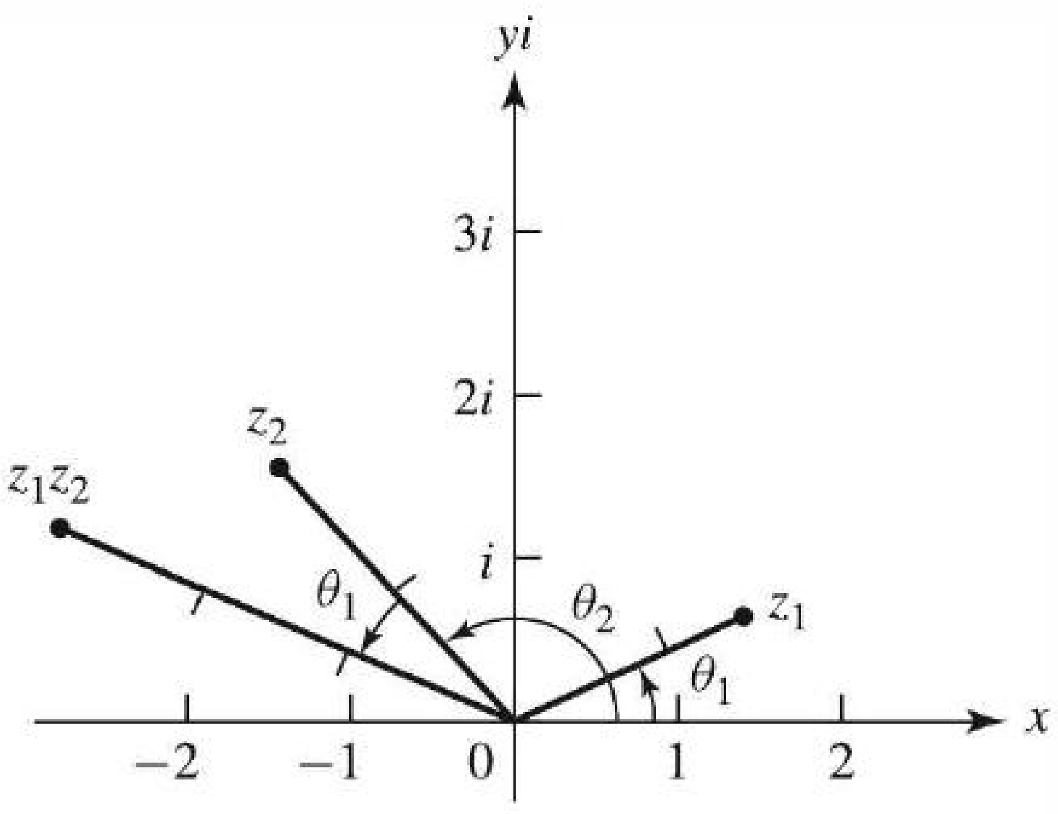
$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= |z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\ \sin(\theta_1+\theta_2)\right] \tag{5}$$

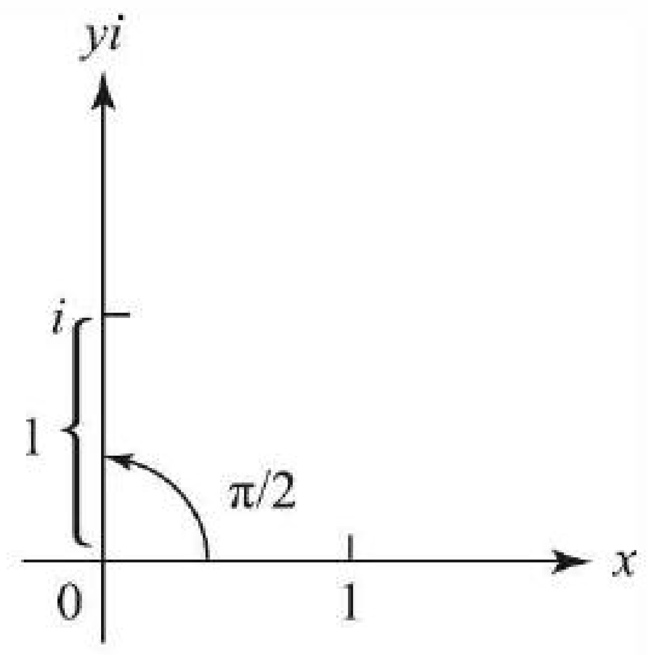
لاحظ أنّ المعادلة (5) تستنتج من المعادلة (4)، حيث $|z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$ والزاوية القطبية θ لـ z_1z_2 هي المجموع $\theta = \theta_1 + \theta_2$؛ فلذلك – هندسيًّا– نضرب الأعداد المركبة بضرب قيمها المطلقة وجمع زواياها القطبية، كما في الشكل 4.1، ويشير التمرين 39 إلى كيفية استنتاج ذلك من خلال المتطابقات المثلثية دون الرجوع إلى صيغة أويلر وفرضيات حول الرفع لأسس مركبة.



الشكل 3.1



الشكل 4.1



الشكل 5.1

لاحظ أنّ i لها الزاوية القطبية $\pi / 2$ والقيمة المطلقة 1، كما في الشكل 5.1.

لذلك، i^2 لها الزاوية القطبية $2(\pi / 2) = \pi$ و $|1 . 1| = 1$، ولذلك $i^2 = -1$.

مثال 6.1 أوجد جميع الحلول في المجموعة $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2 = i$.

بكتابة المعادلة $z^2 = i$ بالصورة القطبية واستخدام المعادلة (5) نحصل على:

$$|z|^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1(0 + i).$$

لذلك، $|z|^2 = 1$؛ ولهذا $|z| = 1$. الزاوية θ لـِ z يجب أن تحقق $\cos 2\theta = 0$ و $\sin 2\theta = 1$. إذن $2\theta = (\pi/2) + n(2\pi)$، وعليه، يكون $\theta = (\pi / 4) + n\pi$ لعدد صحيح n. قيم n التي تعطي قيمًا لـِ θ، بحيث $0 \leq \theta < 2\pi$ هي 0 و1، وتعطي $\theta = \pi / 4$ أو $\theta = 5\pi / 4$. حلولنا هي:

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{و} \quad z_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

أو

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

▲

7.1 مثال أوجد جميع حلول $z^4 = -16$.

كما في المثال 6.1، نكتب المعادلة بالصورة القطبية حاصلين على:

$$|z|^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16 (-1 + 0i).$$

لذلك، $|z|^4 = 16$؛ ولهذا $|z| = 2$، بينما $\cos 4\theta = -1$ و $\sin 4\theta = 0$. نجد أنّ $4\theta = \pi + n(2\pi)$، وعليه، يكون $\theta = (\pi/4) + n(\pi/2)$ لعدد صحيح n. القيم المختلفة الناتجة لـ θ، بحيث إنّ $0 \leq \theta < 2\pi$ هي $\pi/4$، $3\pi/4$، $5\pi/4$، و $7\pi/4$؛ لهذا، فأحد حلول $z^4 = -16$ هو:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

وبطريقة مماثلة نجد ثلاثة حلول إضافية،

$\sqrt{2}(-1+i)$، $\sqrt{2}(-1-i)$، و $\sqrt{2}(1-i)$. ▲

يوضح المثالان السابقان طريقة لإيجاد حلول للمعادلة $z^n = a + bi$ بكتابة المعادلة بالصورة القطبية. دائمًا سيكون هناك n حلًا، شريطة أن يكون $a + bi \neq 0$. تطلب إليك التمارين من 16 إلى 21 أن تحل معادلات من هذا النوع.

لن نستخدم جمع أو قسمة الأعداد المركبة، لكن ربما يجدر بنا أن نذكر أنّ الجمع يعطى بالصيغة:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{6}$$

وقسمة $a + bi$ على $c + di$ غير الصفري يمكن التحايل لإجرائها:

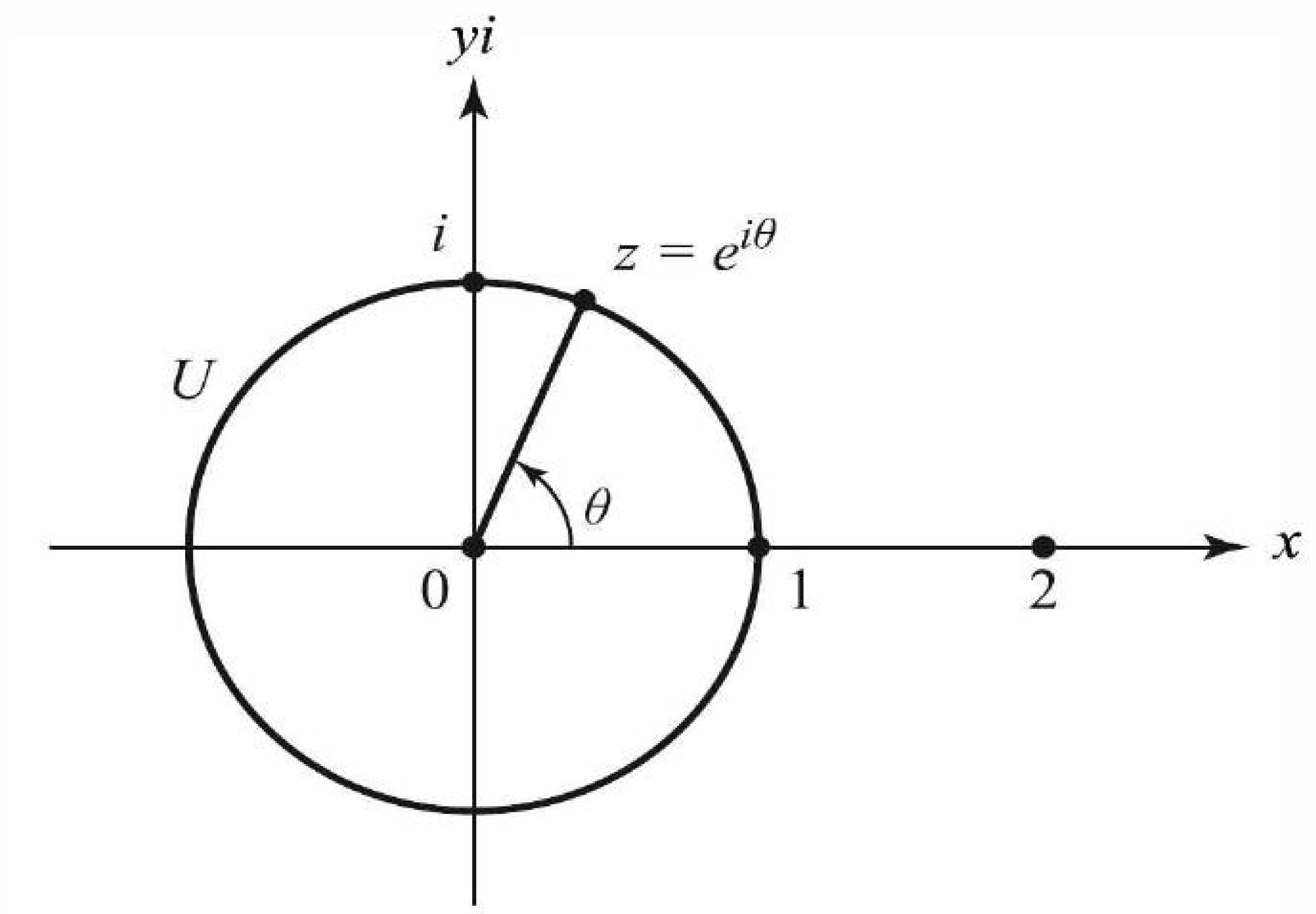
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{7}$$

الجبر على الدوائر

لتكن $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$، أي إن، U هي الدائرة في المستوى الإقليدي التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1، كما في الشكل 8.1. تبيّن العلاقة $|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$ أنّ حاصل ضرب عددين من U ينتمي إلى U؛ نقول إنّ U مغلقة بالنسبة إلى الضرب؛ لذلك يمكننا رؤية الضرب في U على أنه يعطي جبرًا على الدائرة في الشكل 8.1.

كما يتّضح في الشكل 8.1، نقرن بكل $z = \cos\theta + i\ \sin\theta$ من U عددًا حقيقيًّا $\theta \in \mathbb{R}$ يقع في الفترة نصف المفتوحة $0 \le \theta < 2\pi$. عادةً ما يرمز لهذه الفترة نصف المفتوحة بالرمز $[0,2\pi)$، لكننا نفضل أن نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}_{2\pi}$ لأسباب ستتّضح لاحقًا. تذكّر أنّ الزاوية المقرونة مع حاصل ضرب عددين مركبين $z_1 z_2$ هي مجموع الزاويتين المقرونتين $\theta_1 + \theta_2$. وبالطبع، إذا كان $\theta_1 + \theta_2 \ge 2\pi$ فإنّ الزاوية في $\mathbb{R}_{2\pi}$ المقرونة بـ $z_1 z_2$ هي $\theta_1 + \theta_2 - 2\pi$، هذا يعطينا **جمعًا مقياس** 2π **(addition modulo 2π)** على $\mathbb{R}_{2\pi}$. نرمز لهذا الجمع هنا بالرمز $+_{2\pi}$.



الشكل **8.1**

9.1 مثال في $\mathbb{R}_{2\pi}$، يكون $\frac{3\pi}{2} +_{2\pi} \frac{5\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{3\pi}{4}$ ▲

ليس هناك شيء مميز في العدد 2π مكّننا من تعريف الجمع على الفترة نصف المفتوحة $\mathbb{R}_{2\pi}$، فنحن نستطيع استخدام أيّ فترة نصف مفتوحة $\mathbb{R}_c = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < c\}$.

10.1 مثال في $\mathbb{R}_{23}$ ، يكون $16 +_{23} 19 = 35 - 23 = 12$. في $\mathbb{R}_{8.5}$ ، يكون $6 +_{8.5} 8 = 14 - 8.5 = 5.5$. ▲

الآن، ضرب الأعداد المركبة على الدائرة U ، حيث $|z| = 1$ والجمع مقياس 2π على $\mathbb{R}_{2\pi}$ لهما الخصائص الجبرية نفسها، فلدينا التقابل الطبيعي $z \leftrightarrow \theta$، بين $z \in U$ و $\theta \in \mathbb{R}_{2\pi}$ المشار إليه في الشكل 8.1. إضافة إلى ذلك، فقد عرفنا $+_{2\pi}$ قاصدين أن يكون:

إذا كان $z_1 \leftrightarrow \theta_1$ و $z_2 \leftrightarrow \theta_2$ ، فإنّ $z_1.z_2 \leftrightarrow (\theta_1 +_{2\pi} \theta_2)$. (تماثل) (8)

تبيّن العلاقة (8) أننا لو أعدنا تسمية كل $z \in U$ بـ θ المقابلة المبينة في الشكل 8.1، فإنّ حاصل ضرب عنصرين من U يعاد تسميته بمجموع زاويتي هذين العنصرين؛ لذلك، يجب أن يكون لـ U بالنسبة إلى ضرب الأعداد و $\mathbb{R}_{2\pi}$ بالنسبة إلى الجمع مقياس 2π الخصائص الجبرية نفسها، إنهما يختلفان فقط في أسماء العناصر وأسماء العمليات، حيث يسمّى مثل هذا التقابل الذي يحقق العلاقة (8) التماثل، أضف إلى ذلك أنّ أسماء العناصر وأسماء العمليات الثنائيّة ليست مهمة في الجبر المجرد؛ فنحن نهتم بالخصائص الجبرية. وسنوضّح ما نعني بقولنا: إنّ الصفات الجبرية لـ U ولـ $\mathbb{R}_{2\pi}$ هي ذاتها.

11.1 مثال في U، يوجد عنصر واحد بالضبط e، بحيث إنّ $e\,.\,z = z$ لكل $z \in U$ ، تحديدًا $e = 1$. العنصر 0 من $\mathbb{R}_{2\pi}$ المقابل لـ $1 \in U$ هو العنصر الوحيد e من $\mathbb{R}_{2\pi}$ بحيث إنّ $e +_{2\pi} x = x$ لكل $x \in \mathbb{R}_{2\pi}$ ▲

12.1 مثال للمعادلة $z.z.z.z = 1$ في U أربعة حلول بالضبط، تحديدًا $1, i, -1$، و $-i$. الآن، $1 \in U$ و $0 \in \mathbb{R}_{2\pi}$ متقابلان، وللمعادلة $x +_{2\pi} x +_{2\pi} x +_{2\pi} x = 0$ في $\mathbb{R}_{2\pi}$ أربعة حلول بالضبط، تحديدًا $0, \pi/2, \pi$ ، و $3\pi/2$ التي بالطبع تقابل $1, i, -1$ ، و $-i$ على التوالي. ▲

ولأنّ لدائرتنا U نصف قطر 1، فمحيطها 2π والقياس الدائري للزاوية θ يساوي طول القوس المواجه لها، فإذا تناولنا فترتنا نصف المفتوحة $\mathbb{R}_{2\pi}$ ، ووضعنا 0 من الفترة على 1 على المحور x، وثنيناها حول الدائرة U بعكس عقارب الساعة، فسوف تدور الطريق بالكامل عائدة إلى 1. إضافة إلى ذلك، فسينطبق كل عدد من الفترة على تلك النقطة من الدائرة التي تمثّل العدد الذي قيمته الزاوية المركزية θ المبينة في الشكل 8.1، وهذا يبين أنّ بإمكاننا التفكير في الجمع على $\mathbb{R}_{2\pi}$ كأنه يحسب بجمع أطوال الأقواس المواجهة بعكس عقارب الساعة، مبتدئين من $z = 1$، وطارحين 2π إذا ما وصل مجموع الأطوال 2π أو زاد عليها.

وإذا فكّرنا في الجمع على الدائرة بدلالة جمع أطوال أقواس من نقطة بداية P على الدائرة متجهين عكس عقارب الساعة، فيمكننا استخدام دائرة نصف قطرها 2 التي محيطها 4π، كما كان الحال مع الدائرة ذات نصف القطر 1. ويمكننا أخذ فترتنا نصف المفتوحة $\mathbb{R}_{4\pi}$ ولفّها بعكس عقارب الساعة بادئين من P، فعندها نرى أنها ستغطي الدائرة كاملة، حيث يعطينا جمع أطوال الأقواس مفهوم الجبر للنقاط على هذه الدائرة ذات نصف القطر2، الذي يماثل بالتأكيد $\mathbb{R}_{4\pi}$ بالنسبة إلى الجمع $+_{4\pi}$. من ناحية ثانية، إذا أخذنا دائرة $|z|=2$ في الشكل 8.1، فإنّ ضرب الأعداد المركبة لا يعطينا جبرًا على هذه الدائرة. تبين العلاقة $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$ أنّ حاصل ضرب عددين من مثل هذه الأعداد له القيمة المطلقة 4 وليس 2؛ لذلك، فضرب الأعداد المركبة ليس مغلقًا على هذه الدائرة.

تُظهر الفقرة السابقة أنّ قليلًا من الهندسة يمكن أن يساعد أحيانًا في الجبر المجرد، ويمكننا استخدام الهندسة لإقناع أنفسنا بأنّ $\mathbb{R}_{2\pi}$ و $\mathbb{R}_{4\pi}$ متماثلتان، فببساطة تتمدد الفترة $\mathbb{R}_{2\pi}$ بانتظام لتغطي الفترة $\mathbb{R}_{4\pi}$، أو إن كنت تفضل، استخدم مكبّرًا بقوة 2؛ لذلك نضع قاعدة التقابل $a \leftrightarrow 2a$ بين $a \in \mathbb{R}_{2\pi}$ و$2a \in \mathbb{R}_{4\pi}$. تصبح العلاقة (8) للتماثل:

إذا كان $a \leftrightarrow 2a$ و $b \leftrightarrow 2b$، فإنّ $(a +_{2\pi} b) \leftrightarrow (2a +_{4\pi} 2b)$ (تماثل) (9)

هذا واضح في الحالة $a+b \leq 2\pi$، فإذا كان $a+b=2\pi+c$، فإنّ $2a+2b=4\pi+2c$، ويصبح القرن النهائي في العلاقة المعروضة $c \leftrightarrow 2c$، وهو صحيح.

13.1 مثال $x +_{4\pi} x +_{4\pi} x +_{4\pi} x = 0$ في $\mathbb{R}_{4\pi}$ لها أربعة حلول بالضبط، تحديدًا $0, \pi, 2\pi$، و 3π وهي ضعفا الحلول المتوافرة للمعادلة المشابهة في $\mathbb{R}_{2\pi}$ في المثال 12.1. ▲

ليس هناك شيء مميز حول العددين 2π و 4π في النقاش السابق. بالتأكيد، $\mathbb{R}_c$ مع $+_c$ تماثل $\mathbb{R}_d$ مع $+_d$ لكل $c,d \in \mathbb{R}^+$. نحتاج فقط إلى أن نقرن $x \in \mathbb{R}_c$ بـ $(d/c)x \in \mathbb{R}_d$.

جذور الوحدة

تُسمّى عناصر المجموعة $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ **الجذور ذات الرتبة n للوحدة** (**nth roots of unity**).

وباستخدام تقنية المثالين 6.1 و 7.1، نرى أنّ العناصر في هذه المجموعة هي الأعداد

$$\cos\left(m\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(m\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{حيث} \quad m = 0,1,2,\dots,n-1.$$

جميعها له القيمة المطلقة 1؛ ولذلك، $U_n \subset U$. إذا جعلنا $\zeta = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$، فإنّ هذه الجذور ذات الرتبة n للوحدة يمكن أن تكتب بوصفها:

$$1 = \zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \dots, \zeta^{n-1}. \tag{10}$$

لأن $\zeta^n = 1$، هذه الـ n قوى لـ ζ مغلقة بالنسبة إلى الضرب، فمثلًا مع $n = 10$ يكون

$$\zeta^6\zeta^8 = \zeta^{14} = \zeta^{10}\zeta^4 = 1.\zeta^4 = \zeta^4.$$

لذلك، نرى أننا نستطيع حساب $\zeta^i\zeta^j$ بحساب $i +_n j$ معتبرين i و j عناصر في $\mathbb{R}_n$.

ليكن $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,3,\dots,n-1\}$. نرى أنّ $\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{R}_n$. ومن الواضح أن الجمع مقياس n مغلق على $\mathbb{Z}_n$.

مثال 14.1 حلّ المعادلة $x + 5 = 3$ في $\mathbb{Z}_8$ هو $x = 6$؛ لأن $5 +_8 6 = 11 - 8 = 3$. ▲

إذا أعدنا تسمية كلٍّ من الجذور ذات الرتبة n للوحدة في (10) بأُسّها، فسنستخدم كأسماءِ عناصر $\mathbb{Z}_n$ كلها، وهذا يعطي التقابل بين U_n و $\mathbb{Z}_n$. بوضوح،

إذا كان $\zeta^i \leftrightarrow i$ و $\zeta^j \leftrightarrow j$، فإنّ $(\zeta^i . \zeta^j) \leftrightarrow (i +_n j)$ (تماثل) (11)

لذلك، U_n مع ضرب الأعداد المركبة و $\mathbb{Z}_n$ مع الجمع $+_n$ لهما الخصائص الجبرية نفسها.

مثال 15.1 يمكن بيان وجود تماثل لـ U_8 مع $\mathbb{Z}_8$ فيه $\zeta = e^{i2\pi/8} \leftrightarrow 5$، ووفق هذا التماثل يجب أن يكون $\zeta^2 = \zeta.\zeta \leftrightarrow 5 +_8 5 = 2$. ▲

يطلب منك التمرين 35 مواصلة الحسابات في المثال 15.1 لإيجاد عناصر $\mathbb{Z}_8$ التي تقابل العناصر الستة المتبقية من U_8.

تمارين 1

في التمارين من 1 إلى 9، احسب التعبير الحسابي المعطى، وأعطِ الجواب بالصيغة $a + bi$ لـ $a,b \in \mathbb{R}$.

.1 i^3 **.2** i^4 **.3** i^{23}

.4 $(-i)^{35}$ **.5** $(4-i)(5+3i)$ **.6** $(8+2i)(3-i)$

.7 $(2-3i)(4+i)+(6-5i)$ **.8** $(1+i)^3$ **.9** $(1-i)^5$(استخدم مبرهنة ذات الحدين)

.10 جد $|3-4i|$ **.11** جد $|6+4i|$

في التمارين من 12 إلى 15، اكتب العدد المركب المعطى z بالصيغة القطبية $|z|(p+qi)$، حيث $|p+qi|=1$

.12 $3-4i$ **.13** $-1+i$ **.14** $12+5i$ **.15** $-3+5i$

في التمارين من 16 إلى 21، أوجد جميع الحلول في $\mathbb{C}$ للمعادلة المعطاة.

.16 $z^4=1$ **.17** $z^4=-1$ **.18** $z^3=-8$ **.19** $z^3=-27i$

.20 $z^6=1$ **.21** $z^6=-64$

في التمارين من 22 إلى 27، احسب التعبير المعطى مستخدمًا الجمع للمقياس المشار إليه.

.22 $16 +_{17} 10$ **.23** $6 +_{10} 8$ **.24** $19.3 +_{25} 20.5$

.25 $\frac{7}{8} +_1 \frac{1}{2}$ **.26** $\frac{3\pi}{2} +_{2\pi} \frac{3\pi}{4}$ **.27** $3\sqrt{2} +_{\sqrt{32}} 2\sqrt{2}$

.28 وضّح لماذا نقول: إنّ التعبير $5 +_6 8$ في $\mathbb{R}_6$ غير معقول.

في التمارين من 29 إلى 34، أوجد جميع الحلول x للمعادلة المعطاة.

.29 $x +_{15} 7 = 3$ في $\mathbb{Z}_{15}$. **.30** $x +_{2\pi} \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ في $\mathbb{R}_{2\pi}$.

.31 $x +_7 x = 3$ في $\mathbb{Z}_7$. **.32** $x +_7 x +_7 x = 5$ في $\mathbb{Z}_7$.

.33 $x +_{12} x = 2$ في $\mathbb{Z}_{12}$. **.34** $x +_4 x +_4 x +_4 x = 0$ في $\mathbb{Z}_4$.

.35 يؤكد المثال 15.1 وجود تماثل لـ U_8 مع $\mathbb{Z}_8$ فيه $\zeta = e^{i(\pi/4)} \leftrightarrow 5$ و $\zeta^2 \leftrightarrow 2$.

أوجد العنصر من $\mathbb{Z}_8$ الذي يقابل العنصر ζ^m من العناصر الستة الباقية من U_8 لـ $m = 0,3,4,5,6,7$.

.36 هناك تماثل لـ U_7 مع $\mathbb{Z}_7$ فيه $\zeta = e^{i(2\pi/7)} \leftrightarrow 4$. أوجد العنصر من $\mathbb{Z}_7$ الذي يجب أن يقابله ζ^m لـ $m = 0,2,3,4,5,6$.

.37 لماذا لا يمكن أن يوجد تماثل لـ U_6 مع $\mathbb{Z}_6$ فيه $\zeta = e^{i(\pi/3)}$ تقابل 4؟

.38 اشتق الصيغتين الآتيتين باستخدام صيغة أويلر وحساب $e^{ia}e^{ib}$:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

و

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

39. ليكن $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)$ و $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)$. استخدم المتطابقات المثلثية في التمرين 38 لاشتقاق $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$.

40. أ. اشتق صيغة لـ $\cos 3\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$ مستخدمًا صيغة أويلر.

ب. اشتق الصيغة $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ من الفرع (أ) والمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. (سنجد استخدامًا لهذه المتطابقة في الفصل 32).

41. تذّكر من حساب التفاضل مفكوك متسلسلات القوى:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$ ،

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$ ، و

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

اشتق صيغة أويلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$ منهجيًّا من هذه الصيغ الثلاث.

الفصل 2 العمليات الثنائية Binary Operations

افترض أننا زوّار لحضارة غريبة في عالم غريب، ونراقب أحد المخلوقات في هذا العالم يعلّم رفقاءه في صفّ جمْعَ الأعداد، وافترض أننا لم نُخْبَر بأن الصفَّ يتعلم الجمع، وإنما أُجْلِسنا في القاعة على هيئة مراقبين لما يجري، وطُلب إلينا أن نعطي تقريرًا عمّا يجري تمامًا. المعلم يصدر أصواتًا تبدو لنا على نحو: جلوب، بويت، فيردّ الصفُّ: بمت، ثم يقول المعلم: أمبت، جافت، فيردّ الصفُّ: بويت. ماذا يفعل هؤلاء؟ لا نستطيع أن نحكم أنهم يجمعون أعدادًا؛ لأننا أصلاً لا نعلم أنّ هذه الأصوات تمثل أعدادًا، لكننا ندرك بالطبع أن هناك تواصلًا ما يجري، وكل ما يمكننا قوله بشيء من الجزم: إنّ هذه المخلوقات تعرف قاعدة ما، فعندما يُذكر بلُغتهم زوج من الأشياء، واحدًا تلو الآخر، مثل جلوب، بويت، فإنهم يجمعون على ردٍّ، بمت. يحدث هذا الإجراء نفسه عند تعليم الجمع في صفّنا الأول، حيث يقول المعلم: أربعة، سبعة، فيرد الصفُّ: أحد عشر.

لذلك نُقاد في محاولتنا لتحليل جمع الأعداد وضربها إلى فكرة مفادها أنّ الجمع أساسًا مجرد قاعدة يتعلمها الناس، تمكّنهم من ربط عدد ما بوصفه جوابًا لعددين بترتيب معطًى، كذلك الضرب قاعدة كهذه، لكنّها مختلفة. لاحظ أخيرًا أنه عند إجراء هذا النوع من التعلم مع التلاميذ، فعلى المعلمين أن يكونوا منتبهين قليلًا للشيئين اللذين يعطوهما للصف، فلو أدخل معلم الصفّ الأول فجأة كلمتي عشرة، سماء، لارتبك الصفّ ارتباكًا شديدًا؛ لأن القاعدة معرّفة فقط لأزواج أشياء من مجموعة محددة.

تعريفات وأمثلة

لنحاول نحن الرياضيين صياغة جوهر هذه الأفكار في تعريف مفيد، معمّمين مفهوم جمع الأعداد وضربها. كما نوّهنا في الفصل 0، لن نحاول هنا تعريف المجموعة، إذ يمكننا أن نكون إلى حدّ ما دقيقين رياضيًّا، ونَصف تعميماتنا بوصفها دوالّ (انظر التعريف 10.0 والمثال 11.0) وليس بوصفها قواعد، وتذَكّر من التعريف 4.0 أنه لأيّ مجموعة S، تتكوّن المجموعة $S \times S$ من جميع الأزواج المرتبة (a,b) حيث a وb تنتمي إلى S.

1.2 تعريف العملية الثنائيّة (**binary operation**) $*$ على مجموعة S هي دالّة من $S \times S$ إلى S. لكل $(a,b) \in S \times S$، سنرمز للعنصر $*((a,b))$ من S بِـ $a*b$. ■

يمكننا بدهيًّا أن نعدّ العملية الثنائيّة $*$ على S تقرن بكل زوج مرتب (a,b) من عناصر S عنصرًا $a*b$ من S. سنواصل بأمثلة.

2.2 مثال جمعُنا المعتاد $+$ هو عملية ثنائيّة على المجموعة $\mathbb{R}$، وضربُنا المعتاد هو عملية ثنائيّة مختلفة على $\mathbb{R}$، ويمكننا في هذا المثال، استبدال أيٍّ من المجموعات $\mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+$، أو $\mathbb{Z}^+$ بِـ $\mathbb{R}$. ▲

لاحظ أننا نشترط في العملية الثنائيّة على مجموعة S أن تكون معرّفة لكل زوج مرتب (a,b) من عناصر S.

3.2 مثال لتكن $M(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات[1] كلها بمدخلات حقيقية، إن جمع المصفوفات المعتاد $+$ ليس عملية ثنائيّة على هذه المجموعة؛ لأن $A+B$ غير معرّف لزوج مرتب (A,B) من مصفوفات لها عدد مختلف من الصفوف أو الأعمدة. ▲

---

(1) معظم طلاب مقرر الجبر المجرد درسوا الجبر الخطي، وأصبحوا معتادين على المصفوفات وعملياتها، ولفائدة هؤلاء الطلاب، غالبًا تُعطى أمثلة تشمل مصفوفات. يمكن للقارئ غير المعتاد على المصفوفات إمّا أن يُسقطها أو أن يذهب إلى الملحق في آخر الكتاب، حيث يتوافر ملخص قصير.

تنتج العملية الثنائيّة على S أحيانًا عملية ثنائيّة على مجموعة جزئيّة H من S أيضًا. نحن هنا نصوغ تعريفًا منهجيًا.

4.2 تعريف لتكن * عملية ثنائيّة على S، ولتكن H مجموعة جزئيّة من S، فالمجموعة الجزئيّة H **مغلقة بالنسبة إلى *** (**closed under***)، إذا كان لكل $a,b \in H$، لدينا أيضًا $a*b \in H$. في هذه الحالة، العملية الثنائيّة على H المعطاة باقتصار * على H هي **العملية المتولّدة** (**induced operation**) من * على H. ■

ومن تعريفنا نفسه للعملية الثنائيّة * على S، فالمجموعة S مغلقة بالنسبة إلى *، لكن مجموعة جزئيّة ربّما لا تكون كذلك، كما يبين المثال الآتي:

5.2 مثال إن جمعنا المعتاد + على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لا يولّد عملية ثنائيّة على مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية $\mathbb{R}^*$؛ لأن $2 \in \mathbb{R}^*$ و $-2 \in \mathbb{R}^*$، لكن $2+(-2)=0$ و $0 \notin \mathbb{R}^*$. لذلك $\mathbb{R}^*$ ليست مغلقة بالنسبة إلى *. ▲

ستتكرر حاجتنا في كتابنا إلى تحديد ما إذا كانت مجموعة جزئيّة H من S مغلقة بالنسبة إلى عملية ثنائيّة * على S، وللوصول إلى استنتاج صحيح، علينا أن نعرف معنى انتماء عنصر إلى H، وأن نستخدم هذه الحقيقة. وهذه المشكلة التي يعانيها الطلبة. والآن تأكّد أنك تفهم المثال الآتي:

6.2 مثال لتكن + و . عمليتي الجمع والضرب المعتادتين على المجموعة $\mathbb{Z}$، ولتكن $H=\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. حدد ما إذا كانت H مغلقة بالنسبة إلى (أ) الجمع و (ب) الضرب.

نحتاج في الفرع (أ) فقط إلى ملاحظة أنّ $1^2=1$ و $2^2=4$ من H، لكن $1+4=5$ و $5 \notin H$؛ ولذلك، H ليست مغلقة بالنسبة إلى الجمع.

وللفرع (ب)، افترض أنّ $r \in H$ و $s \in H$. باستخدام ما يعنيه أنّ r و s من H، نرى أنه لا بدّ من وجود عددين صحيحين n و m من $\mathbb{Z}^+$، بحيث إنّ $r=n^2$ و $s=m^2$. وعليه، $rs=n^2m^2=(nm)^2$، وباستخدام وصف العناصر في H وحقيقية أنّ $nm \in \mathbb{Z}^+$، ينتج أنّ $rs \in H$، وعليه، تكون H مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب. ▲

7.2 مثال لتكن F مجموعة جميع الدوالّ f ذوات القيم الحقيقية التي مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. تعودنا من التفاضل والتكامل على التعامل مع العمليات الثنائيّة $-,+,\circ$ على F.

تحديدًا، لكل زوج مرتب (f,g) من الدوالّ في F، نعرِّف لكل $x \in \mathbb{R}$

$f+g$ بـ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ الجمع،

$f-g$ بـ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ الطرح،

$f.g$ بـ $(f.g)(x)=f(x)g(x)$ الضرب،

و

$f \circ g$ بـ $(f \circ g)(x)=f(g(x))$ التركيب.

إن هذه الدوالّ الأربع جميعها أيضًا، حقيقية القيمة ومجالها $\mathbb{R}$؛ لذلك، F مغلقة بالنسبة إلى العمليات الأربع كلها $-,+,.$ و $\circ$. ▲

العمليات الثنائيّة الموصوفة في الأمثلة أعلاه مألوفة جدًّا للقارئ، وفي هذا الكتاب، نريد أن نجرّد من جبرنا المألوف مفاهيم تركيبية أساسية، ولتأكيد مفهوم التجريد من المألوف، سوف نوضح المفاهيم التركيبية بأمثلة غير مألوفة، فقد قدمنا في الفصل (1) العمليات الثنائيّة: ضرب الأعداد المركبة على U و U_n، الجمع $+_n$ على $\mathbb{Z}_n$، والجمع $+_c$ على $\mathbb{R}_c$.

إنَّ أهم طريقة لوصف عملية ثنائيّة خاصة * على مجموعة معطاة هي وصف العنصر $a*b$ المقرون بكل زوج مرتب (a,b) بخاصية معرّفة بدلالة a و b.

8.2 مثال على $\mathbb{Z}^+$، نعرِّف العملية الثنائيّة * بـ $a*b$ تساوي أصغر a و b، أو القيمة المشتركة إذا كان $a=b$؛ لذلك، $2*11=2$؛ $15*10=10$ و $3*3=3$ ▲

9.2 مثال على $\mathbb{Z}^+$، نعرّف العملية الثنائيّة $*'$ بـ $a*'b = a$؛ لذلك، $25*'10 = 25$، $2*'3 = 2$، و $5*'5=5$. ▲

10.2 مثال على $\mathbb{Z}^+$، نعرّف العملية الثنائيّة $*''$ بـ $a*''b=(a*b)+2$، حيث إنّ * معرّفة في المثال (8.2)؛ لذلك، $4*''7=6$، $25*''9=11$، و $6*''6=8$. ▲

ربما يبدو أنّ هذه الأمثلة عديمة الأهمية، لكن تأمّل لحظة، افترض أننا ذهبنا إلى متجر لشراء قطعة شوكولاته شهية كبيرة، وأننا رأينا هناك قطعتين متطابقتين إلى جانب بعضهما، غلاف إحداهما مسعّر بـ 1.67$ وغلاف الأخرى مسعّر بـ 1.79$ نلتقط – بالطبع – تلك المسعّرة بـ 1.67$، ومعرفتنا أيهما نريد تعتمد على حقيقية أننا تعلمنا العملية * في المثال 8.2 في وقت ما. إنها عملية مهمّة جدًّا. وبالمثل، العملية الثنائيّة $*'$ في المثال 9.2 عُرّفت باستخدام قدرتنا على تمييز الترتيب. فكّر في المشكلة التي سنواجهها إذا لبسنا أحذيتنا أولًا، ثمّ جواربنا! لذلك يتعين ألا نكون متسرّعين في صرف النظر عن بعض العمليات الثنائيّة؛ لأنها قليلة الأهمية، بالطبع، عملياتنا المعتادة لجمع الأعداد وضربها لها أهمية تطبيقية معروفة لنا.

اختير المثالان 8.2 و9.2 ليُظهرا بوضوح أنّ العملية الثنائية يمكن أن تعتمد أو لا تعتمد على ترتيب الزوج المعطى، ففي المثال 8.2، $a*b=b*a$ لكل $a,b\in\mathbb{Z}^+$، وليس هذا هو الحال في المثال 9.2؛ لأنّ $5*'7=5$ لكن $7*'5=7$.

11.2 تعريف العملية الثنائيّة * على مجموعة S إبداليّة (**commutative**)، إذا (وفقط إذا) كان $a*b=b*a$ لكل $a,b\in S$. ■

كما أُكِّد في الفصل 0، فمن المألوف في الرياضيات حذف الكلمتين (وفقط إذا) من التعريف. وتفهم التعاريف دائمًا على أنها عبارة إذا وفقط إذا، فالمبرهنات ليست دائمًا عبارات إذا وفقط إذا، ولا يستخدم أبدًا مثل هذا العرف للمبرهنات.

افترض الآن أننا نرغب في دراسة تعبير على الصورة $a*b*c$، تُمَكِّننا العملية الثنائيّة* من ربط عنصرين فقط، وهنا لدينا ثلاثة عناصر، والمحاولات الواضحة لربط العناصر الثلاثة هي بتشكيل إمّا $(a*b)*c$ أو $a*(b*c)$. مع * المعرّفة في المثال 8.2، يحسب $(2*5)*9$ كما يأتي: $2*5=2$، ثمّ $2*9=2$. وبالمثل، يحسب $2*(5*9)$ بـ $5*9=5$، ثمّ $2*5=2$؛ لذلك، $(2*5)*9=2*(5*9)$، وليس صعبًا رؤية أنّ لهذه العملية *:

$$(a*b)*c=a*(b*c)،$$

وعليه، فلا التباس في كتابة $a*b*c$، لكن لِـ $*''$ في المثال 10.2،

$$(2*''5)*''9=4*''9=6،$$

في حين

$$2*''(5*''9)=2*''7=4$$

لهذا $(a*''b)*''c$ ليس بالضرورة مساويًا لِـ $a*''(b*''c)$، ويمكن أن يحصل التباس في التعبير $a*''b*''c$.

12.2 تعريف تكون العملية الثنائيّة على مجموعة S تجميعيّة **(associative)**، إذا كان

$$(a*b)*c=a*(b*c) \text{ لكل } a,b,c\in S.$$ ■

ويمكن إثبات أنه إذا كانت * تجميعيّة، فإن تعابير أطول مثل $a*b*c*d$ لا لبس فيها، ويمكن كذلك إدخال الأقواس بأي طريقة لغايات الحساب، فالنتيجة النهائية لاثنتين من مثل هذه الحسابات ستكون نفسها.

تمّت مراجعة تركيب الدوالّ من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ في المثال 7.2، ولأي مجموعة S وأيّ دالّتين f و g من S إلى S، نعرّف بصورة مشابهة التركيب لِـ g متبوعًا بـ f، $f\circ g$ بأنه الدالّة من S إلى S، بحيث إن $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ لكل $x\in S$، يُضاف إلى ذلك أنّ بعض العمليات الثنائيّة الأكثر أهمية التي ندرسها تُعرَّف باستخدام تركيب الدوالّ، ومن المهم معرفة أن هذا التركيب تجميعيّ دائمًا طالما كان معرّفًا.

13.2 مبرهنة (تجميعيّة التركيب): لتكن S مجموعة، ولتكن f، وg، و h دوالّ من S إلى S، عندئذٍ يكون: $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

البرهان لبيان تساوي هاتين الدالّتين، علينا إثبات أنهما تعطيان النتيجة نفسها لكل $x\in S$. بالحساب نجد أنّ:

$$\big(f\circ(g\circ h)\big)(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x)))$$

و

$$\big((f\circ g)\circ h\big)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$$

وعليه، يُحصل بالفعل على العنصر نفسه $f(g(h(x)))$ من S. ◆

ومثالًا على استخدام المبرهنة 13.2 لتوفير الجهد، تذكّر أنّ إثبات أنّ ضرب المصفوفات ذات الدرجة $n \times n$ عملية ثنائيّة تجميعيّة باستخدام رمز المجموع هو تمرين مضن إلى حدٍّ ما، وإذا أثبتنا أولًا – في مقرر للجبر الخطي– أنّ هناك تقابلًا بين المصفوفات والتحويلات الخطية، وأنّ ضرب المصفوفات يقابل تركيب التحويلات الخطية (الدوال)، نحصل على هذه التجميعيّة على الفور من المبرهنة 13.2.

جداول

لمجموعة منتهية، يمكن تعريف العملية الثنائيّة على المجموعة من خلال جدول تسرد في أعلاه عناصر المجموعة بوصفها رؤوسًا للأعمدة وفي جانبه الأيسر بوصفها رؤوسًا للصفوف. نشترط دائمًا أن تُسرد العناصر بوصفها رؤوسًا في الأعلى بالترتيب نفسه الذي سُردت فيه بوصفها رؤوسًا نزولًا في الجانب الأيسر. المثال الآتي يوضّح استخدام جدول لتعريف عملية ثنائيّة.

14.2 مثال

يعرّف الجدول 15.2 العملية الثنائيّة * على $S = \{a,b,c\}$ بالقاعدة الآتية :

(المدخل ذو الترتيب i على اليسار) * (المدخل ذو الترتيب j في الأعلى)

= (العنصر في الصف i والعمود j من جسم الجدول).

الجدول 15.2

*	a	b	c
a	b	c	b
b	a	c	b
c	c	b	a

لذلك $a * b = c$ و $b * a = a$، وعليه * ليست إبداليّة. ▲

يمكننا أن نرى بسهولة أنّ العملية الثنائيّة المعرّفة بجدول تكون إبداليّة إذا وفقط إذا كانت المدخلات في الجدول متماثلة بالنسبة إلى القطر الذي يبدأ من الزاوية العليا اليسرى من الجدول، وينتهي بالزاوية السفلى اليمنى.

16.2 مثال

أكمل الجدول 17.2 بحيث تكون * عملية ثنائيّة إبداليّة على المجموعة $S = \{a,b,c,d\}$.

الحل

من الجدول 17.2، نرى أنّ $b * a = d$. لكي تكون * إبداليّة، يجب أن يكون لدينا $a * b = d$ كذلك. لهذا نضع d في المربع المناسب الذي يعرّف $a * b$، والذي يقع بتماثل للمربع الذي يعرّف $b * a$ عبر القطر في الجدول 18.2، وبهذه الطريقة نحصل على ما تبقى من الجدول 18.2 لتقديم حلنا. ▲

الجدول 17.2

*	a	b	c	d
a	b			
b	d	a		
c	a	c	d	
d	a	b	b	c

الجدول 18.2

*	a	b	c	d
a	b	d	a	a
b	d	a	c	b
c	a	c	d	b
d	a	b	b	c

بعض كلمات التحذير

بينت الخبرة الصفيّة الفوضى التي يمكن أن تحدث إذا ما أعطي الطالب مجموعة، وطلب منه تعريف عملية ثنائيّة ما عليها. تذكر أنه في محاولة تعريف عملية ثنائيّة * على مجموعة S يجب أن نكون متأكدين من:

1. عنصر واحد بالضبط يقرن بكل زوج مرتّب ممكن من عناصر S.

2. لكل زوج مرتب من عناصر S، العنصر المقرون به هو أيضًا من S.

فيما يتعلق بالشرط 1، يحاول الطالب عادةً قرن عنصر من S "بمعظم" الأزواج المرتبة، لكن لبعض الأزواج لا يحدد أي عنصر، وعند حدوث ذلك، تكون * **ليست دائمًا معرّفة (not everywhere defined)** على S. يمكن أن يحدث أيضًا أنه لبعض الأزواج، قد تقرنه المحاولة بأكثر من عنصر من عناصر S، أي إنّ هناك التباسًا، ففي أي حالة التباس، تكون * **ليست حسنة التعريف (not well defined)**، وإذا لم يتحقّق الشرط 2، فإنّ S **ليست مغلقة بالنسبة إلى * (not closed under *)**.

فيما يأتي توضيحات عدة لمحاولات تعريف عمليات ثنائيّة على مجموعات، بعضها عديم القيمة. استخدم الرمز * للعملية المجرّبة في كل هذه الأمثلة.

مثال 19.2 على $\mathbb{Q}$، لتكن $a*b = a/b$. هنا * ليست دائمًا معرّفة على $\mathbb{Q}$؛ لأنه لا يُقرن بحسب هذه القاعدة أي عدد نسبيّ بالزوج $(2,0)$. ▲

مثال 20.2 على $\mathbb{Q}^+$، لتكن $a*b = a/b$. هنا كلا الشرطين 1 و 2 متحقّقان، و * عملية ثنائيّة على $\mathbb{Q}^+$. ▲

مثال 21.2 على $\mathbb{Z}^+$، لتكن $a*b = a/b$. هنا يفشل الشرط 2؛ لأن $1*3$ ليس من $\mathbb{Z}^+$؛ لذلك، * ليست عملية ثنائيّة على $\mathbb{Z}^+$؛ لأن $\mathbb{Z}^+$ ليست مغلقة بالنسبة إلى *. ▲

مثال 22.2 لتكن F مجموعة كل الدوالّ ذوات القيم الحقيقية ذات المجال $\mathbb{R}$ كما في المثال 7.2. افترض أننا "عرّفنا" * لتعطي القسمة المعتادة لـ f على g، أي إنّ $f*g=h$، حيث $h(x) = f(x)/g(x)$. هنا لا يتحقق الشرط 2؛ لأن الدوالّ في F يُفترض أن تكون معرَّفة للأعداد الحقيقية كلها، ولبعض $g\in F$ ستكون $g(x)$ صفرًا لبعض قيم x من $\mathbb{R}$ ولن تكون $h(x)$ معرَّفة عند هذه الأعداد من $\mathbb{R}$، فمثلاً: إذا كان $f(x)=\cos x$ و $g(x)=x^2$، فإنّ $h(0)$ غير معرّف، وعليه $h\notin F$. ▲

مثال 23.2 لتكن F كما في المثال 22.2، ولتكن $f*g=h$، حيث h هي الدالّة الأكبر من كلا f و g. هذا "التعريف" عديم الأهمية تمامًا. بدايةً، لم نعرف ما معنى أن تكون دالّة أكبر من أخرى. حتى لو عرّفنا، فأي تعريف معقول سينتج منه أنّ هناك الكثير من الدوالّ أكبر من كلا f و g، وستبقى * ليست حسنة التعريف. ▲

مثال 24.2 لتكن S مجموعة مكوَّنة من 20 شخصًا، وليس منهم اثنان لهما الطول نفسه. عرّف * بـ $a*b=c$، حيث c أطول شخص ضمن ألـ 20 من S. هذه عملية ثنائيّة جيدة تمامًا على المجموعة، على الرغم من أنها ليست على وجه الخصوص عملية مشوقة. ▲

مثال 25.2 لتكن S كما في المثال 24.2، ولتكن $a*b=c$، حيث c أقصر شخص في S أطول من كلا a و b. هذه العملية * ليست دائمًا معرّفة؛ لأنه إذا كان a أو b الشخص الأطول في المجموعة، تكون $a*b$ غير معينة. ▲

تمارين 2

حسابات

التمارين من 1 إلى 4 تتعلق بالعملية الثنائيّة * المعرّفة على $S=\{a,b,c,d,e\}$ من خلال الجدول 26.2

1. احسب $b*d$، $c*c$، و $[(a*c)*e]*a$.

2. احسب $(a*b)*c$ و $a*(b*c)$. هل يمكنك القول بناءً على هذه الحسابات ما إذا كانت * تجميعيّة؟

3. احسب $(b*d)*c$ و $b*(d*c)$. هل يمكنك القول بناءً على هذه الحسابات ما إذا كانت * تجميعيّة؟

الجدول 26.2

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

الجدول 27.2

*	a	b	c	d
a	a	b	c	
b	b	d		c
c	c	a	d	b
d	d			a

الجدول 28.2

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d				

4. هل * إبداليّة؟ لماذا؟

5. أكمل الجدول 27.2 لتعرّف عملية ثنائيّة إبداليّة * على $S=\{a,b,c,d\}$.

6. يمكن إكمال الجدول 28.2 لتعريف عملية ثنائيّة تجميعيّة * على $S=\{a,b,c,d\}$. افترض أنّ هذا ممكن، واحسب المدخلات المفقودة.

في التمارين من 7 إلى 11، حدد ما إذا كانت العملية الثنائيّة المعرّفة * إبداليّة، وما إذا كانت * تجميعيّة.

7. * المعرّفة على $\mathbb{Z}$ بالقاعدة $a*b=a-b$

8. * المعرّفة على $\mathbb{Q}$ بالقاعدة $a*b=ab+1$

9. * المعرّفة على $\mathbb{Q}$ بالقاعدة $a*b=ab/2$

10. * المعرّفة على $\mathbb{Z}^+$ بالقاعدة $a*b=2^{ab}$

11. *المعرّفة على $\mathbb{Z}^+$ بالقاعدة $a*b=a^b$

12. لتكن S مجموعة فيها عنصر واحد بالضبط. كم عملية ثنائيّة مختلفة يمكن تعريفها على S؟ أجب عن السؤال إذا كانت S فيها عنصران بالضبط، ثلاثة عناصر بالضبط، n عنصرًا بالضبط.

13. كم عملية ثنائيّة إبداليّة مختلفة يمكن تعريفها على مجموعة من عنصرين؟ على مجموعة من 3 عناصر؟ على مجموعة من n عنصرًا؟

مفاهيم

في التمارين من 14 إلى 16، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

14. العملية الثنائيّة * إبدالّية، إذا وفقط إذا كان $a*b=b*a$.

15. العملية الثنائيّة * على مجموعة S تجميعيّة، إذا وفقط إذا كان لكل $a,b,c\in S$، يكون لدينا $(b*c)*a=b*(c*a)$.

16. المجموعة الجزئيّة H من مجموعة S مغلقة بالنسبة إلى عملية ثنائيّة * على S، إذا وفقط إذا كان $(a*b)\in H$ لكل $a,b\in S$.

في التمارين من 17 إلى 22، حدد ما إذا كان تعريف * يعطي فعلًا عملية ثنائيّة على المجموعة.

في حالة أنّ * ليست عملية ثنائيّة، قرّر ما إذا كان الشرط 1، أو الشرط 2، أو كلا هذين الشرطين في الصفحة 24 لم يتحقّق.

17. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=a-b$.

18. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف* بالقاعدة $a*b=a^b$.

19. على $\mathbb{R}$، عرّف * بالقاعدة $a*b=a-b$.

20. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=c$، حيث c هي أصغر عدد صحيح أكبر من a و b كليهما.

21. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=c$، حيث c هي أكثر من $a+b$ على الأقل بـ 5.

22. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=c$ ، حيث c هي أكبر عدد صحيح أقل من حاصل ضرب a و b.

23. لتكن H المجموعة الجزئيّة من $M_2(\mathbb{R})$ المكوّنة من جميع المصفوفات التي على الصورة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، حيث $a,b\in\mathbb{R}$.
هل H مغلقة بالنسبة إلى:

أ. جمع المصفوفات؟ ب. ضرب المصفوفات؟

24. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

_____ أ. إذا كانت * أيّ عملية ثنائيّة على أيّ مجموعة S، فإنّ $a*a=a$ لكل $a\in S$.

_____ ب. إذا كانت * أيّ عملية ثنائيّة إبداليّة على أيّ مجموعة S، فإنّ $a*(b*c)=(b*c)*a$ لكل $a,b,c\in S$.

_____ جـ. إذا كانت * أيّ عملية ثنائيّة تجميعيّة على أيّ مجموعة S، فإنّ $a*(b*c)=(b*c)*a$ لكل $a,b,c\in S$.

_____ د. العمليات الثنائيّة الوحيدة التي لها أهمية ما، هي تلك المعرّفة على مجموعات أعداد.

_____ هـ. العملية الثنائيّة * على مجموعة S إبداليّة، إذا وجد $a,b\in S$ بحيث إنّ: $a*b=b*a$.

_____ و. كل عملية ثنائيّة معرّفة على مجموعة فيها عنصر واحد بالضبط تكون إبداليّة وتجميعيّة.

_____ ز. العملية الثنائيّة على S تقرن على الأقل عنصرًا واحدًا من S بكل زوج مرتّب من عناصر S.

_____ ح. العملية الثنائيّة على S تقرن على الأكثر عنصرًا واحدًا من S بكل زوج مرتّب من عناصر S.

_____ ط. العملية الثنائيّة على S تقرن عنصرًا واحدًا بالضبط من S بكل زوج مرتّب من عناصر S.

_____ ي. العملية الثنائيّة على S يمكن أن تقرن أكثر من عنصر من S بزوجٍ مرتّب ما من عناصر S.

25. أعطِ مجموعة تختلف عن تلك المجموعات الموصوفة في الكتاب، وليست مجموعة أعداد. عرّف عمليتين ثنائيّتين * و '* على هذه المجموعة. تأكد أنّ مجموعتك حسنة التعريف.

براهين

26. برهن أنه إذا كانت * عملية ثنائيّة تجميعيّة وإبداليّة على مجموعة S، فإنّ:

$$(a*b)*(c*d)=[(d*c)*a]*b$$

لكل $a,b,c,d\in S$. افترض قانون التجميع فقط لثلاثيات كما في التعريف، أي افترض فقط أنّ:

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

لكل $x,y,z\in S$.

في التمرينين 27 و 28، برهن العبارة أو أعطِ مثالًا مناقضًا.

27. كل عملية ثنائيّة على مجموعة مكوّنة من عنصر واحد هي إبداليّة وتجميعيّة.

28. كل عملية ثنائيّة إبداليّة على مجموعة مكوّنة من عنصرين تمامًا هي تجميعيّة.

لتكن F مجموعة جميع الدوالّ ذوات القيم الحقيقية التي مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. عرّف المثال 7.2 العمليات الثنائيّة $+, -, \cdot$ و $\circ$ على F. في التمارين من 29 إلى 35، برهن العبارة المعطاة أو أعطِ مثالًا مناقضًا.

29. جمع الدوالّ + على F تجميعيّ.

30. طرح الدوالّ − على F إبداليّ.

31. طرح الدوالّ − على F تجميعيّ.

32. ضرب الدوالّ . على F إبداليّ.

33. ضرب الدوالّ . على F تجميعيّ.

34. تركيب الدوالّ $\circ$ على F إبداليّ.

35. إذا كانت * و *' أي عمليتين ثنائيّتين على مجموعة S، فإنّ:

$$a*\left(b*'c\right)=(a*b)*'(a*c) \quad \text{لكل} \quad a,b,c\in S$$

36. افترض أنّ * عملية ثنائيّة تجميعيّة على مجموعة S. لتكن $H=\{a\in S \mid a*x=x*a \text{ لكل } x\in S\}$.

أثبت أنّ H مغلقة بالنسبة إلى *. (نفكر في H على أنها مكوّنة من جميع عناصر S التي تتبدل مع كل عنصر من S).

37. افترض أنّ * عملية ثنائيّة تجميعيّة وإبداليّة على مجموعة S. أثبت أنّ $H=\{a\in S \mid a*a=a\}$ مغلقة بالنسبة إلى *. (عناصر H هي **متساويات القوى** (**idempotents**) للعملية الثنائية *).

الفصل 3 البنى الثنائيّة المتماثلة Isomorphic Binary structures

قارن بين الجدول 1.3 للعملية الثنائيّة * على المجموعة $S=\{a,b,c\}$ والجدول 2.3 للعملية الثنائيّة '* على المجموعة $T=\{\#, \$, \&\}$.

لاحظ أنه إذا استبدلنا في الجدول 1.3 # بـ a أينما وردت، $ بـ b، و & بـ c مستخدمين التقابل

$$a \leftrightarrow \# \qquad b \leftrightarrow \$ \qquad c \leftrightarrow \&$$

نحصل على الجدول 2.3 تمامًا، ويختلف الجدولان فقط في الرموز (أو الأسماء) التي تشير إلى العناصر والرموز * و'* التي تشير للعمليتين، وإذا أعدنا كتابة الجدول 3.3 بالعناصر بحسب الترتيب z, x, y، فسنحصل على الجدول 4.3. (هنا لم ننشئ تقابلًا؛ وسردنا فقط العناصر نفسها بترتيب مختلف خارج الخطين السميكين في الجدول). باستبدال y في الجدول 1.3 بـ a أينما وردت، x بـ b، و z بـ c باستخدام التقابل

$$a \leftrightarrow y \qquad b \leftrightarrow x \qquad c \leftrightarrow z$$

نحصل على الجدول 4.3. نفكر في الجداول 3.3 و2.3 و1.3 و4.3 على أنها متماثلة تركيبيًّا، فهذه الجداول الأربعة تختلف فقط في الأسماء (أو الرموز) لعناصرها، وفي الترتيب الذي تسرد فيه هذه العناصر بوصفها رؤوسًا في الجدول، من ناحية ثانية، الجدول 5.3 للعملية الثنائيّة $\bar{*}$ والجدول 6.3 للعملية الثنائيّة $\hat{*}$ على المجموعة $S=\{a,b,c\}$ مختلفان تركيبيًّا عن بعضهما وعن الجدول 1.3. في الجدول 1.3، يظهر كل عنصر ثلاث مرات في جسم الجدول، بينما يحوي جسم الجدول 5.3 عنصرًا واحدًا، وهو b. وفي الجدول 6.3، لكل $s \in S$ نحصل على القيمة c نفسها لـ $s \mathbin{\hat{*}} s$ عبر القطر من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، بينما نحصل على ثلاث قيم مختلفة في الجدول 1.3؛ لذلك، فالجداول من 1.3 إلى 6.3 تعطي فقط ثلاث عمليات ثنائيّة مختلفة تركيبيًّا على مجموعة من ثلاثة عناصر، شريطة أن نتغاضى عن أسماء العناصر وترتيب ظهورها بوصفها رؤوسًا في الجدول.

الوضع الذي ناقشناه توًّا مماثل إلى حدّ ما لوضع أطفال في فرنسا وفي ألمانيا يتعلمون عملية الجمع على المجموعة $\mathbb{Z}^+$. لدى الأطفال أسماء مختلفة، هي: (آن، دو، توا، ... مقابل آين، تسفاي، دراي...) للأعداد، لكنهم يتعلمون التركيب الثنائيّ نفسه. (في هذه الحالة، يستخدمون الرموز نفسها للأعداد، ولهذا ستظهر جداول الجمع نفسها لديهم إذا سردوا الأعداد بالترتيب نفسه).

الجدول 1.3

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

الجدول 2.3

$*'$	#	$	&
#	&	#	$
$	#	$	&
&	$	&	#

الجدول 3.3

$*''$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	z	x
z	z	x	y

الجدول 4.3

$*''$	y	x	z
y	z	y	x
x	y	x	z
z	x	z	y

الجدول 5.3

$\bar{*}$	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	b

الجدول 6.3

$\hat{*}$	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

نحن مهتمون بدراسة أنواع البنى المختلفة التي يمكن أن تعطيها العمليات الثنائيّة على مجموعات فيها عدد العناصر نفسه، كما سبق تمثيله والجداول 4.3،و5.3، و6.3، لنفترض أنّ **البنية الجبرية الثنائيّة**[2] **(binary algebraic structure)** $\langle S,*\rangle$ هي مجموعة S مع عملية ثنائيّة $*$ على S. حتى تكون بنيتان $\langle S,*\rangle$ و$\langle S',*'\rangle$ من مثل هذه البنى الجبرية متماثلتين تركيبيًا بالفهم الذي وصفناه، يجب أن يتوافر لدينا تقابل بين العناصر x من S والعناصر x' من S'، بحيث إنه

إذا كان $x \leftrightarrow x'$ و $y \leftrightarrow y'$، فإنّ $x*y \leftrightarrow x'*'y'$ (1)

يتوافر تقابل إذا كانت S وS' لهما عدد العناصر نفسه، ومن المألوف وصف التقابل بإعطاء دالّة أحاديّة وغامرة ϕ من S إلى S' (انظر التعريف 12.0)، ولمثل هذه الدالّة ϕ، نعدّ المعادلة $\phi(x)=x'$ قارئةً للتقابل $x \leftrightarrow x'$ الترتيب من اليسار إلى اليمين، حيث يمكن التعبير بدلالة ϕ عن التقابل الأخير $\leftrightarrow$ في (1)، الذي يؤكد أنّ التركيب الجبري في S' هو نفسه الذي في S بـ

$$\phi(x*y)=\phi(x)*'\phi(y).$$

تعرف مثل هذه الدالّة التي تبين أنّ النظامين الجبريين متماثلان تركيبيًا بالتماثل؛ لذا، نعطي تعريفًا منهجيًا.

7.3 تعريف لتكن $\langle S,*\rangle$ و$\langle S',*'\rangle$ بنيتين جبريتين ثنائيّتين، **يعرّف التماثل (isomorphism)** من S إلى S' على أنّه دالّة أحاديّة غامرة ϕ من S إلى S' بحيث إن:

$\phi(x*y)=\phi(x)*'\phi(y)$ لكل $x,y \in S$ (خاصية التشاكل) (2)

---

2 تذكر ان الكتابة بخط غامق تشير إلى أننا نقدم تعريفاً لمصطلح

إذا توافرت مثل هذه الدالّة ϕ، فنقول: إن S و S' بنيتان ثنائيّتان متماثلتان (**isomorphic binary structures**)، ونرمز لذلك بـ $S \simeq S'$ ، مع حذف * و *' من الرمز. ■

ربّما تتعجب من تسميتنا للشرط الظاهر في التعريف 7.3 خاصية التشاكل، وليس خاصية التماثل، فمفهوم التماثل يشمل فكرة التقابل التي تظهر قبلها في التعريف من خلال الكلمتين أحاديّة وغامرة. سنناقش في الوحدة 13 العلاقة بين S و S' عندما تحقق $\phi: S \to S'$ خاصية التشاكل الظاهرة، لكن ϕ ليست بالضرورة أحاديّة، عندئذٍ تسمى ϕ تشاكلًا، وليس تماثلًا.

من الواضح أننا أثبتنا في الفصل 1 أنّ البنيتين الثنائيّتين $\langle U,\cdot\rangle$ و $\langle \mathbb{R}_c, +_c\rangle$ متماثلتان لكل $c \in \mathbb{R}^+$. كذلك، $\langle U_n, \cdot\rangle$ و $\langle \mathbb{Z}_n, +_n\rangle$ متماثلتان لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

يطلب منّا التمرين 27 أن نثبت أنه لمجموعة من البنى الجبرية الثنائيّة، العلاقة $\simeq$ في التعريف 7.3 هي علاقة تكافؤ على المجموعة، حيث بيّنت مناقشتنا التي قادت إلى التعريف السابق أنّ البنى الثنائيّة المعرّفة بالجداول من 1.3 إلى 4.3 تقع في صف التكافؤ نفسه، بينما تقع تلك المعطاة في الجدولين 5.3 و 6.3 في صفّ تكافؤ مختلف. نتابع مناقشة كيفية محاولة تحديد ما إذا كانت البنى الثنائيّة متماثلة.

كيفية إثبات أنّ البنى الثنائيّة متماثلة

نعطي الآن مخططًا تمهيديًا يبيّن كيف ننطلق من التعريف 7.3 لإثبات أنّ بنيتين ثنائيّتين $\langle S,*\rangle$ و $\langle S',*'\rangle$ متماثلتان.

خطوة 1 عرّف الدالّة ϕ التي تعطي تماثل S مع S'، وهذا يعني أنّ علينا أن نصف بطريقة ما، ما هي $\phi(s)$ لكل $s \in S$.

خطوة 2 أثبت أنّ ϕ دالة أحادية. أي، افترض أنّ $\phi(x)=\phi(y)$ في S'، واستنتج من ذلك أنّ $x=y$ في S.

خطوة 3 أثبت أنّ ϕ غامرة إلى S'. أي، افترض أنّ $s' \in S'$ معطًى، وبيّن وجود $s \in S$، بحيث إنّ $\phi(s) = s'$.

خطوة 4 أثبت أنّ $\phi(x*y) = \phi(x)*'\phi(y)$ لكل $x, y \in S$. هذا مجرد حسابات فقط. احسب كلًّا من طرفي المعادلة، وتحقق ما إذا كانا متساويين.

8.3 مثال لنثبت أنّ البنية الثنائيّة $\langle \mathbb{R}, +\rangle$ مع عملية الجمع المعتادة تماثل البنية $\langle \mathbb{R}^+,\cdot\rangle$، حيث $\cdot$ هي الضرب المعتاد.

خطوة 1 علينا بطريقة ما تحويل عملية الجمع إلى ضرب. تذكّر من $a^{b+c}=(a^b)(a^c)$ أنّ جمع الأسس يقابل ضرب الكميتين؛ لذلك، نحاول تعريف $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ بالقاعدة $\phi(x)=e^x$ لكل $x \in \mathbb{R}$. لاحظ أنّ $e^x > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$، لهذا فعلًا $\phi(x) \in \mathbb{R}^+$.

خطوة 2 إذا كان $\phi(x) = \phi(y)$، فإنّ $e^x = e^y$. بأخذ اللوغاريتم الطبيعي نرى أنّ $x = y$، لهذا فعلًا ϕ أحاديّة.

خطوة 3 إذا كان $r \in \mathbb{R}^+$، فإنّ $\ln(r) \in \mathbb{R}$ و $\phi(\ln r) = e^{\ln r} = r$؛ لذلك ϕ غامرة إلى $\mathbb{R}^+$.

خطوة 4 لـ $x, y \in \mathbb{R}$، لدينا $\phi(x+y) = e^{x+y} = e^x. e^y = \phi(x). \phi(y)$؛ لذلك نرى أنّ ϕ هي فعلًا تماثل. ▲

9.3 مثال لتكن $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$، أي إن $2\mathbb{Z}$ هي مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية، الموجبة، والسالبة، والصفر. ندّعي أنّ $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ تماثل $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$، حيث + هي الجمع المعتاد. هذا سوف يعطي مثالًا على بنية ثنائيّة $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ تماثل في الحقيقة بنية مكوّنة من مجموعة جزئيّة فعلية بالنسبة إلى العملية المتولّدة، على خلاف المثال 8.3 الذي كانت فيه العمليتان مختلفتين بالكامل.

خطوة 1 الدالّة الواضحة $\phi: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ التي يمكن تجريبها تعطى بـ $\phi(n) = 2n$ لـ $n \in \mathbb{Z}$.

خطوة 2 إذا كان $\phi(m) = \phi(n)$، فإنّ $2m = 2n$ وعليه $m = n$؛ لذلك ϕ أحاديّة.

خطوة 3 إذا كان $n \in 2\mathbb{Z}$، فإنّ n عدد زوجي، وعليه $n = 2m$، حيث $m = n/2 \in \mathbb{Z}$؛ لذلك $\phi(m) = 2(n/2) = n$ وعليه تكون ϕ غامرة إلى $2\mathbb{Z}$.

خطوة 4 لتكن $m, n \in \mathbb{Z}$، عندئذٍ، تثبت المعادلة

$$\phi(m+n) = 2(m+n) = 2m + 2n = \phi(m) + \phi(n)$$

أنّ ϕ تماثل. ▲

كيفية إثبات أنّ البنى الثنائيّة ليست متماثلة

نتحول الآن إلى عكس السؤال، تحديدًا:

كيف نثبت أنّ بنيتين ثنائيّتين $\langle S, * \rangle$ و $\langle S', *' \rangle$ ليستا متماثلتين، إذا كان هذا هو الحال؟

هذا سيعني أنه لا توجد دالة أحاديّة وغامرة ϕ من S إلى S' تحقّق الخاصية $\phi(x*y) = \phi(x)*'\phi(y)$ لكل $x, y \in S$، بوجه عام، من الواضح أنه من غير المعقول تجريب جميع الدوالّ الأحاديّة الغامرة من S إلى S'، وفحص ما إذا كانت تحقّق هذه الخاصية، إلّا في حالة عدم توافر مثل هذه الدوالّ. هذه تحديدًا هي الحالة التي لا تملك فيها S و S' عدد العناصر نفسه. (انظر التعريف 13.0).

10.3 مثال البنيتان الثنائيّتان $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ و $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ ليستا متماثلتين؛ لأن عدد عناصر $\mathbb{Q}$ هو $\aleph_0$، بينما $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$. (انظر المناقشة التي أعقبت المثال 13.0). لاحظ أنّ القول:إنّ $\mathbb{Q}$ مجموعة جزئيّة فعلية من $\mathbb{R}$ لا يكفي، فالمثال 9.3 يبين أنّ المجموعة الجزئيّة الفعلية مع العملية المتولّدة يمكن في الحقيقة أن تماثل البنية الثنائيّة الكليّة. ▲

الخاصية التركيبية (**structural property**) لبنية ثنائيّة هي خاصية يجب أن تشترك فيها أيّ بنية مماثلة، وإنها لا تتعلق بالأسماء أو بعض المميزات غير التركيبية للعناصر، فمثلًا: البنيتان الثنائيّتان المعرفتان بالجدولين 1.3 و 2.3 متماثلتان على الرغم من أنّ العناصر مختلفة كليًّا، كذلك لا تتعلق الخاصية التركيبية بما نعدّه "اسمًا" للعملية الثنائيّة. ويبين المثال 8.3 أنّ البنية الثنائيّة التي عمليتها جمعنا المعتاد يمكن أن تماثل أخرى عمليتها ضربنا المعتاد، لكن عدد العناصر في S هو خاصية تركيبية لـِ $\langle S, *\rangle$.

في حالة توافر دالّة أحاديّة غامرة من S إلى S'، فنبرهن عادةً أنّ $\langle S, *\rangle$ لا تماثل $\langle S', *'\rangle$ (إذا كان هذا هو الحال) بإثبات أنّ إحداهما تحقّق خاصية تركيبية لا تتمتع بها الأخرى.

11.3 مثال كلتا المجموعتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^+$ لهما عدد العناصر $\aleph_0$، وهناك كثير من الدوالّ الأحاديّة الغامرة من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}^+$، لكن البنيتين الثنائيّتين $\langle \mathbb{Z}, \cdot\rangle$ و $\langle \mathbb{Z}^+, \cdot\rangle$ حيث $\cdot$ هي الضرب المعتاد، غير متماثلتين، ويتوافر عنصران x في $\langle \mathbb{Z}, \cdot\rangle$، بحيث إن $x \cdot x = x$، تحديدًا 0 و 1، لكن في $\langle \mathbb{Z}^+, \cdot\rangle$، يتوافر عنصر وحيد1. ▲

نسرد بعض الأمثلة على خصائص تركيبية وخصائص غير تركيبية ممكنة لبنية ثنائيّة $\langle S, *\rangle$؛ لمساعدتك على التفكير في الإتجاه الصحيح.

خصائص تركيبية ممكنة	خصائص غير تركيبية ممكنة
1. المجموعة فيها 4 عناصر.	أ. العدد 4 هوعنصر.
2. العملية إبداليّة.	ب. العملية تسمّى "جمعًا"
3. $x * x = x$ لكل $x \in S$.	جـ. عناصر S مصفوفات.
4. للمعادلة $a * x = b$ حلّ x في S لكل $a, b \in S$.	د. S مجموعة جزئيّة من $\mathbb{C}$.

قدّمنا في الفصل 2 المفاهيم الجبرية للإبدال والتجميع، ويتّضح مفهوم تركيبيّ آخر سيكون مهمًّا لنا بالجدول 3.3، حيث العملية الثنائيّة "$*$ على المجموعة $\{x, y, z\}$، لدينا $u = x *'' u = u *'' x$ لكل الاختيارات الممكنة x، y، و z مكان u؛ لذلك، تؤدي x الدور نفسه الذي يؤديه 0 في $\langle \mathbb{R}, +\rangle$، حيث $u = 0 + u = u + 0$ لكل $u \in \mathbb{R}$، والدور نفسه الذي يؤديه 1 في $\langle \mathbb{R}, .\rangle$، حيث $u = 1.u = u.1$ لكل $u \in \mathbb{R}$، ولأن الجدولين 1.3 و 2.3 يعطيان بنيتين مماثلتين لتلك التي في الجدول 3.3، فيجب لذلك أن يقدما عنصرًا بخاصية مشابهة، حيث نرى أنّ $u = b * u = u * b$ لكل عنصر u يظهر في الجدول 1.3، وأنّ $u = \$ *' u = u *' \$$ لكل العناصر u في الجدول 2.3. نعطي تعريفًا منهجيًّا لهذا المفهوم التركيبي، ونثبت مبرهنة صغيرة.

12.3 تعريف لتكن $\langle S,*\rangle$ بنية ثنائيّة. يسمّى العنصر e من S **العنصر المحايد للعملية** * **(identity element for *)** إذا كان

$$e * s = s * e = s \text{ لكل } s \in S.$$ ■

13.3 مبرهنة **(وحدانية العنصر المحايد)** للبنية الثنائيّة $\langle S,*\rangle$ على الأكثر عنصر محايد واحد، أي إنه إذا وُجد عنصر محايد، فهو وحيد.

البرهان بالسير بحسب الطريقة القياسية لإثبات الوحدانية، افترض أنّ كلا e و $\bar{e}$ عنصران من S يؤديان دور عنصرين محايدين، ندعهما يتنافسان معًا، وبافتراض e عنصرًا محايدًا، فيجب أن يكون لدينا $e*\bar{e} = \bar{e}$، لكن بافتراض $\bar{e}$ عنصرًا محايدًا، فيجب أن يكون لدينا $e*\bar{e} = e$؛ لذلك نحصل على $e = \bar{e}$، ما يثبت أنّ العنصر المحايد يجب أن يكون وحيدًا. ◆

إذا كان لديك الآن إدراك جيد لمفهوم تماثل البنى الثنائيّة، فسيكون واضحًا أن توافر عنصر محايد لـ * هو بالفعل خاصية تركيبية للبنية $\langle S,*\rangle$. على أيّ حال، نعلم بالخبرة أنّ كثيرًا من القرّاء سيكونون غير قادرين على رؤية الغابة على الرغم من كل ما ظهر من أشجار، ولهؤلاء، نعطي برهانًا دقيقًا، متخطّين لمس تلك الأشجار المتشابكة.

14.3 مبرهنة افترض أنّ $\langle S,*\rangle$ فيها عنصر محايد e لـ *. إذا كان $\phi: S\to S'$ تماثلًا من $\langle S,*\rangle$ إلى $\langle S',*'\rangle$، فإنّ $\phi(e)$ عنصر محايد للعملية الثنائيّة *' على S'.

البرهان لتكن $s'\in S'$. علينا أن نثبت أنّ $\phi(e) *' s' = s' *' \phi(e) = s'$، ولأنّ ϕ تماثل، فتكون دالّة أحاديّة غامرة من S إلى S'، ويوجد على وجه الخصوص $s \in S$، بحيث إنّ $\phi(s) = s'$. الآن، e عنصر محايد لـ * وعليه، نعلم أنّ $e*s = s*e = s$. ولأنّ ϕ دالّة، فنحصل على:

$$\phi(e*s) = \phi(s*e) = \phi(s).$$

باستخدام التعريف 7.3 للتماثل، نستطيع إعادة كتابة ذلك على الصورة:

$$\phi(e) *' \phi(s) = \phi(s) *' \phi(e) = \phi(s)$$

وبتذكّر أننا اخترنا $s \in S$، بحيث إنّ $\phi(s)=s'$ نحصل على العلاقة المطلوبة

$$\phi(e) *' s' = s' *' \phi(e) = s'.$$ ◆

نختم بثلاثة أمثلة إضافية تبين عن طريق خصائص تركيبية أنّ بنى ثنائيّة معيّنة غير متماثلة. ونطلب إليك في التمارين أن تثبت – كما في المبرهنة 14.3 – أنّ الخصائص التي استخدمناها في هذه الأمثلة للتمييز بين البنى هي بالفعل تركيبية، أي إنها يجب إن تكون مشتركة بين أي بنى متماثلة.

15.3 مثال سنبين أنّ البنيتين الثنائيّتين $\langle \mathbb{Q},+\rangle$ و $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ بالنسبة إلى الجمع المعتاد ليستا متماثلتين. (كلا $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ لها عدد العناصر $\aleph_0$؛ ولذلك، هناك الكثير من الدوالّ الأحاديّة الغامرة من $\mathbb{Q}$ إلى $\mathbb{Z}$) للمعادلة $x + x = c$ حل x لكل $c \in \mathbb{Q}$، لكن ليس هذا هو الحال في $\mathbb{Z}$. فمثلًا ، ليس للمعادلة $x+x = 3$ حل في $\mathbb{Z}$. (قدمنا خاصية تركيبية تميز بين هاتين البنيتين). ▲

16.3 مثال البنيتان الثنائيّتان $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$ و $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ بالنسبة إلى الضرب المعتاد ليستا متماثلتين. (يمكن إثبات أن $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ لهما عدد العناصر نفسه) للمعادلة $x.x = c$ حل x لكل $c \in \mathbb{C}$، لكن $x \cdot x = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$. ▲

17.3 مثال البنية الثنائيّة $\langle M_2(\mathbb{R}), . \rangle$ للمصفوفات الحقيقية من الدرجة 2×2 مع ضرب المصفوفات المعتاد لا تماثل $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ مع ضرب الأعداد المعتاد. (يمكن إثبات أنّ كلتا المجموعتين لها عدد العناصر $|\mathbb{R}|$). فضرب الأعداد إبداليّ، لكن ضرب المصفوفات ليس كذلك. ▲

تمارين 3

في التمارين جميعها، + هي الجمع المعتاد على المجموعة، حيثما عُينت، و $\cdot$ هي الضرب المعتاد.

حسابات

1. ما الأشياء الثلاثة التي علينا فحصها لتحديد ما إذا كانت الدالّة $\phi : S \to S'$ تماثلًا لبنية ثنائيّة $\langle S, * \rangle$ مع $\langle S', *' \rangle$؟

في التمارين من 2 إلى 10، حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة تماثلًا من البنية الثنائيّة الأولى إلى الثانية. (انظر التمرين 1). إذا لم تكن تماثلًا، لماذا لا؟

2. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$، حيث $\phi(n) = -n$ لِكل $n \in \mathbb{Z}$

3. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$، حيث $\phi(n) = 2n$ لِكل $n \in \mathbb{Z}$

4. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$، حيث $\phi(n) = n + 1$ لِكل $n \in \mathbb{Z}$

5. $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ حيث $\phi(x) = x / 2$ لِكل $x \in \mathbb{Q}$

6. $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$، حيث $\phi(x) = x^2$ لِكل $x \in \mathbb{Q}$

7. $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ حيث $\phi(x) = x^3$ لِكل $x \in \mathbb{R}$

8. $\langle M_2(\mathbb{R}), \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$، حيث $\phi(A)$ محددة المصفوفة A

9. $\langle M_1(\mathbb{R}), \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$، حيث $\phi(A)$ محددة المصفوفة A

10. $\langle \mathbb{R}, ^+ \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$، حيث $\phi(r) = 0.5^r$ لِكل $r \in \mathbb{R}$

في التمارين من 11 إلى 15، لتكن F مجموعة جميع الدوالّ ϕ من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ التي لها مشتقات من الرتب جميعها. اتبع تعليمات التمارين من 2 إلى 10.

11. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle F, + \rangle$، حيث $\phi(f) = f'$، مشتقة f

12. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ حيث $\phi(f) = f'(0)$

13. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle F, + \rangle$ حيث $\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

14. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle F, + \rangle$، حيث $\phi(f)(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)dt\right]$

15. $\langle F, \cdot \rangle$ مع $\langle F, \cdot \rangle$، حيث $\phi(f)(x) = x \cdot f(x)$

16. الدالّة $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ المعرفة بـ $\phi(n) = n + 1$ لكل $n \in \mathbb{Z}$ أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{Z}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Z}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط:

أ. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$، ب. $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Z}$.

17. الدالّة $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ المعرفة بـ $\phi(n) = n + 1$ لكل $n \in \mathbb{Z}$ أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{Z}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Z}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط:

أ. $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$، ب. $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Z}$.

18. الدالّة $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ المعرفة بـ $\phi(x) = 3x - 1$ لكل $x \in \mathbb{Q}$ أحادية وغامرة إلى $\mathbb{Q}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Q}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط:

أ. $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Q}, * \rangle$، ب. $\langle \mathbb{Q}, * \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Q}$.

19. الدالّة $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ المعرّفة بـ $\phi(x) = 3x - 1$ لكل $x \in \mathbb{Q}$ أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{Q}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Q}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط:

أ. $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Q}, * \rangle$، ب. $\langle \mathbb{Q}, * \rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Q}$.

مفاهيم

20. يلَخِّص شرط التشاكل للتماثل ϕ الظاهر في التعريف 7.3 أحيانًا بالقول: "ϕ يجب أن تتبدل مع العملية (العمليتين) الثنائيّة". وضّح كيف يمكن رؤية ذاك الشرط بهذه الطريقة.

في التمرينين 21 و 22، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

21. الدالّة $\phi : S \to S'$ تماثل، إذا وفقط إذا كان $\phi(a*b) = \phi(a)*' \phi(b)$.

22. لتكن * عملية ثنائيّة على مجموعة S. العنصر e من S بالخاصية $s * e = s = e * s$ هو عنصر محايد لـ * لكل $s \in S$.

براهين مختصرة

إنّ قدرتك على إعطاء اختصار بجملة أو جملتين لبرهان موضحًا فكرة البرهان دون التفاصيل والحسابات جميعها تشكل فحصًا جيدًا لفهمك لذلك البرهان، لاحظ أننا قلنا: "جملة" وليس "معادلة"، ومن الآن فصاعدًا، ستحوي بعض مجموعات تمارينا مسألة أو مسألتين تطلبان اختصار برهان في الكتاب، وسيندر أن تتجاوز ثلاث جمل، سنوضح لك ماذا نعني بالاختصار، فها هو اختصارنا بجملة واحدة للمبرهنة 14.3. اقرأ نصّ المبرهنة الآن، ثم اقرأ اختصارنا.

بتمثيل العنصر من S' على الصورة $\phi(s)$ لعنصر ما $s \in S$، استخدم خاصية التشاكل لـ ϕ لإعادة حساب $\phi(e)*' \phi(s)$ في S.

هذا هو نوع التوضيح الذي يمكن أن يعطيه رياضيّ لآخر إذا ما سُئل: "كيف تمّ البرهان؟" ونحن لم نقم بالحسابات أو نوضّح لماذا نستطيع تمثيل العنصر من S' على الصورة $\phi(s)$. سيُنتج تزويد التفاصيل كلها برهانًا مكتوبًا بالكامل. أعطينا في اختصارنا فقط خلاصة الحجة.

23. أعطِ إثباتًا مختصرًا للمبرهنة 13.3.

براهين

24. أحيانًا، يسمّى العنصر المحايد للعملية الثنائيّة * الموصوف بالتعريف 12.3 "العنصر المحايد ذا الجهتين". أعطِ بعبارة كاملة تعريفين مناظرين لِـ :

أ. العنصر المحايد الأيسر e_L لِـ *، و ب. العنصر المحايد الأيمن e_R لِـ *.

بيّنت المبرهنة 13.3 أنه إذا وُجد العنصر المحايد ذو الجهتين لـ *، فإنه وحيد. هل يصحّ الشيء نفسه للعنصر المحايد ذي الجهة الواحدة الذي عرفته توًّا؟ إذا كان كذلك، فبرهن، وإذا لم يكن كذلك فأعطِ مثالًا مناقضاً $\langle S, *\rangle$ لمجموعة منتهية S، وأوجد أول موقع يتعطلّ فيه إثبات المبرهنة 13.3.

25. متابعة لأفكار التمرين 24، هل يمكن أن يكون لبنية ثنائية عنصر محايد أيسر e_L وآخر أيمن e_R، بحيث إن $e_L \neq e_R$؟ إذا كان كذلك، فأعطِ مثالًا باستخدام عملية على مجموعة منتهية S، وإن لم يكن كذلك، فأثبت أنه مستحيل.

26. تذكّر أنه إذا كانت $f : A \to B$ دالّة أحاديّة غامرة من A إلى B، فإنّ $f^{-1}(b)$ هو $a \in A$ الوحيد، بحيث إن $f(a) = b$. برهن على أنه إذا كان $\phi: S \to S'$ تماثلًا من $\langle S,*\rangle$ إلى $\langle S',*'\rangle$، فإنّ ϕ^{-1} تماثلٌ من $\langle S',*'\rangle$ إلى $\langle S,*\rangle$.

27. برهن على أنه إذا كان $\phi: S \to S'$ تماثلًا من $\langle S, *\rangle$ إلى $\langle S',*'\rangle$، وكان $\psi: S' \to S''$ تماثلًا من $\langle S',*'\rangle$ إلى $\langle S'',*''\rangle$، فإنّ الدالّة المركّبة $\psi \circ \phi$ تكون تماثلًا من $\langle S, *\rangle$ إلى $\langle S'',*''\rangle$.

28. برهن على أنّ علاقة التماثل $\simeq$ الموصوفة في التعريف 7.3 هي علاقة تكافؤ على أيّ مجموعة من بنى ثنائيّة. يمكنك ببساطة اقتباس النتيجتين اللتين طلب منك إثباتهما في التمرينين السابقين في المواقع المناسبة في برهانك.

في التمارين من 29 إلى 32، أعطِ برهانًا دقيقًا للمتشكك على أنّ الخصائص المشار إليها للبنية الثنائيّة $\langle S, *\rangle$ هي بالفعل خصائص تركيبية. (فعلنا ذلك في المبرهنة 14.3 للخاصية": يوجد عنصر محايد لِـ *").

29. العملية * إبداليّة.

30. العملية * تجميعيّة.

31. لكل $c \in S$، للمعادلة $x * x = c$ حل x في S.

32. يوجد عنصر b في S، بحيث $b * b = b$.

33. لتكن H المجموعة الجزئيّة من $M_2(\mathbb{R})$ المؤلفة من جميع المصفوفات التي على الصورة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، حيث $a, b \in \mathbb{R}$. بيّن التمرين 23 من الفصل 2 أنّ H مغلقة بالنسبة إلى جمع المصفوفات وضربها.

أ. أثبت أنّ $\langle \mathbb{C}, +\rangle$ تماثل $\langle H, +\rangle$.

ب. أثبت أنّ $\langle \mathbb{C}, .\rangle$ تماثل $\langle H, .\rangle$.

(نقول إنّ: H تمثيل مصفوفاتي للأعداد المركبة $\mathbb{C}$).

34. هناك 16 بنية ثنائية محتملة على المجموعة $\{a,b\}$ من عنصرين. ما عدد البنى غير المتماثلة (أي، المختلفة تركيبيًّا) من بين هذه الـ 16؟ بتعبير أكثر دقة بدلالة التماثل $\simeq$ الذي هو علاقة تكافؤ على هذه المجموعة من 16 بنية: كم صفّ تكافؤ هناك؟ اكتب بنية واحدة من كل صفّ تكافؤ. [مساعدة: تبديل a و b في كل مكان في الجدول، ثم إعادة كتابة الجدول بسرد العناصر بالترتيب الأصلي لا ينتج دائمًا جدولًا مختلفًا عن الذي بدأنا به].

الفصل 4 **الزمر Groups**

لنكمل تحليلنا لخبراتنا السابقة في الجبر، فبمجرد أن نتقن المسائل الحسابية في جمع الأعداد وضربها، نصبح قادرين على أن نستخدم هذه العمليات الثنائيّة في حل المسائل، وغالبًا ما تؤدي المسائل إلى معادلات تتضمن مجهولاً x يتعيّن حسابه، إذ إنّ أبسط هذه المعادلات هي المعادلات الخطية على الصور $a + x = b$ لعملية الجمع، و $ax = b$ للضرب، والمعادلة الخطية في حالة الجمع لها دائمًا حل عددي، وكذلك في حالة الضرب بشرط أن $a \neq 0$. في الحقيقة، إن الحاجة إلى حل معادلة خطية مثل $5 + x = 2$ كانت الدافع لاستخدام الأعداد السالبة، وكذلك ظهرت الحاجة إلى الأعداد النسبية عند حل معادلة، مثل $2x = 3$.

ومن المرغوب فيه أن نكون قادرين على حلّ معادلات خطية تتضمن عملياتنا الثنائيّة، ولكن هذا ليس ممكنًا للعمليات الثنائيّة جميعها؛ فعلى سبيل المثال: المعادلة $a * x = a$ ليس لها حل في $S = \{a, b, c\}$ للعملية * في المثال 14.2؛ لذلك دعونا نضع بصورة مجردة الخصائص الجبرية المعروفة للجمع التي تمكّننا من حلّ المعادلة $5+x = 2$ في $\mathbb{Z}$، ويجب ألا نشير لعملية الطرح؛ لأننا مهتمين بالحلّ باستخدام عملية ثنائيّة واحدة، التي هي في حالتنا هذه عملية الجمع.

خطوات الحل:

$5 + x = 2$	معطًى
$-5 + (5 + x) = -5 + 2$	إضافة -5
$(-5 + 5) + x = -5 + 2$	خاصية التجميع
$0 + x = -5 + 2$	حساب $-5 + 5$
$x = -5 + 2$	خصائص ألـ 0
$x = -3$	حساب $-5 + 2$

بصورة محددة، لم نبرهن على أنّ -3 هي الحلّ للمعادلة، ولكننا أثبتنا أنها الحل الممكن الوحيد. لنثبت أنّ -3 هي الحل، علينا حساب $(-3) + 5$. وبخطوات مشابهة، يمكن حلّ المعادلة $2x = 3$ في الأعداد النسبية مع عملية الضرب.

$2x = 3$	معطًى
$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(3)$	الضرب في $\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2} . 2)x = \frac{1}{2}3$	خاصية التجميع
$1.x = \frac{1}{2}3$	حساب $\frac{1}{2}2$
$x = \frac{1}{2}3$	خاصية ألـ 1
$x = \frac{3}{2}$	حساب $\frac{1}{2}3$

نستطيع الآن معرفة طبيعة الخصائص التي يجب أن تتمتع بها المجموعة S والعمليّة الثنائيّة * المعرّفة عليها، لمحاكاة هذه الخطوات للمعادلة $a * x = b$، حيث $a,b \in S$، إنّ توافر عنصر e في المجموعة S الذي يتمتع بالخاصية $e * x = x$ لكل $x \in S$ شيء أساسي في هذه الخطوات ، وفي مثال الجمع، أدى 0 دور العنصر e، و أدى 1 هذا الدور في مثال الضرب، ثم نحتاج إلى عنصر a' في S الذي يتمتع بالخاصية $a' * a = e$. في مثال الجمع، حيث $a = 5$، أدى العنصر -5 دور a' وأدى $\frac{1}{2}$ هذا الدور في مثال الضرب، عندما كانت $a = 2$. أخيرًا نحتاج إلى قانون التجميع، وما يتبقى هو مجرد حسابات. وباتباع الأسلوب نفسه، نرى أنه لحلّ المعادلة $x * a = b$ (تذكّر أنّ $a * x$ لا تساوي بالضرورة $x * a$) سنحتاج إلى عنصر e في المجموعة S، بحيث $x * e = x$ لكل $x \in S$، و a' في S حيث $a * a' = e$. بهذه الخصائص للعملية * على S، سنكون متأكدين من مقدرتنا على حلّ المعادلات الخطية. لذلك نحتاج إلى نظام ثنائيّ تجميعي $\langle S,* \rangle$ يحوي عنصرًا محايدًا e، ولكل $a \in S$، يوجد $a' \in S$ بحيث $a * a' = a' * a = e$. هذا بالتحديد هو مفهوم الزمرة (group) الذي سنعرفه الآن.

تعريف وأمثلة

سنعطي تعريفًا مستقلًّا بدلًا من وصف الزمرة باستخدام المصطلحات التي تمّ تعريفها في الفصلين 2 و 3 كما فعلنا في نهاية الفقرة السابقة، ما يساعد أيّ شخص يقرأ هذا الكتاب على اكتشاف مفهوم الزمرة بصورة موجزة.

1.4 تعريف الزمرة **(Group)** $\langle G,* \rangle$ هي مجموعة G مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائيّة *، بحيث تحقق المسلّمات الآتية:

$\mathscr{G}_1$: لكل $a,b,c \in G$

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{قانون التجميع لـ } *$$

$\mathscr{G}_2$: يوجد عنصر e في G، بحيث إنه لكل $x \in G$،

$$e * x = x * e = x \quad e \text{ عنصر محايد لـ } *$$

$\mathscr{G}_3$: لكل $a \in G$، يوجد عنصر a' في G، بحيث

$$a * a' = a' * a = e \quad a' \text{ معكوس (أو نظير) } a$$ ■

2.4 مثال يمكننا أن نرى بسهولة أنّ $\langle U,. \rangle$ و $\langle U_n,. \rangle$ زمرتان؛ لأن عملية الضرب على الأعداد المركبة تجميعية وكلتا المجموعتين U و U_n تحوي العنصر المحايد لعملية الضرب 1. لكل $e^{i\theta} \in U$، العملية

$$e^{i\theta} \cdot e^{i(2\pi-\theta)} = e^{2\pi i} = 1$$

تبرهن على أنّ كل عنصر في U له معكوس. لكل $z \in U_n$، العملية

$$z \cdot z^{n-1} = z^n = 1$$

تبرهن على أنّ كل عنصر في U_n له معكوس؛ ولهذا فإنّ $\langle U,. \rangle$ و $\langle U_n,. \rangle$ زمرتان؛ ولأن $\langle \mathbb{R}_c , +_c \rangle$ تماثل $\langle U,. \rangle$، نستنتج أن $\langle \mathbb{R}_c , +_c \rangle$ زمرة لكل $c \in \mathbb{R}^+$. وبالمثل، فإنّ كون $\langle \mathbb{Z}_n , +_n \rangle$ تماثلُ $\langle U_n,. \rangle$ يبرهن على أنّ $\langle \mathbb{Z}_n , +_n \rangle$ زمرة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$. ▲

نشير هنا إلى أننا سنتساهل أحيانًا في التعبير، فبدلًا من استخدام التمثيل الثنائيّ للزمرة $\langle G, * \rangle$، سنستعيض عنها غالبًا بالزمرة G، وسيكون مفهومًا ضمنًا أنّ هناك عملية ثنائية * معرفة على المجموعة G، وعندما تكون الدقّة مطلوبة، سنحدد العملية * على G، ونقول:"الزمرة G بالنسبة إلى العملية *". فمثلًا، يمكننا أن نشير إلى الزمر $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع بدلًا من كتابة الشكل المسهب $\langle \mathbb{Z} , + \rangle$،و $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ و $\langle \mathbb{R}, + \rangle$. ولنا الحرية أيضًا في التعبير عن الزمرة $\mathbb{Z}_8$ من غير تحديد العملية.

نبذة تاريخية

هناك ثلاثة جذور تاريخية واضحة لتطور نظرية الزمر المجردة في تراث الرياضيات في القرن التاسع عشر: نظرية المعادلات الجبرية، ونظرية الأعداد، والهندسة، وقد استخدمت في هذه المجالات الثلاثة طرق التعليل في نظرية الزمر، على الرغم من أنها كانت أكثر وضوحًا في المجال الأول.

أحد المظاهر الرئيسة في هندسة القرن التاسع عشر كان البحث عن الثابت تحت تأثير أنواع مختلفة من التحويلات الهندسية، وانصبَّ التركيز تدريجيًّا على التحويلات نفسها، التي يمكن في حالات عدة النظر إليها بوصفها عناصر في زمر.

في نظرية الأعداد، أتمَّ ليونارد أويلر (Leonhard Euler) في القرن الثامن عشر التعامل مع بواقي قسمة قوى a^n على عدد أولي محدد p، وهذه البواقي لها خصائص "الزمرة". وكذلك تعامل كارل ف. جاوس (Carl F. Gauss) في كتابه (Disquisitiones Arithmeticae) عام 1800م بصورة مكثفة مع الصيغ التربيعية $ax^2 + 2bxy + cy^2$، وبرهن بصورة خاصّة على أنّ فصول التكافؤ لهذه الصيغ مع عملية التركيب اتصفت بما أفضى إلى خصائص الزمرة.

وأخيرًا، زوّدتنا نظرية المعادلات الجبرية بالتصور الأكثر وضوحًا لمفهوم الزمرة. وفي الحقيقة، استخدم جوزيف – لويس لاجرانج (Joseph-Louis Lagrange 1736 – 1813) تباديل جذور المعادلة بوصفها أداة لحلها. وبالطبع عُدّت هذه التباديل أخيرًا عناصر في زمرة.

تمكّن بصورة مستقلة كل من والتر فون دايك (Walter von Dyck 1856 – 1934) وهنريك ويبر (Heinrich Weber 1842 – 1913) عام 1882م من دمج هذه الجذور التاريخية الثلاثة معًا، وإعطاء تعريفٍ لمفهوم الزمرة المجردة.

3.4 تعريف يقال عن الزمرة G: إنها إبداليّة أو أبيلية (**Commutative or Abelian Group**)، إذا كانت عمليتها الثنائيّة إبداليّة. ■

■ نبذة تاريخية

تُسمَّى الزمر الإبداليّة زمرًا أبيلية تكريمًا للرياضي النرويجي نيلز هينرك أبيل (Niels Henrik Abel 1802 – 1829). كان أبيل مهتمًّا بحلّ معادلات كثيرات الحدود، وقد برهن في بحث كُتب عام 1828م، أنه إذا كانت جذور معادلة من هذا النوع من المعادلات يمكن كتابتها على صورة دوالّ نسبية $f, g, \ldots, h$ باستخدام إحداها، ولتكن x، ولكل زوج $f(x)$ و $g(x)$ من هذه الجذور تتحقق العلاقة $f(g(x)) = g(f(x))$، فإنّ المعادلة قابلة للحلّ باستخلاص الجذور، لقد برهن أبيل أنّ هذه الدوالّ في الحقيقة هي دوالّ تباديل لجذور هذه المعادلة، وهكذا، فإنّ هذه الدوالّ تكون عناصر من زمرة التباديل المعرفة على هذه الجذور، وقد كانت الخاصية الإبداليّة لزمرة التباديل هذه المرتبطة بحل المعادلات ما دفع كامايل جوردان (Camille Jordan) في بحثه عام 1870م في الجبر لتسمية هذه الزمر الزمر الأبيلية، وهكذا صار هذا الاسم منذ ذلك الوقت يطلق على الزمر الإبداليّة بوجه عام.

اهتم أبيل بالرياضيات منذ سن المراهقة، وسرعان ما تفوق على أساتذته في النرويج، ثم حصل على منحة حكومية للسفر والدراسة في الخارج عام 1825م ليصل إلى برلين، حيث زامل أوجست سريل(August Crelle) مؤسس أكثر المجلات الألمانية إنتاجًا، إضافة إلى أنه شارك بالكثير من الأبحاث في مجلة سريل سنوات عدة بما فيها الكثير في مجال الدوالّ الإهليجية التي كان في الحقيقة المؤسس لها. عاد أبيل إلى النرويج عام 1827م دون وظيفة وبالكثير من الديون، ولكنه مع ذلك استمر في كتابة أبحاث متميزة، يذكر أنّ أبيل مات بداء السل، وهو في عمر 26، وقبل يومين من نجاح سريل في الحصول على وظيفة له في جامعة برلين.

لنقدم بعض الأمثلة لمجموعة مع عمليات ثنائيّة تكوّن زمرًا وأخرى لا تكون زمرًا.

مثال 4.4 المجموعة $\mathbb{Z}^+$ بالنسبة إلى الجمع ليست زمرة. لا يتوافر عنصر محايد لعملية + في $\mathbb{Z}^+$. ▲

مثال 5.4 مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة (تشمل 0) بالنسبة إلى الجمع ليست زمرة، فهي تحوي عنصرًا محايدًا 0 غير أنها لا تحوي معكوس العدد 2. ▲

مثال 6.4 الخصائص المعروفة للأعداد الصحيحة والنسبية، وكذلك الحقيقية والمركبة تبرهن أنّ $\mathbb{Z}$ ، و $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الجمع هي زمر إبداليّة. ▲

مثال 7.4 المجموعة $\mathbb{Z}^+$ بالنسبة إلى الضرب ليست زمرة، فهي تحوي عنصرًا محايدًا 1، ولكن لا تحوي معكوس 3. ▲

مثال 8.4 الخصائص المعروفة للأعداد النسبية، والحقيقية، والمركبة تبرهن أنّ مجموعات الأعداد الموجبة $\mathbb{Q}^+$ و $\mathbb{R}^+$ ومجموعات الأعداد غير الصفرية و $\mathbb{Q}^*$، و $\mathbb{R}^*$، و $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب هي زمر إبداليّة. ▲

مثال 9.4 مجموعة الدوالّ ذوات القيم الحقيقية على المجال $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى جمع الاقترانات زمرة إبداليّة. ▲

مثال 10.4 (جبر خطي) على دارسي فضاء المتجهات أن يلاحظوا أنّ مسلمات فضاء المتجهات V المتعلقة بجمع المتجهات يمكن إيجازها بالقول: إن V بالنسبة إلى جمع المتجهات زمرة إبداليّة. ▲

مثال 11.4 إنّ مجموعة المصفوفات $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ من الدرجة $m\times n$ بالنسبة إلى جمع المصفوفات زمرة، حيث المصفوفة من الدرجة $m\times n$ ومدخلاتها 0 جميعها هي العنصر المحايد، وهي زمرة إبداليّة. ▲

مثال 12.4 إنّ مجموعة المصفوفات $M_n(\mathbb{R})$ من الدرجة $n\times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات ليست زمرة؛ لأنّ المصفوفة من الدرجة $n\times n$ وجميع مدخلاتها 0 ليس لها معكوس. ▲

مثال 13.4 برهن أنّ المجموعة الجزئيّة S من $M_n(\mathbb{R})$ التي تتكوّن من جميع المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات زمرة.

الحل أولاً نبرهن أنّ S مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. افترض أنّ A و B في S؛ لذلك كلٌ من A^{-1} و B^{-1} متوافران و $AA^{-1} = BB^{-1} = I_n$، إذن:

$$(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$$

لذلك AB مصفوفة ذات معكوس، وتنتمي للمجموعة S.

نظرًا لأنّ ضرب المصفوفات عملية تجميعيّة و I_n تمثل العنصر المحايد، وكل عنصر في S له معكوس بحسب تعريف S، نستنتج في الحقيقة أنّ S زمرة، وهي ليست إبداليّة، بل إنها مثالنا الأول لزمرة غير إبداليّة. ▲

زمرة المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$ التي درسناها في المثال السابق لها أهمية جوهرية في الجبر الخطي، وهي **الزمرة الخطية العامة من الدرجة n (general linear group of degree n)**، وعادة يرمز لها بالرمز $GL(n,\mathbb{R})$. فمَن درس منكم الجبر الخطي يعرف أن المصفوفة A في $GL(n,\mathbb{R})$ تولّد تحويلًا خطيًّا ذا معكوس $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، عرّف بالقاعدة $T(x)= Ax$، والعكس كذلك صحيح، حيث إنّ كل تحويل خطي ذي معكوس من $\mathbb{R}^n$ إلى نفسها معرّف بهذه الطريقة باستخدام مصفوفة في $GL(n,\mathbb{R})$. وكذلك ضرب المصفوفات مرتبط بتركيب التحويلات الخطية، وهكذا فإنّ التحويلات الخطية كلها ذات المعكوس من $\mathbb{R}^n$ إلى نفسها تشكل زمرة مع عملية التركيب. ويعبّر عن هذه الزمرة في العادة على الصورة $GL(\mathbb{R}^n)$، وبالطبع $GL(n,\mathbb{R}) \simeq GL(\mathbb{R}^n)$.

مثال 14.4 لتكن * معرفة على $\mathbb{Q}^+$ بالقاعدة $a * b = \dfrac{ab}{2}$. عندئذٍ،

$$(a * b) * c = \frac{ab}{2} * c = \frac{abc}{4}$$

وكذلك:

$$a * (b * c) = a * \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4}$$

وهكذا، فإنّ العملية * تجميعيّة. تظهر الحسابات أنّ:

$$2 * a = a * 2 = a$$

لكل $a \in \mathbb{Q}^+$، وبهذا يكون 2 هو العنصر المحايد لـ * . وأخيرًا:

$$a * \frac{4}{a} = \frac{4}{a} * a = 2$$

وهكذا $a' = \dfrac{4}{a}$ هو معكوس a. إذن، $\mathbb{Q}^+$ مع العملية * تكوّن زمرة. ▲

الخصائص الأساسية للزمر

في تحركنا لإثبات أول مبرهنة على الزمر، يجب أن نستخدم التعريف 1.4؛ لأنه الشيء الوحيد الذي نعرفه عن الزمر في هذه اللحظة، ويمكن توظيف التعريف 1.4 والمبرهنة الأولى في إثبات المبرهنة الثانية، وإثبات المبرهنة الثالثة يمكن أن يستخدم التعريف والمبرهنة الأولى والثانية، وهكذا.

سترسخ مبرهنتنا الأولى قوانين الحذف، ونعرف في حسابات الأعداد الحقيقية، أنّ $2a = 2b$ تؤدي إلى أنّ $a = b$، ونحتاج فقط إلى قسمة كلا طرفي المعادلة $2a = 2b$ على 2، أو بصورة مكافئة ضرب كلا الطرفين بـ $\dfrac{1}{2}$، المعكوس الضربي لـ 2. سنكرر هذا الإثبات لبرهان قوانين الحذف لأي زمرة. لاحظ أننا سوف نستخدم قانون التجميع.

مبرهنة 15.4 إذا كانت G زمرة مع عملية ثنائيّة *، فإنّ **قانوني الحذف من اليمين واليسار** يتحققان في G، بمعنى أنّ $a * b = a * c$ يؤدي إلى $b = c$، و$b * a = c * a$ يؤدي إلى $b = c$ لكل $a, b, c, \in G$.

البرهان افترض أنّ $a * b = a * c$. وهكذا باستخدام $\mathscr{G}_3$، يوجد a' و

$$a' * (a * b) = a' * (a * c)$$

وبحسب قانون التجميع:

$$(a' * a) * b = (a' * a) * c$$

وبحسب تعريف a' في $\mathscr{G}_3$، $a' * a = e$، وعليه، يكون:

$$e * b = e * c$$

بحسب تعريف e في $\mathscr{G}_2$،

$$b = c$$

وبصورة مماثلة، باستخدام $b * a = c * a$ يمكن استنتاج أنّ $b = c$ بالضرب من جهة اليمين بـ a' واستخدام مسلمات الزمرة. ♦

يمكن لبرهاننا الآتي استخدام المبرهنة 15.4. سنثبت أنّ "المعادلة الخطيّة" في الزمرة لها حلّ وحيد، تذكّر أننا اخترنا الخصائص المناسبة للزمرة؛ لتمكننا من إيجاد الحلّ لهذا النوع من المعادلات.

مبرهنة 16.4 إذا كانت G زمرة مع عملية ثنائيّة *، وكانت a و b عنصرين في G، فإنّ المعادلتين الخطيّتين $a * x = b$ و $y * a = b$ لهما حلان وحيدان x و y في G.

البرهان في البداية سنثبت وجود حلّ على الأقل للمعادلة بملاحظة أنّ $a' * b$ يمثل حلًّا للمعادلة: $a * x = b$، لاحظ أنّ:

$$a * (a' * b) = (a * a') * b \qquad \text{خاصية التجميع}$$

$$= e * b \qquad a' \text{ تعريف}$$

$$= b \qquad e \text{ خاصية}$$

وهكذا، فإنّ $x = a' * b$ تمثل حلًّا للمعادلة $a * x = b$. وبصورة مشابهة، $y = b * a'$ تمثل حلاً للمعادلة $y * a = b$.

ولإثبات أنّ y هي الحلّ الوحيد، سنستخدم الطريقة التقليدية بافتراض أنّ لدينا حلّين، y_2 , y_1 بحيث إنّ $y_1 * a = b$ و $y_2 * a = b$. إذن، $y_1 * a = y_2 * a$، وباستخدام المبرهنة 15.4، $y_1 = y_2$. يمكن برهان أنّ x حلّ وحيد بطريقة مماثلة. ♦

بالطبع، لإثبات أنّ الحلّ وحيد في المبرهنة السابقة، كان بإمكاننا اتباع الأسلوب الذي استخدمناه في التقديم لتعريف الزمرة، وبإثبات أنه إذا كان $a * x = b$، فإنّ $x = a' * b$ ولكننا اخترنا استخدام الطريقة التقليدية لبرهان أنّ شيئًا ما وحيد؛ تحديدًا، افترض أنّ لديك اثنين من هذه الأشياء، ثم برهن أنهما يجب أن يكونا متساويين، لاحظ أنّ الحلّين $x = a' * b$ و $y = b * a'$ ليسا بالضرورة متساويين إلا إذا كانت * تبديلية.

ولأنّ الزمر حالة خاصة من الأنظمة الثنائية، نعرف من المبرهنة 13.3 أنّ العنصر المحايد e في الزمرة وحيد، سنذكر هذا بوصفه جزءًا من المبرهنة الآتية؛ ليسهل الرجوع إليه.

17.4 مبرهنة في أي زمرة G مع عملية ثنائيّة *، يوجد عنصر واحد فقط e في G، بحيث إنّ:

$$e * x = x * e = x$$

لكل $x \in G$، وكذلك، فلكل $a \in G$ يوجد عنصر واحد فقط a' في G، بحيث إنّ

$$a' * a = a * a' = e$$

– بصورة مختصرة– العنصر المحايد ومعكوس كل عنصر في الزمرة وحيدان.

البرهان تثبت المبرهنة 13.3 أنّ العنصر المحايد وحيد في أيّ نظام ثنائيّ، لا حاجة في هذه الحالة إلى أيّ من مسلمات الزمرة لإثبات ذلك.

بالعودة إلى إثبات أنّ المعكوس وحيد، افترض أنّ $a \in G$ له معكوسان a' و a''، وهكذا فإنّ $a'' * a = a * a'' = e$ و $a' * a = a * a' = e$.

$$\text{إذن} \qquad a * a'' = a * a' = e$$

وباستخدام المبرهنة 15.4،

$$a'' = a'$$

وهكذا، فإنّ معكوس a في الزمرة وحيد. ♦

لاحظ أنه في أيّ زمرة G،

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = (a * e) * a' = a * a' = e$$

هذه المعادلة والمبرهنة 17.4 تثبتان أنّ $b' * a'$ هو المعكوس الوحيد لـ $a * b$. بمعنى أنّ $(a * b)' = b' * a'$. نصوغ هذا بوصفه نتيجة.

18.4 نتيجة لتكن G زمرة. لكل $a, b \in G$، $(a * b)' = b' * a'$.

نثري معلوماتك، فنشير هنا إلى أنّ أنظمة جبرية ثنائيّة بمسلمات أضعف من تلك الخاصة بالزمر قد درست بصورة مكثفة جدًّا، ومن هذه الأنظمة الأضعف، **شبه الزمرة (semigroup)**، وهي مجموعة معرف عليها عملية ثنائيّة تجميعيّة، وهي ربما حظيت بأكبر اهتمام، **أمّا المونويد (monoid)**، فهو شبه زمرة تحوي عنصرًا محايدًا لعمليتها الثنائيّة، لاحظ أنّ الزمرة تكون شبه زمرة وموندید.

أخيرًا، من الممكن إعطاء مسلمات للزمرة $\langle G, * \rangle$ التي تظهر للوهلة الأولى أضعف، مثل:

1- العملية الثنائيّة * على G تجميعيّة.

2- يوجد عنصر محايد من اليسار e في G، بحيث $e * x = x$ لكل $x \in G$.

3- لكل $a \in G$، يوجد معكوس من اليسار a' في G، بحيث $a' * a = e$.

من هذا التعريف ذي الجهة الواحدة، يمكن إثبات أنّ العنصر المحايد من اليسار هو كذلك عنصر محايد من اليمين، والمعكوس من اليسار هو كذلك معكوس من اليمين للعنصر نفسه. وهكذا يجب ألا يقال: إنّ هذه المسلمات أضعف؛ لأنها تعطي النظام نفسه الذي سُمي الزمرة، ويمكن التصور أنه قد يكون من الأسهل في بعض الحالات التأكد من هذه المسلمات ذات الجهة الواحدة بدلًا من المسلمات ذات الجهتين، وبالطبع، عند استخدام التناظر نجد أنه من الواضح أنّ هناك مسلمات من اليمين للزمرة.

الزمر المنتهية وجداول الزمر

كانت أمثلتنا كلها بعد المثال 2.4 لزمر غير منتهية، وهي زمر ذات مجموعة G لها عدد لا نهائي من العناصر، ونتحول الآن للزمر المنتهية، بدءًا من أصغر المجموعات المنتهية.

لأنّ الزمر يجب أن تحتوي على الأقل عنصرًا واحدًا – العنصر المحايد – فإنّ أصغر مجموعة يمكن أن تشكل زمرة هي المجموعة ذات العنصر الوحيد $\{e\}$، والعملية الثنائيّة الوحيدة * التي يمكن تعريفها على $\{e\}$ هي $e * e = e$، والمسلمات الثلاث للزمرة متحققة في هذه الحالة، أمّا العنصر المحايد، فهو معكوس نفسه في أي زمرة.

لنجرب الآن وضع نظام الزمرة على مجموعة مكوّنة من عنصرين، لأنّ أحد العنصرين يجب أن يؤدي دور العنصر المحايد، فيمكننا أن ندع المجموعة تكون $\{e , a\}$، ولنحاول أن نضع جدولًا للعملية الثنائيّة * على $\{e , a\}$، التي ستعطي نظام زمرة للمجموعة $\{e , a\}$.

عندما نضع جدولًا لعملية الزمرة، سوف نضع العنصر المحايد أولًا، كما في الجدول الآتي:

$*$	e	a
e		
a		

ولأنّ e هو العنصر المحايد، فإنّ:

$$e * x = x * e = x$$

لكل $x \in \{e, a\}$، وهكذا، فنحن ملزمون أن نملأ الجدول كما يأتي: إذا كانت * ستعطي زمرة.

$*$	e	a
e	e	a
a	a	

وكذلك، فإنّ لـ a معكوس a' بحيث:

$$a * a' = a' * a = e.$$

في حالتنا هذه، a' يجب أن تكون إما e أو a، ولأنّ $a' = e$ لا يمكن أن تؤدي المطلوب، فيجب أن تكون $a' = a$، وهكذا، فعلينا أن نكمل الجدول كما يأتي:

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

مسلمات الزمرة كلها متحققة الآن، ما عدا (ربما) خاصية التجميع، والتحقق من التجميع على أساس كل حالة بصورة منفصلة باستخدام الجدول المعرّف للعملية يمكن أن يكون عملية مضنية، ولكننا نعلم أنّ $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ مع عملية الجمع مقياس 2 تشكل زمرة، وبحسب عملنا السابق، فإنّ 0 ستستبدل بـ e و 1 بـ a في الجدول، وهكذا فإنّ خاصية التجميع يجب أن تكون متحققة في الجدول الذي يحوي e و a.

وبأخذ هذا المثال في الحسبان، فيجب أن نكون قادرين على وضع بعض الشروط الأساسية على جدول العملية الثنائية المعرّف على مجموعة منتهية؛ ليحقق خصائص الزمرة عليها، فيجب أن يكون عنصر واحد في المجموعة يؤدي دور العنصر المحايد، الذي سنرمز له بالرمز e، والشرط $e * x = x$ يعني أنّ الصفّ من الجدول المقابل لـ e على أقصى اليسار يجب أن يحوي تمامًا العناصر التي تظهر في أعلى الجدول وبالترتيب نفسه، وكذلك، فإنّ الشرط $x * e = x$ يعني أنّ العمود الذي يحوي e في الأعلى، يجب أن يحوي تمامًا العناصر التي تظهر أقصى اليسار، وبالترتيب نفسه، حيث إنّ حقيقة أنّ لكل عنصر a معكوس من اليمين واليسار تعني أنّ الصفّ الذي يحوي a في أقصى اليسار يجب أن تظهر فيه e، وكذلك العمود الذي

يحوي a في الأعلى يجب أن يحتوي على e، وهذا يعني أن e ستظهر في كل صف وفي كل عمود. وهكذا باستخدام المبرهنة 16.4، ليس فقط للمعادلتين $a * x = e$ و $y * a = e$ حلول وحيدة، بل كذلك المعادلتان $a * x = b$ و $y * a = b$. وبخطوات شبيهة، ما يعني أنّ كل عنصر b في الزمرة يجب أن يظهر مرة واحدة فقط في كل صفّ وفي كل عمود من الجدول.

افترض الآن العكس، بمعنى أنّ جدول العملية الثنائيّة المعرفة على مجموعة منتهية يحوي عنصرًا يؤدي دور العنصر المحايد، وفي كل صفّ وفي كل عمود، يظهر كل عنصر من المجموعة مرة واحدة فقط، في هذه الحالة يمكن إثبات أنّ النظام يشكل زمرة إذا وفقط إذا كانت خاصية التجميع متحقّقة، وإذا كانت العملية الثنائيّة * معطاة من خلال جدول ما، فإنّ التحقّق من خاصية التجميع يكون في الغالب مربكًا، ولكن إذا كانت العملية * معرّفة بصفة مميزة لـ $a * b$، فإنّ التحقّق من خاصية التجميع يكون في العادة سهلًا، ولحسن الطالع، فإنّ الحالة الثانية هي التي يواجهها الشخص عادة.

رأينا أنه توجد بصورة أساسية زمرة واحدة مكوّنة من عنصرين، بمعنى أنه إذا كان هناك عنصران يرمز لهما بـ e و a، حيث يظهر العنصر المحايد e أولًا، فإنّ الجدول يجب أن يظهر كما في الجدول 19.4، افترض الآن أنّ المجموعة تحوي ثلاثة عناصر، كما سبق، يمكننا أن ندع المجموعة تكون $\{e, a, b\}$، وليكن e عنصرًا محايدًا، فإنّ العملية الثنائيّة * على هذه المجموعة يجب أن تكون كما في الجدول 20.4، وهذا يَدَعُ أربعة أماكن لتعبئتها، إذ يمكنك أن ترى بسرعة أنّ الجدول 20.4 يجب أن يكمل ليصبح مثل الجدول 21.4 إذا كان كل صفّ وكل عمود يجب أن يحوي كل عنصر مرة واحدة، ولأنه كانت هناك طريقة واحدة لإكمال الجدول و $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ مع الجمع مقياس 3 تشكل زمرة، فإنّ خاصية التجميع يجب أن تتحقّق لجدولنا الذي يحوي e, و a و b.

افترض الآن أنّ G' أي زمرة مكوّنة من ثلاثة عناصر، وتخيل جدولًا لـ G'، حيث يظهر العنصر المحايد أولًا، ولأن تعبئتنا لجدول $G = \{e, a, b\}$ يمكن إنجازها بطريقة واحدة فقط، فبإمكاننا أن نرى أنه لو أخذنا جدول G'، وأعدنا تسمية العنصر المحايد بـ e، والعنصر الذي يليه بـ a والثالث بـ b، فإنّ الجدول الناتج لـ G' يجب أن يكون هو جدول G نفسه. كما تمّ توضيحه في الفصل 3، فإنّ إعادة التسمية تعطي تماثلًا بين الزمرة G' والزمرة G. والتعريف 7.3 أعطى مفهوم التماثل والأنظمة الثنائيّة المتماثلة، ولأن الزمر هي حالة خاصة من الأنظمة الثنائيّة، فإنّ التعريف نفسه ينطبق عليها، وهكذا فإنّ عملنا السابق يمكن تلخيصه بأن الزمر جميعها التي تتكوّن من عنصر واحد متماثلة، والزمر كلها التي تتكوّن من عنصرين متماثلة، والزمر للها التي تتكوّن من ثلاثة عناصر متماثلة. سوف نستخدم المصطلح وفق التماثل *(Up to iso-morphism)* لنعبّر عن هذه المطابقة باستخدام علاقة التكافؤ $\simeq$. وهكذا يمكننا القول: "تتوافر زمرة واحدة فقط مكوّنة من ثلاثة عناصر وفق التماثل".

الجدول 19.4

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

الجدول 20.4

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

الجدول 21.4

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

تمارين4

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، حدّد إذا كانت العملية الثنائيّة * تعطي نظام زمرة على المجموعة المعطاة. وإذا لم يكن الناتج زمرة، فحدّد أول واحدة من المسلمات $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ (بهذا الترتيب) من التعريف 1.4 لا تتحقّق.

1. لتكن * مُعرّفة على $\mathbb{Z}$ كالآتي: $a * b = ab$.

2. لتكن * مُعرّفة على $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ كالآتي: $a * b = a + b$.

3. لتكن * معرّفة على $\mathbb{R}^+$ كالآتي: $a * b = \sqrt{ab}$.

4. لتكن * معرّفة على $\mathbb{Q}$ كالآتي: $a * b = ab$.

5. لتكن * معرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية $\mathbb{R}^*$ كالآتي: $a * b = a/b$.

6. لتكن * معرّفة على $\mathbb{C}$ كالآتي: $a * b = |ab|$.

7. أعطِ مثالًا على زمرة إبداليّة G، حيث G تحوي بالضبط 1000 عنصر.

8. بإمكاننا أيضًا أن نعدّ الضرب $._n$ مقياس n في $\mathbb{Z}_n$، على سبيل المثال: $5 ._7 6 = 2$ في $\mathbb{Z}_7$ لأن $5.6 = 30 = 4(7)+2$. المجموعة $\{1, 3, 5, 7\}$ مع الضرب $._8$ مقياس 8 هي زمرة. أعطِ جدول هذه الزمرة.

9. أثبت أنّ الزمرة $\langle U, .\rangle$ لا تماثل أيًّا من $\langle \mathbb{R}, +\rangle$ و $\langle \mathbb{R}^*, .\rangle$ (الزمر الثلاثة عدد عناصرها $|\mathbb{R}|$).

10. ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا، ولتكن $n\mathbb{Z} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$

أ. أثبت أنّ $\langle n\mathbb{Z}, +\rangle$ زمرة.

ب. أثبت أنّ $\langle n\mathbb{Z}, +\rangle \simeq \langle \mathbb{Z}, +\rangle$.

في التمارين من 11 إلى 18، حدّد إذا كانت مجموعة المصفوفات المعطاة بالنسبة إلى العملية المحددة _ جمع المصفوفات أو ضربها _ زمرة. تذكّر أنّ **المصفوفة القطرية (diagonal matrix)** مصفوفة مربعة عناصرها غير الصفرية تقع فقط على **القطر الرئيس (main diagonal)**، وذلك من الزاوية العلوية اليسرى إلى الزاوية السفلية اليمنى. **المصفوفة المثلثة العلوية (upper triangular)** مصفوفة مربعة عناصرها جميعها أسفل القطر الرئيس أصفار. يرتبط بكل مصفوفة A من الدرجة $n \times n$ عدد يسمى محددة A، ويرمز له بالرمز $det\,(A)$. إذا كان كل من A و B مصفوفتين من الدرجة $n \times n$، فإنّ $det\,(AB) = det\,(A)\, det\,(B)$. وكذلك $det\,(I_n) = 1$، وتكون A مصفوفة ذات معكوس إذا وفقط إذا كان $det(A) \neq 0$.

11. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى جمع المصفوفات.

12. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

13. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$، التي لا يحوي قطرها الصفر بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

14. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$، حيث عناصر القطر جميعها إما 1 أو -1 بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

15. جميع المصفوفات المثلثة العلوية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

16. جميع المصفوفات المثلثة العلوية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى جمع المصفوفات.

17. جميع المصفوفات المثلثة العلوية من الدرجة $n \times n$، التي محددها 1 بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

18. جميع المصفوفات من الدرجة $n \times n$، التي محددها إما 1 أو -1 بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

19. لتكن S مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -1. عَرِّف * على S كالآتي:

$$a * b = a + b + ab$$

أ. أثبت أنّ * عملية ثنائيّة على S.

ب. أثبت أنّ $\langle S, * \rangle$ زمرة.

ج. أوجد حلّ المعادلة $2 * x * 3 = 7$ في S.

20. هذا التمرين يثبت وجود زمرتين غير متماثلتين على مجموعة من أربعة عناصر.

لتكن المجموعة $\{e, a, b, c\}$، حيث e العنصر المحايد لعملية الزمرة، عندها سيبدأ جدول الزمرة، كما في الجدول 22.4. المربع المشار إليه بعلامة الاستفهام لا يمكن تعبئته بـ a، بل يجب تعبئته إمًّا بالعنصر المحايد e أو بعنصر يختلف عن e وa، وفي الحالة الأخيرة ودون أن يكون هناك فقدان للتعميم، نفترض أنّ هذا العنصر هو b. فإذا عُبئ هذا المربع بـ e، فيمكن إكمال الجدول بطريقتين للحصول على زمرة، أوجِدْ هذين الجدولين. (لا حاجة للتحقق من قانون التجميع)، وإذا عُبّئ هذا المربع بـ b، فإنّ الجدول يكتمل بطريقة واحدة فقط ليعطي زمرة، أوجِدْ هذا الجدول. (مرة أخرى، لا حاجة للتحقق من قانون التجميع). لديك الآن ثلاثة جداول: اثنان منها يشكلان زمرتين متماثلتين، حدّد أيّ الجداول هي، وأعطِ الدالّة الأحاديّة الغامرة التي تشكل تماثلًا، وذلك بإعادة تسمية العناصر.

أ. هل الزمر التي عدد عناصرها 4 جميعها إبداليّة؟

ب. أيّ الجداول يعطي زمرة تماثل الزمرة U_4، فنعلم بذلك أنّ العملية الثنائيّة المعرّفة بالجدول تجميعيّة؟

ج. أثبت أنّ الزمرة المعطاة في أحد الجدولين الآخرين هي في حقيقتها الزمرة نفسها في تمرين 14، وذلك عندما تأخذ n قيمة محددة، وبذلك نعلم أنّ العملية المعرفة بذلك الجدول هي تجميعيّة أيضًا.

21. تبعًا لتمرين 12 في الفصل 2 يوجد 16 عملية محتملة على مجموعة من عنصرين. فكم منها تعطي نظام الزمرة؟ وكم من الـ 19683 عملية ثنائيّة محتملة على مجموعة من 3 عناصر تعطي نظام الزمرة؟

مفاهيم

22. اعتبر المسلّمات $\mathcal{G}_1$ $\mathcal{G}_2$ و$\mathcal{G}_3$ للزمرة. التي قدمناها بالترتيب $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_3$. من الترتيبات المعتبرة لطرح هذه المسلمات $\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_3 \mathcal{G}_1$، $\mathcal{G}_3 \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2$، $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_3 \mathcal{G}_2$، $\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_3$، $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_3 \mathcal{G}_2$ و$\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_3$ من هذه الترتيبات الستة المحتملة، ثلاثة فقط مقبولة بوصفها تعريفًا. أيّ هذه الترتيبات غير مقبول؟ ولماذا؟ (تذكّر أنّ معظم المدرسين يسألون الطلاب أن يعرّفوا الزمرة في اختبار واحد على الأقل).

الجدول 22.4

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	$?$		
b	b			
c	c			

23. التعريفات الآتية للزمرة مأخوذة _ حتى فيما يتعلق بالتهجئة وعلامات الترقيم _ من أوراق عمل طلاب كتبوها على نحو متسرع من غير اهتمام. انتقد هؤلاء الطلاب.

أ. الزمرة G هي مجموعة من العناصر مع عملية ثنائيّة * حيث تتحقق الشروط الآتية:

* تجميعيّة.

يوجد $e \in G$ حيث

$$\text{العنصر المحايد} = e * x = x * e = x$$

لكل $a \in G$ يوجد a' (معكوس) حيث

$$a.\ a' = a'.\ a = e$$

ب. الزمرة هي مجموعة G حيث

العملية على G تجميعيّة.

يوجد عنصر محايد (e) في G.

لكل $a \in G$ يوجد a' (معكوس لكل عنصر).

جـ. الزمرة هي مجموعة مع عملية ثنائيّة، حيث العملية الثنائيّة معرفة.

المعكوس موجود.

العنصر المحايد موجود.

د. المجموعة G تُسمَّى زمرة على العملية الثنائيّة *، حيث لكل $a, b \in G$ العملية الثنائيّة * تجميعيّة بالنسبة إلى الجمع.

يوجد عنصر $\{e\}$ حيث:

$$a * e = e * a = e$$

لكل عنصر a يوجد عنصر a' حيث:

$$a * a' = a' * a = e$$

24. أعطِ جدولًا لعملية ثنائيّة على المجموعة $\{e, a, b\}$ المكوّنة من ثلاثة عناصر تحقق المسلمات $\mathcal{G}_2$ و $\mathcal{G}_3$ للزمرة، ولكن لا تَحقق المسلمة $\mathcal{G}_1$.

25. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

__________ أ. يمكن أن تحوي الزمرة أكثر من عنصر محايد.

__________ ب. أيّ زمرتين من ثلاثة عناصر متماثلتان.

__________ جـ. أيّ معادلة خطية في الزمرة لها حلّ.

__________ د. الموقف الصحيح من التعريف هو حفظه، بحيث تستطيع أن تعيده كلمة، كلمة، كما جاء في الكتاب.

__________ هـ. أيّ تعريف يقدّمه الشخص للزمرة يكون صحيحًا، بشرط أنّ أيّ شيء يكون زمرة بحسب تعريف هذا الشخص، يكون زمرة بحسب تعريف الكتاب.

__________ و. أيّ تعريف يقدّمه الشخص للزمرة يكون صحيحًا، بشرط استطاعته أن يثبت أنّ أيّ شيء يحقّق هذا التعريف، فإنه يحقّق كذلك تعريف الكتاب وبالعكس.

__________ ز. أيّ زمرة منتهية مكوّنة من ثلاثة عناصر على الأكثر تكون إبداليّة.

__________ ح. المعادلة على الصورة $a * x * b = c$ لها دائمًا حلّ وحيد في الزمرة.

__________ ط. المجموعة الخالية يمكن أن تُعدّ زمرة.

__________ ي. كل زمرة تمثل بُنية جبرية ثنائية.

براهين مختصرة

سنعطي مثالًا لبرهان مختصر. هذه جملة مختصرة لبرهان أنّ معكوس العنصر a في الزمرة $\langle G, *\rangle$ يكون وحيدًا.

نفترض أنّ $a * a' = e$ و $a * a'' = e$، استعمل قانون الحذف من اليسار على المعادلة: $a * a' = a * a''$.

لاحظ أننا قلنا: "قانون الحذف من اليسار" وليس "المبرهنة 15.4". فنحن نفترض دائمًا أنّ اختصارنا قد أعطي بوصفه توضيحًا في أثناء مناقشة على الغداء، دون الإشارة إلى ترقيم الكتاب وبأقل ما يمكن من المصطلحات.

26. أعطِ اختصارًا بجملة واحدة لبرهان قانون الحذف من اليسار في المبرهنة 15.4.

27. أعطِ اختصارًا بجملتين على الأكثر لبرهان على أنّ $ax = b$ لها حل وحيد في الزمرة، كما في المبرهنة 16.4.

براهين

28. من إدراكنا البدهي لمفهوم تماثل الزمر، يتعيّن أن يكون واضحًا أنه إذا كان $\phi: G \to G'$ تماثلًا للزمر، فإنّ $\phi(e)$ هو العنصر المحايد e' للزمرة G'. تذكّر أنّ المبرهنة 14.3 أثبتت هذا في البنيتين الثنائيّتين المتماثلتين $\langle S, *\rangle$ و $\langle S', *'\rangle$. وبالطبع هذا يغطي حالة الزمر.

وكذلك يتعيّن أن يكون بدهيًّا أنه إذا كان a و a' معكوسين لبعضهما في G، فإنّ $\phi(a)$ و $\phi(a')$ معكوسان لبعضهما في G'، بمعنى أنّ $\phi(a)' = \phi(a')$. أعطِ برهانًا واضحًا للمتشكك الذي لا يستطيع أن يرى الغابة على الرغم من وجود الأشجار.

29. أثبت أنه إذا كانت G زمرة منتهية بعنصر محايد e وبعدد زوجي من العناصر، فإنه يوجد عنصر $a \neq e$ في G بحيث $a * a = e$.

30. لتكن $\mathbb{R}^*$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية جميعها ما عدا 0. عرّف * على $\mathbb{R}^*$ من خلال العلاقة $a * b = |a|b$.

أ. أثبت أنّ * عملية ثنائيّة تجميعيّة على $\mathbb{R}^*$.

ب. أثبت أنه يوجد عنصر محايد من اليسار للعملية * ومعكوس من اليمين لكل عنصر في $\mathbb{R}^*$.

جـ. هل $\mathbb{R}^*$ مع هذه العملية الثنائيّة زمرة؟

د. وضح أهمية هذا التمرين.

31. إذا كانت * عملية ثنائيّة على المجموعة S، يسمى العنصر x في S متساوي القوى **(idempotent)** مع العملية * إذا كان $x * x = x$ أثبت أنّ الزمرة تحوي متساوي قوى واحدًا فقط. (يمكنك استخدام أيّ من النظريات التي بُرهنت في الكتاب حتى الآن).

32. أثبت أنّ أي زمرة لها عنصر محايد e وتحقّق الخاصية $x * x = e$ لكل $x \in G$ تكون إبداليّة. [مساعدة: استخدم $(a * b) * (a * b)$].

33. لتكن G زمرة إبداليّة، وليكن $c * c * \ldots * c$ = c^n، n من المرات، حيث $c \in G$ و $n \in \mathbb{Z}^+$. اكتب برهانًا باستخدام الاستقراء الرياضي لإثبات أنّ:

$$(a * b)^n = (a^n) * (b^n) \text{ لكل } a, b \in G.$$

34. لتكن G زمرة ذات عدد منته من العناصر. أثبت أنه لكل $a \in G$ يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث إنّ $a^n = e$. ارجع إلى تمرين 33 لمعرفة معنى a^n. [مساعدة: استخدِم العناصر $e, a, a^2, a^3, \ldots, a^m$، حيث m هو عدد عناصر G، ثم استخدم قوانين الحذف].

35. أثبت أنه إذا كان $(a * b)^2 = a^2 * b^2$، حيث a و b عنصران في G، فإنّ $a * b = b * a$. ارجع إلى التمرين 33 لمعرفة معنى a^2.

36. لتكن G زمرة، ولتكن $a, b \in G$. أثبت أنّ $(a * b)' = a' * b'$ إذا وفقط إذا كان $a * b = b * a$.

37. لتكن G زمرة، وافترض أنّ $a * b * c = e$ حيث $a, b, c \in G$. أثبت أنه $b * c * a = e$ كذلك.

38. أثبت أنّ المجموعة G مع العملية الثنائيّة * التي تحقّق المسلمات من اليسار 1و2 و 3 المذكورة في صفحة 43 تشكل زمرة.

39. برهن على أنه إذا كانت G مجموعة غير خالية مع العملية الثنائيّة التجميعيّة *، بحيث $a * x = b$ و $y * a = b$ لها حلول في G لكل $a, b \in G$، فإنّ G تكون زمرة. [مساعدة: استخدم التمرين 38].

40. لتكن $\langle G, . \rangle$ زمرة. عرّف العملية الثنائيّة * على G بحيث: $a * b = b \,.\, a$

لكل $a, b \in G$. أثبت أنّ $\langle G, * \rangle$ زمرة، وأنها في الحقيقة تماثل $\langle G, . \rangle$.

[مساعدة: استخدم الدالّة ϕ، حيث $\phi(a) = a'$ لكل $a \in G$].

41. لتكن G زمرة، وليكن g عنصرًا في G. أثبت أنّ الدالّة i_g، حيث $i_g(x) = gxg'$ لكل $x \in G$ تشكّل تماثلًا من G إلى نفسها.

الفصل5 الزمر الجزئيّة Subgroups

الترميز والمصطلحات

حان الوقت لتوضيح بعض المصطلحات والرموز المتعارف على استخدامها في نظرية الزمر، فلا يُلزِم علماء الجبر أنفسهم استخدام الرمز * للإشارة إلى عملية ثنائيّة مختلفة عن عمليتي الجمع والضرب المعتادتين، فهم يكتبون رمز الجمع أو الضرب المعتادين، حتى إنهم يسمّون العملية جمعًا أو ضربًا بناءً على الرمز المستخدم، الرمز + هو بالطبع رمز الجمع، أمّا الضرب فيرمز له بكتابة العنصرين المضروبين متجاورين ومن غير نقطة ما لم يكن هناك مجالٌ للبس؛ لذلك فسوف نستخدم إمَّا الرمز $a+b$ الذي يُقرأ "مجموع a و b" ، أو الرمز ab الذي يقرأ "ضرب a وb" بدلًا من الرمز $a*b$. هناك اتفاق غير مكتوب على ضرورة استخدام الرمز + للدلالة بوضوح على أنّ العملية إبداليّة، فعلماء الجبر يشعرون بعدم الارتياح إذا ما شاهدوا $a+b \neq b+a$، ولهذا السبب فسوف نستخدم باستمرار رمز الضرب، حيثما لا يكون مضمونًا أنّ العملية إبداليّة.

يستخدم علماء الجبر الرمز 0 عادة للإشارة إلى محايد الجمع والرمز 1 للإشارة إلى محايد الضرب، وهم يفعلون ذلك حتى لو لم يكونا يمثلان العددين الصحيحين 0 و1، أمَّا في حالة الحديث عن أعداد مع إمكانية حدوث إشكال، فإنّ الرمزين e و u يستخدمان للعنصرين المحايدين، وعليه، فإنّ جدول زمرة من ثلاثة عناصر يمكن أن يكون مثل الجدول 1.5 أو – لأن الزمرة إبداليّة – يظهر جدول مثل الجدول 2.5. سوف نواصل في الحالات العامة استخدام الرمز e للإشارة إلى العنصر المحايد للزمرة.

الجدول 1.5

	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

من الشائع الإشارة إلى معكوس عنصر a في زمرة بالرمز a^{-1} في حالة رمز الضرب، وبالرمز $-a$ في حالة رمز الجمع، لذلك فسوف نستخدم هذين الرمزين من الآن فصاعدًا بدل الرمز a'.

لتكن n عددًا صحيحًا موجبًا، فإذا كان a عنصرًا من زمرة G برمز الضرب، فإننا نشير إلى حاصل الضرب $aaa...a$ المكوّن من n عامل a بالرمز a^n، ونعُدّ a^o هي العنصر المحايد e، ونشير إلى حاصل الضرب $a^{-1}a^{-1}a^{-1}...a^{-1}$ المكوّن من n عامل بالرمز a^{-n}، ومن السهل ملاحظة انطباق قانون الأسس المعتاد $a^ma^n=a^{m+n}$ لكل $m,n \in \mathbb{Z}$. الأمر واضح في الحالة $m,n \in \mathbb{Z}^+$، ونوضح حالة أخرى من خلال مثال:

$$a^{-2}a^5 = a^{-1}a^{-1}aaaaa = a^{-1}(a^{-1}a)\ aaaa = a^{-1}eaaaa = a^{-1}(ea)aaa$$

$$= a^{-1}aaaa = (a^{-1}a)\ aaa = eaaa = (ea)\ aa = aaa = a^3.$$

الجدول 2.5

$+$	0	a	b
0	0	a	b
a	a	b	0
b	b	0	a

أمَّا في حالة رمز الجمع، فإننا نشير إلى $a+a+a+\ ...\ +a$ المكون من n حد بالرمز na، كما نشير إلى $(-a)+(-a)+(-a)+\ldots+(-a)$ المكوّن من n حد بالرمز $-na$، ونعُدّ $0a$ هي العنصر المحايد، لكن في حالة الرمز na، فيجب الانتباه إلى أنّ n من $\mathbb{Z}$ وليست من G، وإنّ الإرباك الناتج من اعتبار n عنصرًا من G في الرمز na ، هو أحد الأسباب التي تجعلنا نميل إلى تقديم نظرية الزمر باستخدام رمز الضرب، حتى لو كانت العملية إبدالية، فلا أحد يخطئ في فهم n عندما تظهر بوصفها أُسًّا.

لنشرح مصطلحًا إضافيًا كثير الاستخدام ما يجعله جديرًا بالذكر في تعريف خاص.

تعريف 3.5 إذا كانت G زمرة، فإنّ رتبة **(order)** G، $|G|$، هي عدد عناصر G. (تذكّر من الفصل 0 أنه لأيّ مجموعة S، $|S|$ هي عدد عناصر S). ■

المجموعات الجزئيّة والزمر الجزئيّة

ربما لاحظت أنّ لدينا أحيانًا زمرًا محتواة في زمر أكبر، فالزمرة $\mathbb{Z}$ مع الجمع مثلًا محتواة في الزمرة $\mathbb{Q}$ مع الجمع، التي هي بدورها محتواة في الزمرة $\mathbb{R}$ مع الجمع. عندما ننظر إلى الزمرة $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ على أنها محتواة في الزمرة $\langle\mathbb{R},+\rangle$، فيجب ملاحظة أنّ عملية الجمع + على عددين صحيحين m,n بوصفها عناصر من $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ تنتج العنصر نفسه $n+m$ الناتج عند اعتبار أنّ m,n عنصران من $\langle\mathbb{R},+\rangle$؛ لذلك – وعلى الرغم من أنّ $\mathbb{Q}^+$ محتواة بوصفها مجموعة في $\mathbb{R}$ – فإننا لا نعُدّ الزمرة $\langle\mathbb{Q}^+,.\rangle$ محتواة في $\langle\mathbb{R},+\rangle$، ففي هذا المثال $2.3=6$ في $\langle\mathbb{Q}^+,\cdot\rangle$، في حين $2+3=5$ في $\langle\mathbb{R},+\rangle$، ولا نشترط أن تكون المجموعة في زمرة ما، هي مجموعة جزئيّة من مجموعة زمرة أخرى وحسب، بل نشترط علاوة على ذلك أنّ عملية الزمرة على المجموعة الجزئيّة هي العملية المتولّدة (*induced operation*)، التي تعطي لكل زوج مرتب من المجموعة الجزئيّة الناتج نفسه الذي تعطيه عملية الزمرة على المجموعة الكليّة.

تعريف 4.5 إذا كانت H مجموعة جزئيّة من زمرة G مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائيّة على G، وكانت H ذاتها تشكل زمرة مع العملية المتولّدة من G، فإنّ H تكون **زمرة جزئية** (***subgroup***) من G. سوف نستخدم الرمز $H \le G$ أو $G \ge H$ للدلالة على أنّ H زمرة جزئيّة من G، والرمز $H < G$ أو $G > H$ يعني أنّ $H \le G$ لكن $H \neq G$. ■

لذلك، $\langle\mathbb{Z},+\rangle < \langle\mathbb{R},+\rangle$، لكن $\langle\mathbb{Q}^+,.\rangle$ ليست زمرة جزئيّة من $\langle\mathbb{R},+\rangle$ على الرغم من أنّ $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}$ بوصفها مجموعات. لأيّ زمرة G، فإنّ G ذاتها و $\{e\}$ زمرتان جزئيّتان من G، بحيث إنّ e هو العنصر المحايد في G.

تعريف 5.5 إذا كانت G زمرة، فإنّ الزمرة الجزئيّة G ذاتها هي **الزمرة الجزئيّة غير الفعلية** (***improper subgroup***) من G، في حين أنّ الزمر الجزئيّة الأخرى كلها زمر **جزئيّة فعلية** (***proper subgroups***). الزمرة الجزئيّة $\{e\}$ هي **الزمرة الجزئيّة التافهة** (***trivial subgroup***) من G، والزمر الجزئيّة الأخرى كلها غير تافهة (***nontrivial***). ■

ننتقل الآن إلى بعض التوضيحات.

مثال 6.5 لتكن $\mathbb{R}^n$ زمرة الجمع للمتجهات الصفية من الرتبة n بإحداثيات حقيقية، المجموعة الجزئيّة المكوّنة من المتجهات كلها التي 0 هو المدخل في أول مركبة هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{R}^n$. ▲

مثال 7.5 $\mathbb{Q}^+$ بالنسبة إلى الضرب هي زمرة جزئيّة فعلية من $\mathbb{R}^+$ بالنسبة إلى الضرب. ▲

مثال 8.5 الجذور النونية للواحد في $\mathbb{C}$ تشكل زمرة جزئيّة U_n من زمرة الأعداد المركبة غير الصفرية $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب. ▲

مثال 9.5 هناك نوعان مختلفان من بنَى الزمر ذات الرتبة 4 (انظر تمرين 20 من الفصل 4). ونَصِفهما من خلال جدولي الزمر لهما (جدول 10.5 و 11.5). الزمرة V **هي زمرة كلاين الرباعية** (***Klein* 4-group**)، وقد أُخذ الرمز V من الكلمة الألمانية (*Vier*) وتعني أربعة. الزمرة $\mathbb{Z}_4$ تماثل زمرة الجذور الرابعة للواحد بالنسبة إلى الضرب $U_4=\{1, i, -1, -i\}$.

الزمرة الجزئيّة الفعلية غير التافهة الوحيدة من $\mathbb{Z}_4$ هي $\{0, 2\}$ لاحظ أنّ $\{0, 3\}$ ليست زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}_4$؛ لأنّ $\{0,3\}$ ليست مغلقة بالنسبة إلى +، فعلى سبيل المثال: $3 + 3 = 2$ و $2 \notin \{0, 3\}$. لكن الزمرة V لها ثلاث زمر جزئيّة فعلية غير تافهة، وهي: $\{e,a\}$ و $\{e, b\}$. و $\{e,c\}$ هنا $\{e, a, b\}$ ليست زمرة جزئيّة؛ لأنّ $\{e, a, b\}$ ليست مغلقة بالنسبة إلى عملية V، حيث إنّ $ab=c$ و $c \notin \{e, a,b\}$. ▲

الجدول 11.5

V:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

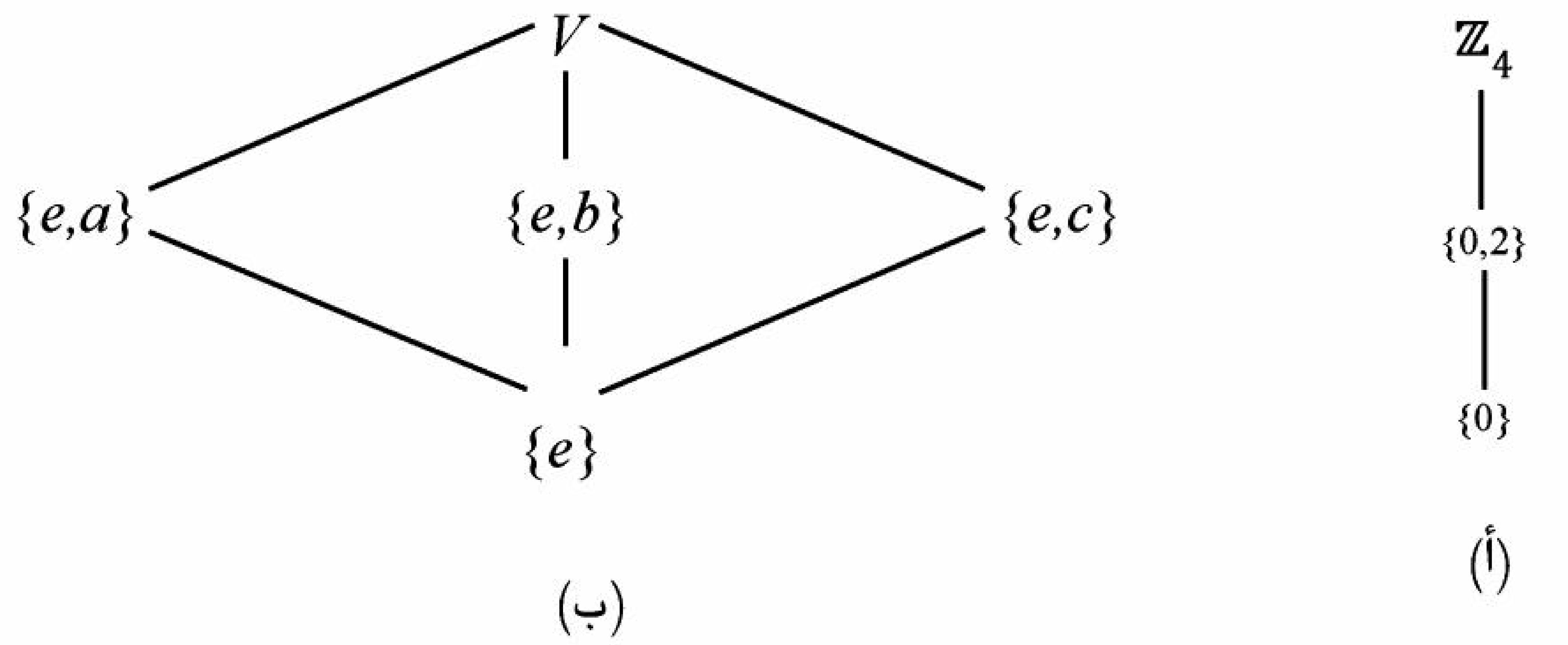
الجدول 10.5

$\mathbb{Z}_4$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

غالبًا ما يكون رسم مخطط الزمر الجزئيّة للزمر الجزئيّة لزمرة ما مفيدًا. إن جريان خط متجه إلى الأسفل من زمرة G إلى زمرة H، يعني أنّ H زمرةٌ جزئيّة من G؛ لذلك، فإنّ الزمرة الأكبر توضع في أعلى المخطط. الشكل 12.5 يحتوي على مخططي الزمر الجزئيّة لكل من $\mathbb{Z}_4$ و V في مثال 9.5.

لاحظ أنه إذا كان $H \leq G$ و $a \in H$، فإنّ المعادلة $ax = a$ يجب أن يكون لها حلّ وحيد بحسب المبرهنة 16.4، وهذا الحلّ هو تحديدًا العنصر المحايد من H، لكن هذه المعادلة يمكن النظر إليها بوصفها معادلة في G، ونرى أنّ هذا الحلّ الوحيد يجب أن يكون أيضًا هو العنصر المحايد e من G، وبتطبيق حجة مشابهة على المعادلة $ax = e$ بوصفها معادلة في H و G نستنتج أنّ a^{-1}، معكوس a في G، هو أيضًا معكوس a في الزمرة الجزئيّة H.



الشكل 12.5 (أ) مخطط زمر $\mathbb{Z}_4$ الجزئيّة.
(ب) مخطط زمر V الجزئيّة.

13.5 مثال لتكن F زمرة جميع الدوالّ ذوات القيم الحقيقية التي مجالها $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع. المجموعة الجزئيّة من F والمكوّنة من تلك الدوالّ المتصلة هي زمرة جزئيّة من F؛ لأن مجموع دالّتين متصلتين متصل، والدالّة f حيث $f(x)=0$ لكل x هو العنصر المحايد الجمعيّ، وإذا كان f متصلًا، فإنّ $-f$ متصل. ▲

من الملائم توافر خطوات روتينية لتحديد ما إذا كانت مجموعة جزئيّة من زمرة G زمرة جزئيّة من G. المثال 13.5 يظهر مثل هذا الروتين، وفي المبرهنة الآتية سنثبت صلاحيته بعناية. على الرغم من توافر معيار موجز مكوّن من شرط واحد فقط، إلاّ أننا نفضّل هذه المبرهنة الأكثر وضوحًا لمقرّرٍ دراسي أول.

14.5 مبرهنة تكون مجموعة جزئيّة H من زمرة G زمرةً جزئيّة من G إذا وفقط إذا كان:

1- H مغلقة بالنسبة إلى عملية G الثنائيّة،

2- عنصر G المحايد e موجودًا في H،

3- لكل $a \in H$ يكون صحيحًا أن $a^{-1} \in H$ أيضًا.

البرهان إن ضمان تحقّق الشروط 1و2 و3 إذا كان $H \leq G$ ينتج مباشرة عن تعريف الزمرة الجزئيّة وعن الملاحظات السابقة للمثال 13.5.

في المقابل، افترض أنّ H مجموعة جزئيّة من الزمرة G، بحيث تتحقّق الشروط 1، و2 و3. ينتج من 2 على الفور أنّ $\mathscr{G}_2$ متحقق. كذلك $\mathscr{G}_3$ متحقّق من 3، ويبقى التأكد من المسلّمة التجميعيّة $\mathscr{G}_1$؛ لكن وبالتأكيد، فإنه لكل $a,b,c \in H$ يكون صحيحًا أنّ $(ab)c= a(bc)$ في H؛ لأننا نستطيع النظر إليها بوصفها معادلة في G، حيث يتحقّق قانون التجميع؛ لذلك فإنّ $H \leq G$. ◆

15.5 مثال لتكن F كما في المثال 13.5. المجموعة الجزئيّة من F المكوّنة من الدوالّ القابلة للاشتقاق زمرة جزئيّة من F؛ لأن مجموع دالّتين قابلتين للاشتقاق قابلٌ للاشتقاق، الدالّة الثابتة 0 قابلة للاشتقاق، وإذا كان f قابلًا للاشتقاق، فإن $-f$ قابل للاشتقاق. ▲

16.5 مثال تذكّر من الجبر الخطي أنّ كل مصفوفة مربعة A تقترن بعدد $\det(A)$ يسمّى محددتها، وأنّ A تكون ذات معكوس إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$، وإذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة نفسها، فإنه يمكن إثبات أنّ $\det(AB) = \det(A).\det(B)$. لتكن G هي زمرة الضرب للمصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n\times n$ ذات المدخلات من $\mathbb{C}$، ولتكن T هي المجموعة الجزئيّة من G المكوّنة من المصفوفات ذات المحدّدة 1. المعادلة $\det(AB) = \det(A).\det(B)$ تبيّن أنّ T مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. تذكّر أنّ المصفوفة المحايدة I_n محددتها 1. ومن المعادلة $\det(A).\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ نرى أنه إذا كان $\det(A) = 1$، فإنّ $\det(A^{-1}) = 1$. المبرهنة 14.5 تثبت أنّ T زمرة جزئيّة من G. ▲

الزمر الجزئيّة الدورية

لننظر في كبر زمرة جزئيّة H من $\mathbb{Z}_{12}$ إذا ما احتوت العنصر 3، فيجب أن تحوي العنصر المحايد 0 و $3+3$ التي هي 6؛ لذلك يجب أن تحوي $6+3$ التي هي 9. لاحظ أنّ معكوس 3 هو 9، وأنّ معكوس 6 هو 6، إذ من السهل التأكد من أنّ $H = \{0,3,6,9\}$ زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}_{12}$، وأنها أصغر زمرة جزئيّة تحوي 3.

لنحاكي هذا التبرير في حالة أكثر عمومًا، فكما نوّهنا من قبل، نستخدم دائمًا رمز الضرب في أيّ مناقشة عامة، ولتكن G زمرة، ولتكن $a \in G$. إن الزمرة الجزئيّة من G التي تحوي a يجب – بحسب المبرهنة 14.5– أن تحوي a^n، وهو ناتج حاصل ضرب a في نفسها n مرّة لأي عدد صحيح موجب n، حيث تعطي قوى a الصحيحة الموجبة هذه مجموعة مغلقة بالنسبة إلى الضرب، لكن من الممكن أن يكون معكوس a ليس في هذه المجموعة، ومن المؤكد أنّ الزمرة الجزئيّة التي تحوى a يجب أن تحوي a^{-1}، وبوجه عام، يجب أن تحوي a^{-m} لكل $m \in \mathbb{Z}^+$، ويجب أن تحوي العنصر المحايد $e=a^0$. يُلخّص ما سبق بأنّ الزمرة الجزئيّة من G التي تحوي العنصر a، يجب أن تحوي العناصر a^n كلها (أو na لرمز الجمع) لكل $n \in \mathbb{Z}$، أي إنّ الزمرة الجزئيّة التي تحوي a يجب أن تحوي $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. لاحظ أنّ a^n (قوى a) ليست بالضرورة مختلفة، ففي الزمرة V في مثال 9.5 مثلًا،

$a^2=e$، $a^3=a$، $a^4=e$، $a^{-1}=a$ وهكذا.

17.5 مبرهنة وبهذا نكون قد أنجزنا إثبات المبرهنة الآتية تقريبًا.

لتكن G زمرة، ولتكن $a \in G$. عندئذٍ تكون:

$$H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

زمرة جزئيّة من G، وهي أصغر[3] زمرة جزئيّة من G تحوي a، أي إنّ أيّ زمرة جزئيّة تحوي a ستحوي H.

3- ربما نحتاج إلى أن نميّز عند الحاجة بين مصطلحي أصغريّ (minimal) وأصغر (smallest)، عند إطلاقهما على مجموعات جزئيّة ذات خاصية ما من مجموعة S. تكون المجموعة الجزئيّة H من S أصغرية بالنسبة إلى الخاصية إذا كانت H تحقق الخاصية، وليس هناك مجموعة جزئيّة $K \subset H$، $K \neq H$ تحقق الخاصية، وإذا كانت H تحقق الخاصية و $H \subseteq K$ لكل مجموعة جزئيّة K تحقق الخاصية، فإنّ H هي أصغر مجموعة جزئيّة تحقق الخاصية، ويمكن أن يكون هناك أكثر من مجموعة جزئيّة أصغريّة، لكن يمكن أن تتوافر مجموعة جزئيّة أصغر واحدة فقط. ولتوضيح ذلك، $\{e,a\}$، و $\{e,b\}$، و $\{e,c\}$ هي زمر جزئيّة أصغرية غير تافهة من V (انظر الشكل 12.5)، لكن V لا تحوي زمرة جزئيّة أصغر غير تافهة.

البرهان سنفحص الشروط الثلاثة على المجموعة الجزئيّة من زمرة لتعطي زمرة جزئيّة (الواردة في المبرهنة 14.5)، ولأنّ $a^r a^s = a^{r+s}$ لكل $r, s \in \mathbb{Z}$، فنرى أنّ الضرب في G لعنصرين من H يبقى في H، ما يعني أنّ H مغلقة بالنسبة إلى عملية الزمرة G، كذلك $a^0=e$، وعليه، فإنّ $e \in H$، ولـ $a^r \in H$ يكون $a^{-r} \in H$ و $a^{-r}a^r = e$. نخْلُصُ إلى أن الشروط كلها متحققة و $H \leq G$.

بيّنت مناقشتنا التي سبقت نصّ المبرهنة أنّ أيّ زمرة جزئيّة من G تحوي a يجب أن تحوي H؛ لذلك فإنّ H هي أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي a. ♦

18.5 مثال لتكن G زمرة، ولتكن $a \in G$. فإنّ الزمرة الجزئيّة $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ من G الموصوفة في المبرهنة 17.5 تسمّى **الزمرة الجزئيّة الدورية من G المولّدة بالعنصر a** (**cyclic subgroup of G generated by a**)، ويرمز لها بالرمز $\langle a \rangle$. ■

19.5 تعريف

العنصر a من G **يولّد** (**generates**) G، ويُعدّ **مولّدًا** (**generator**) للزمرة G إذا كان $\langle a \rangle = G$

تُعدّ الزمرة G **دورية** (**cyclic**) إذا وجد عنصر a في G يولّدها. ■

20.5 مثال

لتكن $\mathbb{Z}_4$ و V الزمرتين في المثال 9.5، فإنّ $\mathbb{Z}_4$ دورية و 1 و 3 مولّدان، أي إنّ:

$$\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \mathbb{Z}_4.$$

لكن V ليست دورية، حيث إنّ $\langle a \rangle$، و$\langle b \rangle$، و$\langle c \rangle$ زمر جزئيّة فعلية مكوّنة من عنصرين. بالطبع $\langle e \rangle$ هي الزمرة الجزئيّة التافهة المكوّنة من عنصر واحد. ▲

21.5 مثال

الزمرة $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى عملية الجمع هي زمرة دورية، و 1 و -1 مولّدان لها، وهما المولّدان الوحيدان، كذلك لـ $n \in \mathbb{Z}^+$، الزمرة $\mathbb{Z}_n$ بالنسبة إلى عملية الجمع مقياس n دورية، وإذا كان $n>1$، فإنّ 1 و n-1 مولّدان، لكن ربما يتوافر غيرهما. ▲

22.5 مثال لتكن الزمرة $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع، فدعنا نجد $\langle 3 \rangle$. الرمز هنا هو الجمع، و $\langle 3 \rangle$ يجب أن تحوي

3 ، 6 = 3+3، 9 = 3+3+3، وهكذا،

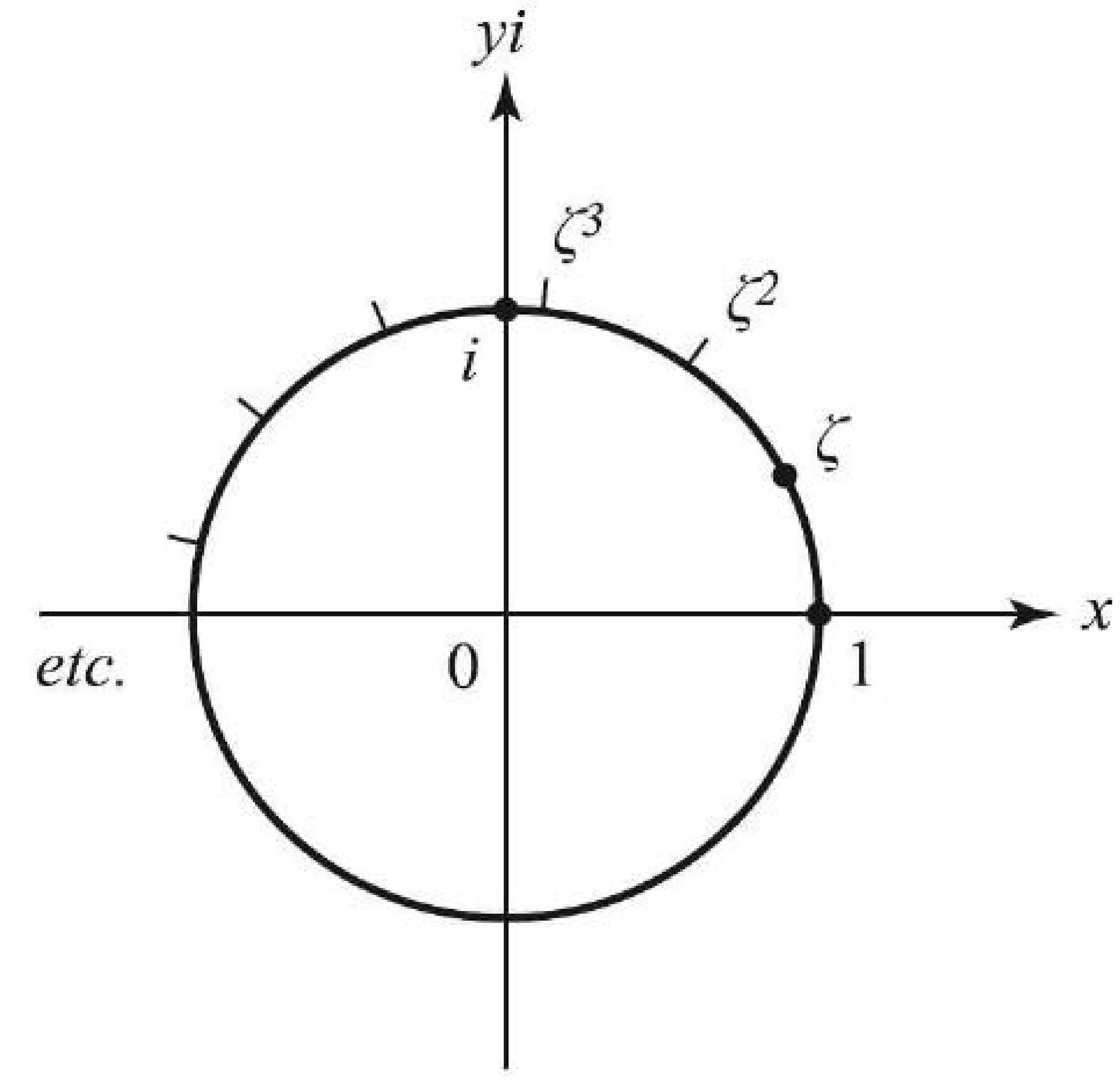
0، -3 ، -6 = -3+-3 ، -9 = -3+-3+-3، وهكذا.

أي إنّ الزمرة الجزئيّة الدورية المولّدة بـ 3 تتكوّن من مضاعفات 3 كلها، الموجبة والسالبة والصفر. نرمز لهذه الزمرة الجزئيّة بالرمز $3\mathbb{Z}$ إضافة إلى $\langle 3 \rangle$، وبطريقة مشابهة ستمثل $n\mathbb{Z}$ الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle n \rangle$ من $\mathbb{Z}$. لاحظ أنّ $6\mathbb{Z} < 3\mathbb{Z}$. ▲

23.5 مثال لكل عدد صحيح موجب n، لتكن U_n زمرة ضرب الجذور ذات الرتبة n للواحد في $\mathbb{C}$. يمكن تمثيل عناصر U_n هندسيًا بنقاط متساوية البعد على دائرة حول نقطة الأصل، كما في الشكل 24.5. النقطة الداكنة تمثل العدد:

$$\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

التفسير الهندسي – الموضّح في الفصل 1– لضرب الأعداد المركبة يبيّن في الحال أنه عند رفع ζ لقوى تسلك طريقها عكس عقارب الساعة حول الدائرة، مارّةً على عناصر U_n كلّها؛ لذلك، فإنّ U_n بالنسبة إلى الضرب هي زمرة دورية، و ζ مولد. الزمرة U_n هي الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle\zeta\rangle$ من الزمرة U المكوّنة من الأعداد المركبة z كلها، بحيث $|z|=1$ بالنسبة إلى الضرب. ▲



الشكل 24.5

تمارين5

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، حدّد ما إذا كانت المجموعة الجزئيّة المعطاة من الأعداد المركبة تشكل زمرة جزئيّة من زمرة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الجمع.

1. $\mathbb{R}$ **2.** $\mathbb{Q}^+$ **3.** $7\mathbb{Z}$

4. مجموعة الأعداد التخيلية الصافية $i\mathbb{R}$ بما فيها 0

5. مجموعة المضاعفات النسبية $\pi\mathbb{Q}$ للعدد π **6.** المجموعة $\{\pi^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$

7. أي من المجموعات في التمارين من 1 إلى 6 تشكل زمرًا جزئيّة من زمرة الأعداد المركبة غير الصفرية $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب؟

في التمارين من 8 إلى 13، حدّد ما إذا كانت المجموعة المعطاة من المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n\times n$ بمدخلات حقيقية تشكل زمرة جزئيّة من $GL(n,\mathbb{R})$.

8. المصفوفات ذات المحددة 2 من الدرجة $n\times n$.

9. المصفوفات القطرية من الدرجة $n\times n$ دون أصفار على القطر الرئيس.

10. المصفوفات المثلثة العليا من الدرجة $n \times n$ دون أصفار على القطر الرئيس.

11. المصفوفات ذات المحددة -1 من الدرجة $n\times n$.

12.المصفوفات ذات المحددة 1 أو -1 من الدرجة $n\times n$.

13. مجموعة المصفوفات A من الدرجة $n\times n$ ، بحيث $(A^T)\ A = I_n$. [هذه المصفوفات تُسمَّى (متعامدة ***orthogonal***). تذكّر أنّ A^T، منقول A، هو المصفوفة التي عمودها ذو الترتيب j هو صفّ A ذو الترتيب j لكل $1 \leq j \leq n$، وأنّ عملية المنقول تحقق الخاصية $(AB)^T = (B^T)\ (A^T)$].

لتكن F مجموعة جميع الدوالّ ذوات القيم الحقيقية التي مجالها $\mathbb{R}$ ، ولتكن $\widetilde{F}$ هي المجموعة الجزئيّة من F المكونة من تلك الدوالّ التي لها قيمة غير صفرية عند أيّ نقطة من $\mathbb{R}$. في التمارين من 14 حتى 19، حدّد ما إذا كانت المجموعة الجزئيّة المعطاة من F مع العملية المتولّدة تشكل (أ)– زمرة جزئيّة من الزمرة F بالنسبة إلى الجمع، (ب)– زمرة جزئيّة من الزمرة $\widetilde{F}$ بالنسبة إلى الضرب.

14. المجموعة الجزئيّة $\widetilde{F}$

15. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in F$، بحيث إنّ $f(1) = 0$

16. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in \widetilde{F}$، بحيث إنّ $f(1) = 1$

17. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in \widetilde{F}$، بحيث إنّ $f(0) = 1$

18. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in \widetilde{F}$، بحيث إنّ $f(0) = -1$

19. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من جميع الاقترانات الثابتة في F.

20. فيما يأتي تسع زمر. أعط قائمة كاملة لعلاقات الزمر الجزئيّة بالصورة $G_i \leq G_j$ المتحققة بين هذه الزمر المعطاة $G_1, G_2, \ldots, G_9$.

$G_1 = \mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_2 = 12\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_3 = \mathbb{Q}^+$ بالنسبة إلى الضرب.

$G_4 = \mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_5 = \mathbb{R}^+$ بالنسبة إلى الضرب.

$G_6 = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب.

$G_7 = 3\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_8 =$ مجموعة مضاعفات 6 الصحيحة بالنسبة إلى الجمع.

$G_9 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب.

21. اكتب خمسة عناصر على الأقل من كل من الزمر الدورية الآتية:

أ. $25\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

ب. $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ بالنسبة إلى الضرب.

جـ. $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب.

في التمارين من 22 إلى 25، صِف العناصر كلها في الزمرة الجزئيّة الدورية من $GL(2, \mathbb{R})$ المولّدة بالمصفوفة المعطاة من الدرجة 2×2

22. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

26. أيّ من الزمر الآتية دورية؟ لكل زمرة دورية، اذكر مولّداتها كلها.

$G_1 = \langle \mathbb{Z}, +\rangle$ $G_2 = \langle \mathbb{Q}, +\rangle$ $G_3 = \langle \mathbb{Q}^+, .\rangle$ $G_4 = \langle 6\mathbb{Z}, +\rangle$

$G_5 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب

$G_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب

في التمارين من 27 إلى 35، أوجد رتبة الزمرة الجزئيّة الدورية من الزمرة المعطاة والمولّدة بالعنصر المشار إليه.

27. الزمرة الجزئيّة من $\mathbb{Z}_4$ المولّدة بـِ 3

28. الزمرة الجزئيّة من V المولّدة بـِ c (انظر الجدول 11.5)

29. الزمرة الجزئيّة من U_6 المولّدة بـِ $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

30. الزمرة الجزئيّة من U_5 المولّدة بـِ $\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

31. الزمرة الجزئيّة من U_8 المولّدة بـِ $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

32. الزمرة الجزئيّة من U_8 المولّدة بـِ $\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

33. الزمرة الجزئيّة من زمرة الضرب G للمصفوفات كلها ذات المعكوس من الدرجة 4×4 المولّدة بـِ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

34. الزمرة الجزئيّة من زمرة الضرب G للمصفوفات كلها ذات المعكوس من الدرجة 4×4 المولّدة بـِ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35. الزمرة الجزئيّة من زمرة الضرب G للمصفوفات كلها ذات المعكوس من الدرجة 4×4 المولّدة بـِ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

36. أ. أكمل الجدول 25.5 لإعطاء الزمرة $\mathbb{Z}_6$ من 6 عناصر.

ب . احسب الزمر الجزئيّة $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 3 \rangle$, $\langle 4 \rangle$, $\langle 5 \rangle$ من الزمرة $\mathbb{Z}_6$ المعطاة في الفرع (أ).

جـ. أي العناصر هي مولّدات للزمرة $\mathbb{Z}_6$ في الفرع (أ)؟

د . أعط مخطط الزمر الجزئيّة للزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_6$ الواردة في الفرع (ب). (سوف نرى لاحقًا أنّ هذه هي كل الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_6$).

الجدول 25.5

$\mathbb{Z}_6$:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					

مفاهيم

في التمرينين 37 و 38، صحِّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

37. الزمرة الجزئيّة من زمرة G هي مجموعة جزئيّة H من G تحوي عنصر G المحايد e، وتحوي كذلك معكوس أيّ من عناصرها.

38. تكون الزمرة دوريةً إذا وفقط إذا وجد $a \in G$، بحيث إنّ $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

39. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

______ أ. قانون التجميع يتحقق في أيّ زمرة.

______ ب. ربما تتوافر زمرة لا يتحقق فيها قانون الحذف.

______ جـ. كل زمرة هي زمرة جزئيّة من ذاتها.

______ د. لكل زمرة زمرتان جزئيتان غير فعليتين بالضبط.

______ هـ. في كل زمرة دورية، كل عنصر هو مولّد.

______ و. الزمرة الدورية لها مولّد وحيد.

______ ز. كل مجموعة من الأعداد تشكل زمرة تحت الجمع، تشكل زمرة تحت الضرب أيضًا.

______ ح. الزمرة الجزئيّة يمكن تعريفها بوصفها مجموعة جزئيّة من الزمرة.

______ ط. $\mathbb{Z}_4$ هي زمرة دورية.

______ ي. كل مجموعة جزئيّة من أي زمرة تشكل زمرة جزئيّة بالنسبة إلى العملية المتولّدة.

40. أثبت من خلال مثال أنه من الممكن أن يكون للمعادلة التربيعية $x^2 = e$ أكثر من حلين في زمرة G بمحايد e.

براهين

في التمرينين 41 و42، لتكن $\phi : G \to G'$ تماثلًا من الزمرة $\langle G, *\rangle$ إلى الزمرة $\langle G', *'\rangle$. اكتب برهانًا لإقناع المتشكك في العبارة البدهية الواضحة.

41. إذا كانت H زمرة جزئيّة من G، فإنّ $\phi[H] = \{\phi(h) \mid h \in H\}$ زمرة جزئيّة من G'، أي إنّ التماثل يحمل الزمر الجزئيّة إلى زمر جزئيّة.

42. إذا كانت G دورية، فإنّ G' دورية.

43. أثبت أنه إذا كانت H وK زمرتين جزئيّتين من زمرة إبداليّة G، فإنّ:

$$\{hk \mid h \in H \text{ و } k \in K\}$$

هي زمرة جزئيّة من G.

44. أوجد الخلل في الحجة الآتية : "الشرط 2 من المبرهنة 14.5 فائض لإمكانية استنتاجه من 1 و3، فلو كان $a \in H$ ، فإنّ $a^{-1} \in H$ من 3، ومن 1، $aa^{-1} = e$ هو عنصر من H، وهذا يثبت 2".

45. بيّن أنّ المجموعة الجزئيّة غير الخالية H من زمرة G تكون زمرة جزئيّة من G، إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a,b \in H$. (هذا واحد من أكثر المعايير – المشار إليها قبل المبرهنة 14.5– إيجازًا).

46. برهن أنّ الزمرة الدورية التي لها مولّد واحد فقط يمكن أن تحوي على الأكثر عنصرين.

47. برهن أنه إذا كانت G زمرة إبداليّة مكتوبة بالضرب وبعنصر محايد e، فإنّ العناصر كلها x من G التي تحقّق المعادلة $x^2 = e$ تشكل زمرة جزئيّة H من G.

48 أعِد التمرين 47 للحالة العامة للمجموعة H المكوّنة من الحلول x كلها للمعادلة $x^n = e$ لعدد صحيح محدّد $n \geq 1$ في زمرة إبداليّة G بمحايد e.

49. أثبت أنه إذا كان $a \in G$، حيث G هي زمرة منتهية بمحايد e، فإنه يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$، بحيث إنّ $a^n = e$.

50 لتكن المجموعة الجزئيّة المنتهية غير الخالية H من الزمرة G مغلقةً بالنسبة إلى عملية G الثنائيّة. أثبت أنّ H زمرةٌ جزئيّة من G.

51 لتكن G زمرة، ولتكن a عنصرًا محددًا من G. أثبت أنّ:

$$H_a = \{x \in G \mid xa = a\,x\}$$

هي زمرة جزئيّة من G.

52. تعميمًا للتمرين 51، لتكن S أيّ مجموعة جزئيّة من زمرة G.

أ. أثبت أنّ $H_S = \{x \in G \mid xs = sx,\ \text{لكل}\ x \in S\}$ هي زمرة جزئيّة من G.

ب. بالرجوع إلى الفرع (أ)، الزمرة الجزئيّة H_G هي **مركز (center)** G. أثبت أنّ H_G زمرة إبداليّة.

53. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G. لـِ $a,b \in G$، لتكن $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$. أثبت أنّ $\backsim$ علاقة تكافؤٍ على G.

54. لمجموعتين H و K، نعرّف **التقاطع (*intersection*)** $A \cap K$ على النحو

$$H \cap K = \{x \mid x \in H \ \text{و}\ x \in K\}$$

أثبت أنه إذا كان $H \leq G$ و $K \leq G$، فإنّ $H \cap K \leq G$. (تذكّر أنّ $\leq$ ترمز إلى "زمرة جزئيّة من" وليس "مجموعة جزئيّة من").

55. برهن أنّ كل زمرة دورية هي إبداليّة.

56. لتكن G زمرة، ولتكن $G_n = \{g^n \mid g \in G\}$. تحت أيّ فرضيات على G يمكننا إثبات أنّ G_n زمرة جزئيّة من G؟

57. أثبت أنّ الزمرة التي ليس لها زمر جزئيّة فعلية غير تافهة تكون دورية.

الفصل 6 الزمر الدورية Cyclic Groups

تذكّر الحقائق والرموز الآتية من الفصل 5. إذا كانت G زمرة و $a \in G$، فإنّ

$$H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

زمرة جزئية من G (المبرهنة 17.5). هذه الزمرة هي **الزمرة الجزئيّة الدورية** $\langle a \rangle$ **من** G **المولّدة بـ** a (**cyclic subgroup** $\langle a \rangle$ **of** G **generated by** a). كذلك، لزمرة معطاة G وعنصر a من G، إذا كان:

$$G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

فإنّ a **مولّد** (**generator**) لـ G والزمرة $G= \langle a \rangle$ **دورية** (**cyclic**). سنقدّم الآن مصطلحًا جديدًا. لتكن a عنصرًا من زمرة G، فإذا كانت الزمرة الجزئيّة $\langle a \rangle$ من G منتهية، فإنّ **رتبة** a (**order**) هي الرتبة $|\langle a \rangle|$ لهذه الزمرة الجزئيّة، وبخلاف ذلك نقول: إنّ a من **رتبة لا نهائية** (**infinite order**). سوف نرى في هذا الفصل أنه إذا كان $a \in G$ ذا رتبة منتهية m، فإنّ m هي أصغر عدد صحيح موجب، بحيث إنّ $a^m = e$.

إنّ الهدف الأول لهذا الفصل هو وصف الزمر الدورية كلها والزمر الجزئيّة كلها من الزمر الدورية، وهذا ليس تمرينًا تافهًا، سنرى لاحقًا أنّ الزمر الدورية تشكل وحدات بناء لجميع الزمر الإبداليّة الصغيرة صغرًا كافيًا، وعلى وجه الخصوص للزمر الإبداليّة المنتهية كلها، فالزمر الدورية أساسية لفهم الزمر.

خصائص أساسية للزمر الدورية

نبدأ بإثبات أنّ الزمر الدورية إبداليّة

مبرهنة 1.6 كل زمرة دورية هي إبداليّة.

البرهان لتكن G زمرة دورية، ولتكن a مولدًا لـ G بحيث إنّ:

$$G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

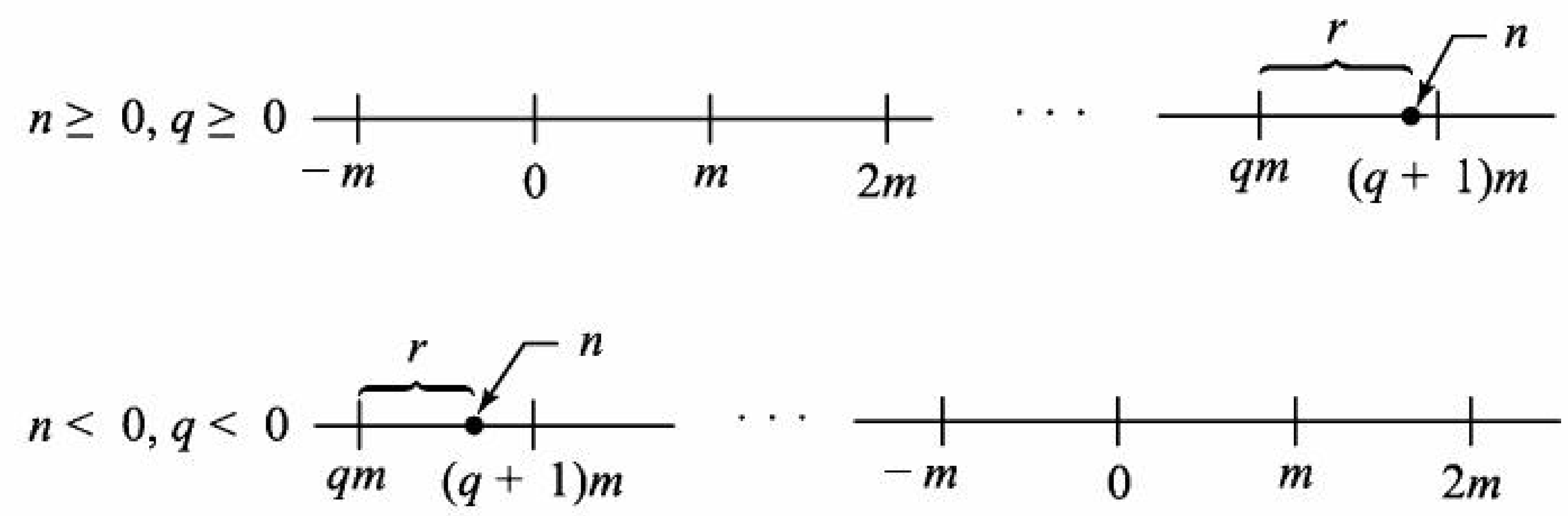
إذا كان g_1 و g_2 أي عنصرين من G، يوجد عددان صحيحان r و s، بحيث إنّ $g_1 = a^r$ و $g_2 = a^s$؛ لذلك:

$$g_1 g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = g_2 g_1$$

وعليه، تكون G إبداليّة. ◆

سوف نواصل استخدام رمز الضرب في عملنا العام حول الزمر الدورية على الرغم من أنها إبداليّة.

خوارزمية القسمة الآتية تبدو تافهة، ولكنها أداة أساسية لدراسة الزمر الدورية:



الشكل 2.6

3.6 خوارزمية القسمة لـ $\mathbb{Z}$

(Division Algorithm for $\mathbb{Z}$): إذا كان m عددًا صحيحًا موجبًا و n أي عدد صحيح، فإنه يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r، بحيث إنّ:

$$n = mq + r \text{ و } 0 \leq r < m.$$

البرهان

سنعطي توضيحًا تخطيطيًا بدهيًّا باستخدام الشكل 2.6. عيّن مضاعفات m وموقع n على محور الأعداد الحقيقية (x-axis). الآن، إمّا أن تقع n على مضاعف qm لـ m وتؤخذ r القيمة 0، أو أن تقع n بين مضاعفين لـ m. عند حدوث الحالة الأخيرة، لتكن qm هي أول مضاعف لـ m على يسار n، فتكون r كما في الشكل 2.6. لاحظ أنّ $0 \leq r < m$. وحدانية q و r تنتج من أنه لو لم تكن n مضاعفًا لـ m بحيث يمكن أخذ $r = 0$، لتوافر مضاعف وحيد qm لـ m إلى يسار n وعلى مسافة أقل من m عن n، كما في الشكل 2.6. ◆

في رموز خوارزمية القسمة، يسمى q **ناتج القسمة** (أو **خارج القسمة**) (**quotient**) و r **باقي القسمة** (**remainder**) غير سالب عند قسمة n على m.

4.6 مثال

أوجد ناتج القسمة q والباقي r عند قسمة 38 على 7 بحسب خوارزمية القسمة.

الحلّ

مضاعفات 7 الموجبة هي 7, 14, 21, 28, 35, 42, ... لاختيار المضاعف الذي يترك باقيًا غير سالب أقل من 7 نكتب:

$$38 = 35 + 3 = 7(5) + 3$$

لذا، فناتج القسمة $q=5$ والباقي $r=3$. ▲

5.6 مثال أوجد ناتج القسمة q والباقي r عند قسمة -38 على 7 بحسب خوارزمية القسمة.

الحل مضاعفات 7 السالبة هي -7، -14، -21، -28، -35، -42، ... .ولاختيار المضاعف الذي يترك باقيًا غير سالب أقل من 7 نكتب:

$$-38 = -42 + 4 = 7(-6) + 4$$

لذا، فناتج القسمة $q=-6$ والباقي $r=4$. ▲

سوف نستخدم خوارزمية القسمة في إثبات أنّ الزمرة الجزئيّة H من زمرة دورية G تكون دوريةً كذلك. فكّر لحظة فيما علينا فعله للبرهنة على ذلك، علينا أن نستخدم تعريف الزمرة الدورية طالما أننا لم نثبت بعد سوى القليل عن الزمر الدورية. أي إنّ علينا أن نستخدم حقيقة أنّ G لها عنصر مولّد a، ثم علينا أن نقدّم بدلالة هذا المولّد a مولّدًا $c = a^m$ لـ H لاستنتاج أنّ H دورية. في الواقع هناك خيار طبيعي واحد فقط للقوّة m لـ a يمكننا تجريبه، فهل يمكنك تخمينه قبل أن تقرأ إثبات المبرهنة؟

6.6 مبرهنة الزمرة الجزئيّة من زمرة دورية تكون دورية.

البرهان لتكن G زمرة دورية مولّدة بـ a، ولتكن H زمرة جزئيّة من G. إذا كان $H=\{e\}$، فإنّ $H = \langle e \rangle$ دورية. وإذا كان $H \neq \{e\}$، فإنّ هناك $n \in \mathbb{Z}^+$، بحيث إنّ $a^n \in H$.

ليكن m أصغر عدد صحيح في $\mathbb{Z}^+$ بحيث إنّ $a^m \in H$

ندّعي أنّ $c = a^m$ يولّد H، أي إنّ

$$H = \langle a^m \rangle = \langle c \rangle$$

يجب أن نبين أنّ كل $b \in H$ هي من قوى c، ولأنّ $b \in H$ و $H \leq G$، فيوجد n بحيث إنّ $b = a^n$. أوجد q و r بحيث إنّ:

$$n = mq + r \quad \text{حيث} \quad 0 \leq r < m$$

بناءً على خوارزمية القسمة؛ لذلك:

$$a^n = a^{mq+r} = (a^m)^q a^r،$$

وعليه، يكون:

$$a^r = (a^m)^{-q} a^n.$$

الآن، لأنّ $a^n \in H$، $a^m \in H$، و H زمرة، فإنّ كلًّا من $(a^m)^{-q}$ و a^n في H.

لذلك فإنّ

$(a^m)^{-q} a^n \in H$؛ أي أن $a^r \in H$.

لأنّ m كانت أصغر عدد صحيح موجب، بحيث إنّ $a^m \in H$ و $0 \leq r < m$، يجب أن يكون $r = 0$. لذلك، $n = qm$ و

$$b = a^n = (a^m)^q = c^q,$$

ولذلك، b من قوى c. ♦

كما لوحظ في المثالين 21.5 و 22.5 أنّ $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع دورية، ولأي عدد صحيح موجب n تكون المجموعة $n\mathbb{Z}$ المكوّنة من مضاعفات n زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع، وهي تحديدًا الزمرة الجزئيّة الدورية المولدة بـ n. المبرهنة 6.6 تبيّن أنّ هذه الزمر الجزئيّة الدورية هي الزمر الجزئيّة الوحيدة من $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع، وهذا ما نصوغه بوصفه نتيجة.

7.6 نتيجة الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع هي بالتحديد الزمر $n\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع لـ $n \in \mathbb{Z}$.

تعطينا هذه النتيجة طريقة رائعة لتعريف القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين موجبين r و s. التمرين 45 يبين أنّ $H = \{nr + ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئيّة من الزمرة $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع. لذلك يجب أن تكون H دورية ولها مولّد d يمكننا اختياره موجبًا.

8.6 تعريف ليكن r و s عددين صحيحين موجبين. المولّد الموجب d للزمرة الدورية

$$H = \{nr + ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

بالنسبة إلى الجمع هو **القاسم المشترك الأعظم** (**greatest common divisor**) (ويختصر gcd) لـ r و s. نكتب $d = \gcd(r,s)$. ■

من التعريف لاحظ أنّ d قاسم لكل من r و s ؛ لأن كلًّا من $r = 1r + 0s$ و $s = 0r + 1s$ في H، ولأنّ $d \in H$، فيوجد عددان صحيحان n و m ، حيث:

$$d = nr + ms.$$

نرى أنّ أيّ عدد صحيح يقسم كلًّا من r و s يقسم الطرف الأيمن من هذه المعادلة؛ ولذلك يجب أن يكون قاسمًا لـ d كذلك، لهذا يجب أن تكون d أكبر عدد يقسم كلًّا من r و s؛ وهذا تعليل الاسم الذي أُعطي لـ d في التعريف 8.6.

9.6 مثال أوجد gcd لـ 42 و 72.

الحل القواسم الموجبة لـ 42 هي 42 ,21 ,14 ,7 ,6 ,3 ,2 ,1. القواسم الموجبة لـ 72 هي 4 ,3 ,2 ,1, 72 ,36 ,24 ,18 ,12 ,9 ,8 ,6. القاسم المشترك الأعظم هو 6. لاحظ أنّ $(42)(-5)+(72)(3)=6$ هناك خوارزمية للتعبير عن القاسم المشترك الأعظم d بدلالة r و s على الصورة $d = nr + ms$، لكننا لا نحتاج إلى استخدامها هنا. ▲

يكون العددان الصحيحان الموجبان **أوّليّين نسبيًا (relatively prime)** إذا كان gcd لهما هو 1، مثلًا: 12 و 25 أوّليّان نسبيًّا، لاحظ أنه ليس لهما عامل أوّلي مشترك. سنحتاج في مناقشتنا للزمر الجزئيّة من زمر دورية إلى معرفة ما يأتي:

إذا كان s و r أوّليّين نسبيًّا، وكان r تقسم sm، فإنّ r يجب أن تقسم m.	(1)

لنبرهن ذلك. إذا كان r و s أوّليّين نسبيًّا، فإنّ بالإمكان كتابة:

$$1 = ar + bs \quad \text{حيث} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

بالضرب في m نحصل على:

$$m = arm + bms$$

الآن، r تقسم كلًّا من arm و bsm ؛ لأنّ r تقسم sm؛ ولذلك تكون r قاسمًا للطرف الأيمن لهذه المعادلة، إذن، r يجب أن تقسم m.

بُنية الزمر الدورية

يمكننا الآن وصف الزمر الدورية كلها وفق التماثل.

10.6 مبرهنة لتكن G زمرة دورية بمولّد a، فإذا كانت رتبة G لا نهائية، فإنّ G تماثل $\langle \mathbb{Z},+\rangle$. وإذا كانت G ذات رتبة منتهية n، فإنّ G تماثل $\langle \mathbb{Z}_n, +_n\rangle$.

البرهان حالة I لكل الأعداد الصحيحة الموجبة m، $a^m \neq e$. في هذه الحالة، ندّعي أنه لا يمكن لقوتين مختلفتين h و k أن تنتجا عنصرين متساويين a^h و a^k من G.

افترض أنّ $a^h = a^k$ ، ولنقل: إنّ $h > k$. هذا يضمن أنّ:

$$a^h a^{-k} = a^{h-k} = e،$$

مما يناقض فرض الحالة I. وأخيرًا، فأيّ عنصر من G يمكن التعبير عنه بالصورة a^m لعدد وحيد $m \in \mathbb{Z}$ ؛ لذلك، فالدالّة $\phi : G \to \mathbb{Z}$ المعطاة بـ $\phi(a^i) = i$ حسنة التعريف (well define)، وأحاديّة، وغامرة إلى $\mathbb{Z}$، كذلك:

$$\phi(a^i a^j) = \phi(a^{i+j}) = i + j = \phi(a^i) + \phi(a^j)$$

ولذلك، ϕ يُحقق صفة التشاكل، ويكون تماثلًا .

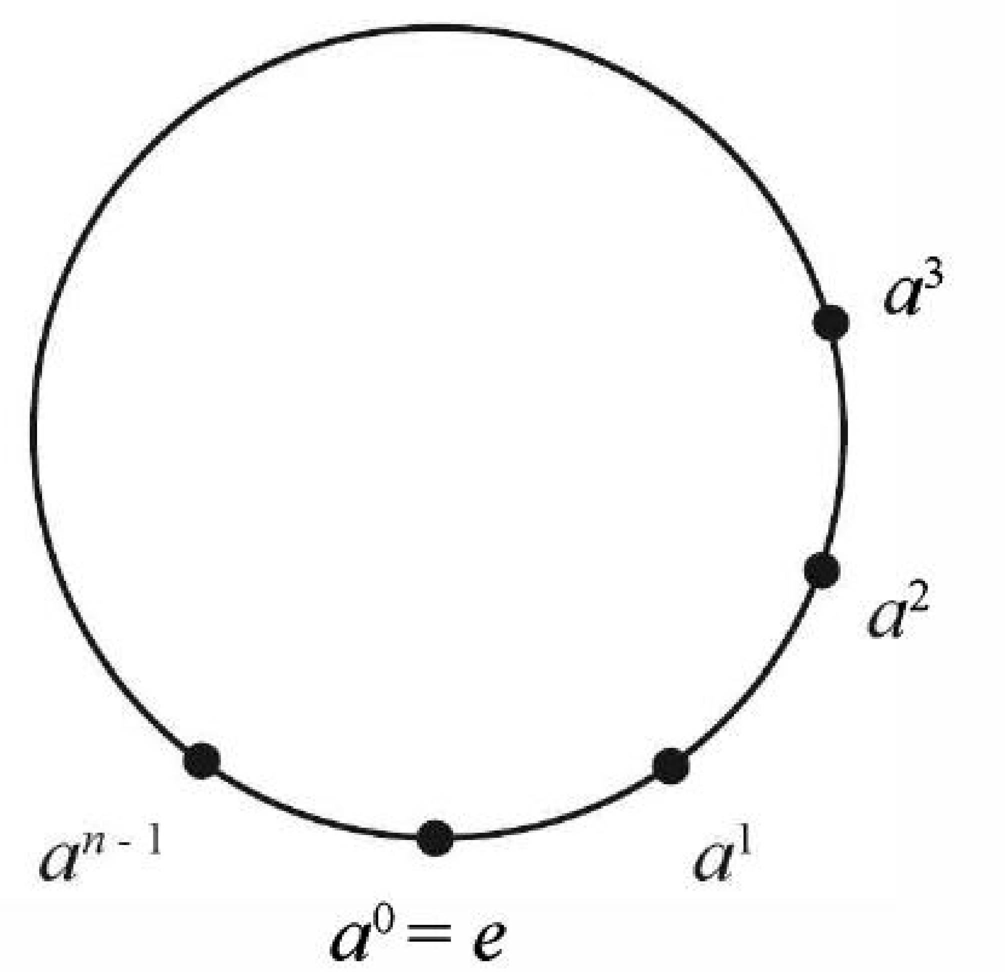
حالة II $a^m = e$ لعدد ما صحيح موجب m. لتكن n أصغر عدد صحيح موجب، بحيث إنّ $a^n=e$، فإذا كان $s \in \mathbb{Z}$ و $s = nq + r$ لـ $0 \leq r < n$، فإنّ $a^s = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = e^q a^r = a^r$. كما في الحالة I، إذا كان $0 < k < h < n$ و $a^h = a^k$، فإنّ $a^{h-k} = e$ و $0 < h\text{-}k < n$، ما يناقض اختيارنا لـ n؛ لذلك، فالعناصر

$$a^0 = e, a, a^2, a^3, ..., a^{n-1}$$

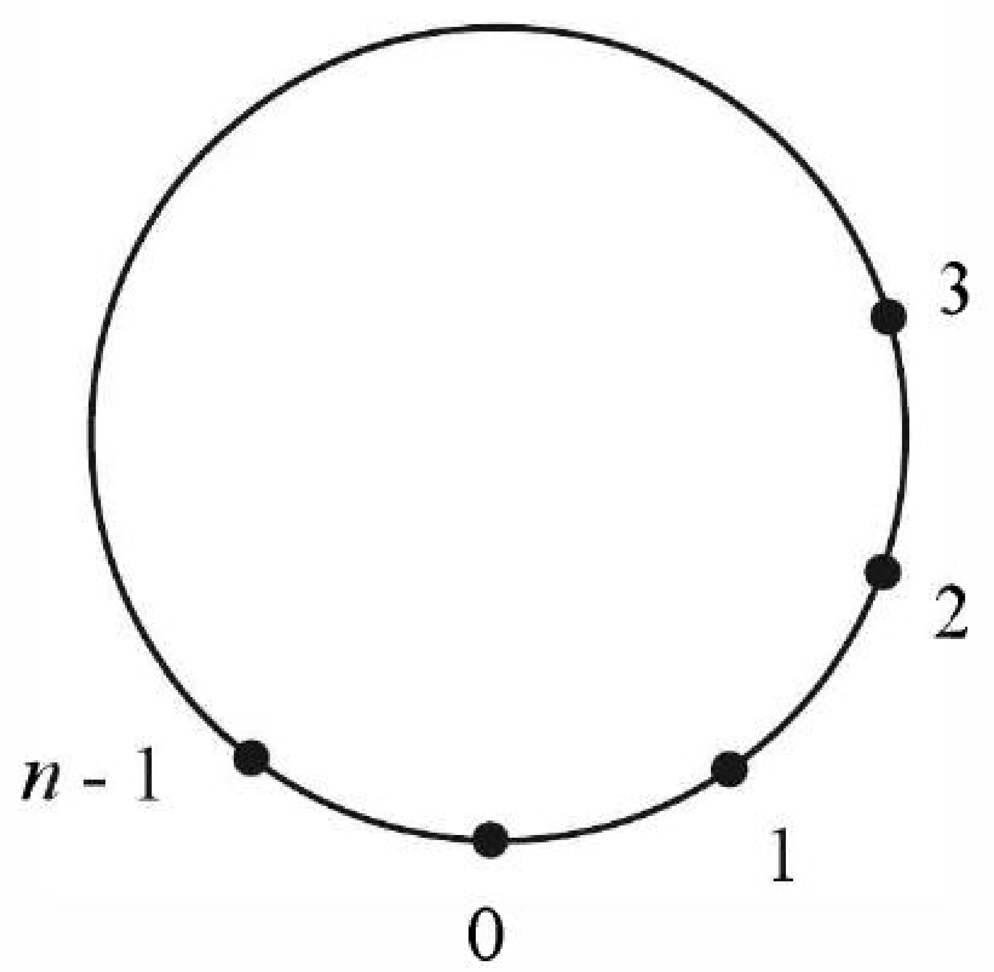
جميعها مختلفة وتشكل عناصر G كلها؛ ولهذا، فالدالّة $\psi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ المعطاة بـ $\psi(a^i) = i$ حيث $i=0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ حسنة التعريف، وأحاديّة، وغامرة إلى $\mathbb{Z}_n$ ، ولأن $a^n = e$، فنرى أنّ $a^i a^j = a^k$ حيث $k = i +_n j$؛ لذلك، فإنّ:

$$\psi(a^i a^j) = i +_n j = \psi(a^i) +_n \psi(a^j)،$$

وعليه، يحقق ψ صفة التشاكل، ويكون تماثلًا. ♦



الشكل 11.6



الشكل 12.6

13.6 مثال بتحفيز من عملنا مع U_n، من المحبّذ تصوّر العناصر $e=a^0$، a^1،a^2،...، a^{n-1} لزمرة دورية من الرتبة n على أنها موزعة بانتظام على دائرة (انظر الشكل 11.6). وُضِعَ العنصر a^h على الدائرة في الموقع ذي الترتيب h من هذه الوحدات المتساوية وفي تجاه عكس عقارب الساعة، مقيسًا من الأسفل، حيث وُضع $e=a^0$. لضرب a^h و a^k من خلال المخطّط نبدأ من a^h ، وندور k وحدة إضافية عكس عقارب الساعة. حتى نرى حسابيًّا أين ننتهي، نجد q و r بحيث إنّ:

$$h + k = nq + r \quad \text{لـ} \quad 0 \leq r < n .$$

nq تدور بنا حول الدائرة دورة كاملة q مرة، ثمّ ننتهي إلى a^r ▲

إنّ الشكل 12.6 هو من حيث الجوهر الشكل 11.6 نفسه، لكن النقاط سمّيت بالقوى على المولّد. العملية على هذه القوى هي الجمع مقياسn.

الزمر الجزئيّة من الزمر الدورية المنتهية

أنهينا وصفنا للزمر الدورية، وانتقلنا إلى زمرها الجزئية، –أعطتنا النتيجة 7.6 معلومات كاملة عن الزمر الجزئيّة من الزمر الدورية اللانهائية؛ لنعطي المبرهنة الأساسية المتعلقة بمولّدات الزمر الجزئيّة للزمر الدورية المنتهية.

14.6 مبرهنة لتكن G زمرة دورية فيها n عنصر ومولّدة بـ a، وليكن $b \in G$، وليكن $b = a^s$. عندئذ تولّد b زمرة جزئيّة دورية H من G تحوي n/d عنصرًا، حيث d هي القاسم المشترك الأعظم لـِ n و s. وكذلك $\langle a^s \rangle = \langle a^t \rangle$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(s,n) = \gcd(t,n)$.

البرهان b تولّد زمرة جزئيّة دورية H من G، وهذا معروف من المبرهنة 17.5؛ لذا، يلزمنا فقط أن نثبت أنّ H لها n/d عنصر، وباتباع النقاش في الحالة II من المبرهنة 10.6، نرى أنّ H لها من العناصر بقدر أصغر قوة موجبة m لـِ b تعطي المحايد. الآن، $b = a^s$، و $b^m = e$ إذا وفقط إذا كان $(a^s)^m = e$، أو إذا وفقط إذا كان n تقسم ms. ما أصغر عدد صحيح موجب m بحيث إنّ n تقسم ms؟ لتكن d هي gcd لـِ n و s. عندئذٍ يوجد عددان صحيحان u و v، بحيث إنّ:

$$d = un + vs.$$

ولأنّ d تقسم كلًّا من n و s، يمكننا أن نكتب

$$1 = u(n/d) + v(s/d)$$

حيث كلا n/d و s/d عدد صحيح، هذه المعادلة الأخيرة تبيّن أنّ n/d و s/d أوّليّان نسبيًّا؛ لأن أيّ عدد صحيح يقسم كليهما يجب أن يقسم 1 كذلك. نتمنى أن نجد أصغر m موجبة، بحيث إنّ:

$$\frac{ms}{n} = \frac{m\,(s/d)}{(n/d)} \text{ عدد صحيح.}$$

من خاصية القسمة المؤطّرة (1)، نستنتج أنّ n/d يجب أن تقسم m؛ ولذلك، فأصغر مثل هذه الـ m هي n/d. وعليه، تكون رتبة H هي n/d.

وبأخذ $\mathbb{Z}_n$ في هذه اللحظة بوصفها نموذجًا للزمرة الدورية ذات الرتبة n، نرى أنه إذا كانت d قاسمًا لـِ n، فإنّ الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle d \rangle$ من $\mathbb{Z}_n$ فيها n/d عنصر، وتحوي الأعداد الصحيحة الموجبة m كلها التي تقلّ عن n، بحيث إنّ $\gcd(m,n) = d$؛ لذلك، فهناك زمرة جزئيّة واحدة فقط من $\mathbb{Z}_n$ رتبتها n/d، وبأخذ الفقرة السابقة في الحسبان يتبيّن على الفور أنه إذا كانت a مولّدًا للزمرة الدورية G، فإنّ $\langle a^s \rangle = \langle a^t \rangle$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(t,n) = \gcd(s,n)$. ♦

15.6 مثال على سبيل المثال: مستخدمًا رمز الجمع، لتكن $\mathbb{Z}_{12}$ مع المولّد $a = 1$، ولأنّ القاسم المشترك الأعظم لـِ 3 و 12 هو 3، فتولّد $3 = 3.1$ زمرة جزئيّة من $4 = \frac{12}{3}$ عناصر، تحديدًا

$$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}.$$

ولأنّ gcd لـِ 8 و 12 هو 4، فتولّد 8 زمرة جزئيّة من $3 = \frac{12}{4}$ عناصر، تحديدًا

$$\langle 8 \rangle = \{0, 4, 8\}.$$

ولأنّ gcd لـِ 12 و 5 هو 1، فتولّد 5 زمرة جزئيّة من $12 = \frac{12}{1}$ عنصرًا، أي إنّ 5 هو مولّد للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ كاملةً. ▲

النتيجة الآتية تنتج مباشرة عن المبرهنة 14.6.

16.6 نتيجة إذا كانت a مولّدًا لزمرة دورية منتهية G من الرتبة n، فإنّ مولّدات G الأخرى هي العناصر التي على الصورة a^r حيث r أوّليّة نسبيًّا مع n.

17.6 مثال دعنا نجد الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_{18}$ كلها، ونعطي مخطط الزمر الجزئيّة لها، الزمر الجزئيّة كلها دورية. بحسب النتيجة 16.6، العناصر 1،و5،و7،و11،و13، و17 هي مولّدات $\mathbb{Z}_{18}$. ابتداءً من 2،

$$\langle 2\rangle = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}$$

هي من الرتبة 9 ولها عناصر مولّدة بالصورة $h2$، حيث h أوّليّة نسبيًّا مع 9، تحديدًا $h = 1,2,4,5,7,8$؛ ولذلك $h2 = 2,\ 4,\ 8,10,14,16$. العنصر 6 من $\langle 2\rangle$ يولّد $\{0,6,12\}$، و12 كذلك هي مولّد لهذه الزمرة الجزئيّة.

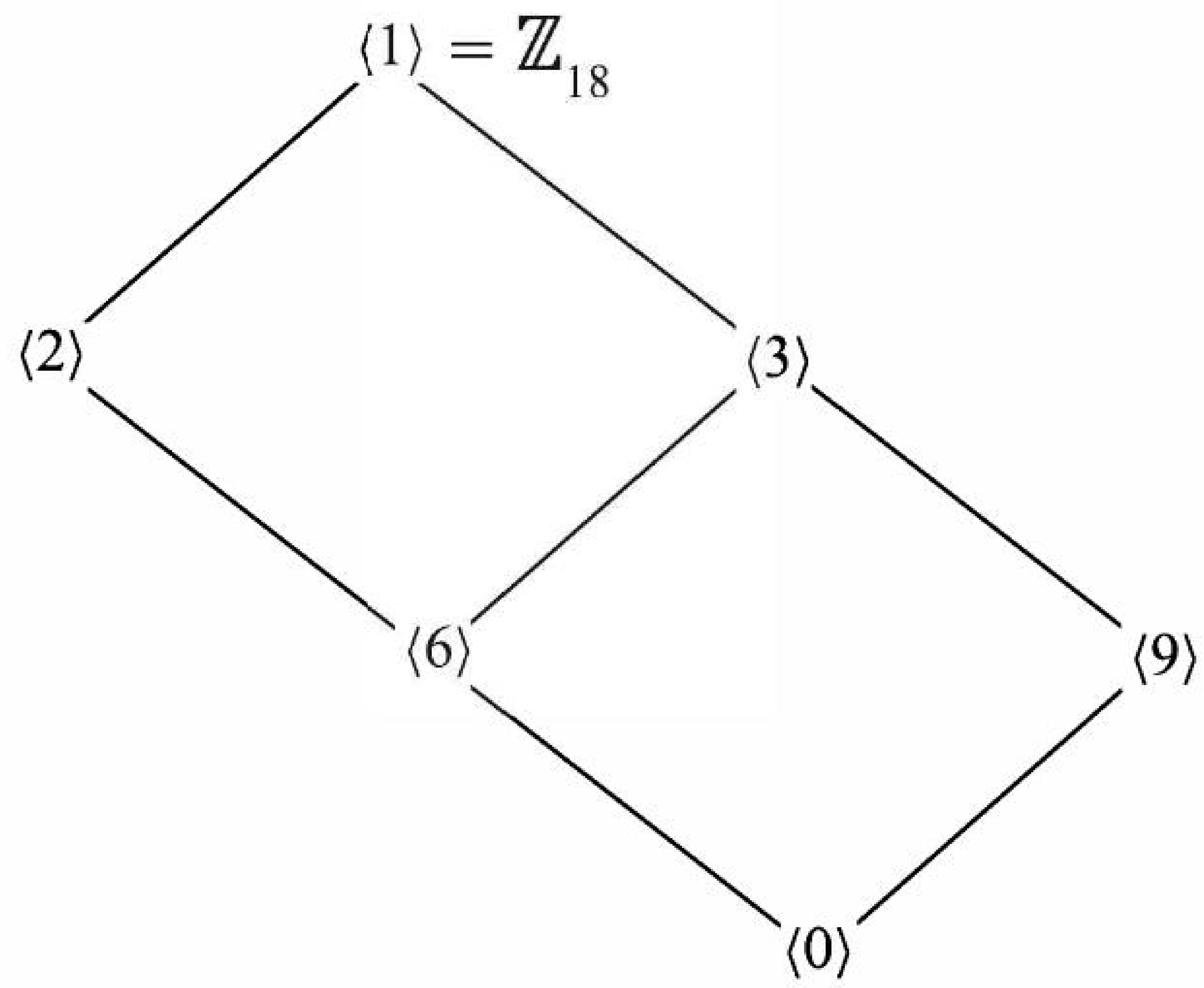
أوجدنا حتى الآن الزمر الجزئيّة المولّدة بـ 11 ،و10،و8،و7،و6،و5،و4، و2،و1،و0 و16، و14، و13، و12 ، و17، ولم يبقَ إلا اعتبار 3،و9،و15.

$$\langle 3\rangle = \{0,3,6,9,12,15\}،$$

و15 كذلك تولّد هذه الزمرة ذات الرتبة 6؛ لأن 15=5.3 و gcd لـِ 5 و 6 هو 1. أخيرًا،

$$\langle 9\rangle = \{0,9\}.$$

مخطط الزمر الجزئيّة لهذه الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_{18}$ معطًى في الشكل 18.6



الشكل 18.6 مخطط الزمر الجزئيّة لـ $\mathbb{Z}_{18}$.

هذا المثال مباشر، نخشى أن نكون قد كتبناه بطريقة مفصلة تجعله يبدو معقّدًا. التمارين تعطي بعض التطبيق في هذا الاتجاه. ▲

تمارين6

حسابات

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد ناتج القسمة والباقي بحسب خوارزمية القسمة عند قسمة n على m.

1. $n = 42$ ، $m = 9$ **2.** $n = -42$ ، $m = 9$

3. $n = -50$ ، $m = 8$ **4.** $n = 50$ ، $m = 8$

في التمارين من 5 إلى 7، أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين الصحيحين.

5. 32 و 24 **6.** 48 و 88 **7.** 360 و 420

في التمارين من 8 إلى 11، أوجد عدد مولّدات الزمرة الدورية ذات الرتبة المعطاة.

8. 5 **9.** 8 **10.** 12 **11.** 60

تماثل زمرة مع نفسها يُدعى تماثلًا ذاتيًا للزمرة (**automorphism of the group**). في التمارين من 12 إلى 16، أوجد عدد التماثلات الذاتية للزمرة المعطاة.

[مساعدة: استخدم التمرين 44. ماذا يجب أن تكون صورة المولّد تحت تأثير التماثل الذاتي؟]

12. $\mathbb{Z}_2$ **13.** $\mathbb{Z}_6$ **14** $\mathbb{Z}_8$ **15.** $\mathbb{Z}$ **16.** $\mathbb{Z}_{12}$

في التمارين من 17 إلى 21، أوجد عدد عناصر الزمرة الدورية المشار إليها.

17. الزمرة الجزئيّة الدورية من $\mathbb{Z}_{30}$ المولّدة بـ 25 .

18. الزمرة الجزئيّة الدورية من $\mathbb{Z}_{42}$ المولّدة بـ 30 .

19. الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle i \rangle$ من زمرة الأعداد المركبة غير الصفرية $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب.

20. الزمرة الجزئية الدورية من الزمرة $\mathbb{C}^*$ في التمرين 19 المولّدة بـ $(1+i)/\sqrt{2}$.

21. الزمرة الجزئية الدورية من الزمرة $\mathbb{C}^*$ في التمرين 19 المولّدة بـ $1+i$.

في التمارين من 22 إلى 24، أوجد الزمر الجزئيّة كلها من الزمرة المعطاة، وارسم مخطط الزمر الجزئيّة لها.

22. $\mathbb{Z}_{12}$ **23.** $\mathbb{Z}_{36}$ **24.** $\mathbb{Z}_8$

في التمارين من 25 إلى 29، أوجد رتب الزمر الجزئيّة جميعها من الزمرة المعطاة

25. $\mathbb{Z}_6$ **26.** $\mathbb{Z}_8$ **27.** $\mathbb{Z}_{12}$ **28.** $\mathbb{Z}_{20}$ **29.** $\mathbb{Z}_{17}$

مفاهيم

في التمرينين 30 و31، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب -إذا كانت هناك حاجة للتصحيح - بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

30. العنصر a من الزمرة G له الرتبة $n \in \mathbb{Z}^+$ إذا وفقط إذا كان $a^n = e$.

31. القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين موجبين هو أكبر عدد صحيح موجب يقسم كليهما.

32. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

______ أ. كل زمرة دورية تكون إبداليّة.

______ ب. كل زمرة إبداليّة تكون دورية.

______ جـ. $\mathbb{Q}$ بالنسبة إلى الجمع هي زمرة دورية.

______ د. أي عنصر من أيّ زمرة دورية يولد الزمرة.

______ هـ. هناك على الأقل زمرة إبداليّة واحدة من أيّ رتبة منتهية > 0.

______ و. كل زمرة من رتبة ≤ 4 تكون دورية.

______ ز. كل مولّدات $\mathbb{Z}_{20}$ أعداد أوّلية.

______ ح. إذا كانت G و G' زمرتين، فإنّ $G \cap G'$ زمرة.

______ ط. إذا كانت H و K زمرتين جزئيتين من زمرة G، فإنّ $H \cap K$ زمرة.

______ ي. كل زمرة دورية من رتبة > 2 لها على الأقل مولّدان مختلفان.

في التمارين من 33 إلى 37، أعطِ مثالًا على زمرة بالخاصية الموصوفة، أو وضّح لماذا لا يتوافر مثل هذا المثال.

33. زمرة منتهية ليست دورية.

34. زمرة لا نهائية ليست دورية.

35. زمرة دورية لها مولّد واحد فقط.

36. زمرة دورية لا نهائية لها أربعة مولّدات.

37. زمرة دورية منتهية لها أربعة مولّدات.

مولدات زمرة الضرب الدورية U_n المؤلفة من الجذور النونيّة كلها للواحد في $\mathbb{C}$ هي **الجذور النونيّة البدائية للواحد (primitive *n*th roots of unity)**. في التمارين من 38 إلى 41، أوجد الجذور النونيّة البدائية للواحد لقيمة n المعطاة.

38. $n = 4$

39. $n = 6$

40. $n = 8$

41. $n = 12$

براهين مختصرة

42. أعطِ اختصارًا بجملة واحدة لإثبات المبرهنة 1.6.

43. أعطِ اختصارًا بما لا يزيد على ثلاث جمل لإثبات المبرهنة 6.6.

براهين

44. لتكن G زمرة بمولّد a، G' زمرة تُماثل G. إذا كان $\phi: G \longrightarrow G'$ تماثلًا، أثبت أنه لكل $x \in G$، تتحدد $\phi(x)$ تمامًا من قيمة $\phi(a)$، أي إنه إذا كان: $\phi: G \rightarrow G'$ و $\psi: G \longrightarrow G'$ تماثلين، بحيث إنّ، $\phi(a) = \psi(a)$ فإنّ $\phi(x) = \psi(x)$ لكل $x \in G$.

45. ليكن r و s عددين صحيحين موجبين. أثبت أنّ $\{nr + ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$.

46. ليكن a و b عنصرين من زمرة G. أثبت أنه إذا كانت ab لها رتبة منتهية n، فإنّ ba لها الرتبة n كذلك.

47. ليكن r و s عددين صحيحين موجبين.

أ. عرّف **المضاعف المشترك الأصغر (least common multiple)** لـ r و s بوصفه مولّدًا لزمرة دورية ما.

ب. تحت أيّ شروط يكون المضاعف المشترك الأصغر لـ r و s حاصل ضربهما rs؟

جـ. تعميمًا للفرع (ب)، أثبت أنّ حاصل ضرب القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر لـ r و s هو rs.

48 أثبت أنّ الزمرة التي لها فقط عدد منتهٍ من الزمر الجزئيّة يجب أن تكون زمرة منتهية.

49 بيّن بمثال مناقض أنّ "عكس" المبرهنة 6.6 الآتي ليس مبرهنة: "إذا كانت الزمرة G تحقّق أنّ كل زمرة جزئيّة فعلية

منها دورية، فإنّ G دورية".

50. لتكن G زمرة وافترض أنّ $a \in G$ تولّد زمرة جزئيّة دورية من الرتبة 2 وأنها العنصر الوحيد بهذه الصفة. أثبت أنّ $ax = xa$ لكل $x \in G$. [مساعدة: اعتبر $(xax^{-1})^2$].

51. ليكن p و q عددين أوّليّين مختلفين. أوجد عدد مولّدات الزمرة الدورية $\mathbb{Z}_{pq}$.

52. لتكن p عددًا أوّليًا. أوجد عدد مولّدات الزمرة الدورية $\mathbb{Z}_{p^r}$ ، حيث r عدد صحيح ≥ 1.

53. أثبت أنه في الزمرة الدورية المنتهية G ذات الرتبة n – مكتوبة بالضرب – للمعادلة $x^m = e$ بالضبط m حلٌ x في G لكل عدد صحيح موجب m يقسم n.

54. بالرجوع إلى التمرين 53، ما الوضع إذا كان $1 < m < n$ و m لا تقسم n؟

55. أثبت أنّ $\mathbb{Z}_p$ ليس لها زمر جزئيّة فعلية غير تافهة إذا كانت p عددًا أوّليًا.

56. لتكن G زمرة إبداليّة، ولتكن H و K زمرتين جزئيّتين دوريتين منتهيتين، حيث $|H| = r$ و $|K| = s$.

أ. أثبت أنه إذا كان r و s أوّليّين نسبيًّا، فإنّ G تحوي زمرة جزئيّة دورية من الرتبة rs.

ب. تعميمًا للفرع (أ)، أثبت أنّ G تحوي زمرة جزئيّة دورية رتبتها المضاعف المشترك الأصغر لـ r و s.

الفصل 7 المجموعات المولّدة ورسومات كايلي الموجّهة
Generating Sets And Cayley Digraphs

لتكن G زمرة، وليكن $a \in G$. لقد وصفنا الزمرة الجزئيّة $\langle a \rangle$ من G، التي هي أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي العنصر a. افترض أننا نرغب في إيجاد أصغر زمرة جزئيّة ممكنة تحوي كلًا من a وعنصرًا آخر b من G ، حيث نرى من المبرهنة 17.5 أنّ أيّ زمرة جزئيّة تحوي a و b يجب أن تحوي a^n و b^m لكل $m,n \in \mathbb{Z}$، ونتيجة لذلك، يجب أن تحوي جميع حواصل الضرب المنتهية لمثل هذه القوى لـ a و b، كالتعبير $a^2b^4a^{-3}b^2a^5$ مثلًا. لاحظ أنه لا يمكننا "تبسيط" هذا التعبير بكتابة قوى a أولًا متبوعةً بقوى b؛ لأن G يمكن أن تكون غير إبداليّة، لكن حواصل ضرب تعبيرات من هذا النوع هي تعبيرات من النوع نفسه، إضافة إلى ذلك، $e = a^0$ ونظير تعبير من هذا النوع هو أيضًا تعبير من النوع نفسه، فعلى سبيل المثال: نظير $a^2b^4a^{-3}b^2a^5$ هو $a^{-5}b^{-2}a^3b^{-4}a^{-2}$. بحسب المبرهنة 14.5، هذا يثبت أنّ حواصل الضرب هذه كلها القوى صحيحة لـ a و b تشكل زمرة جزئيّة من G، التي يجب أن تكون بالتأكيد أصغر زمرة جزئيّة تحوي a و b. نسمّي a و b **مولّدين (generators)** لهذه الزمرة الجزئيّة، وفي حالة أنّ هذه الزمرة الجزئيّة هي كل G، فنقول: إنّ $\{a,b\}$ **تولّد (generates)** G، وبالطبع، ليس محجورًا علينا أخذ عنصرين فقط $a,b \in G$، فيمكننا إجراء المناقشة نفسها لثلاثة، أو أربعة، أو أي عدد من العناصر من G، طالما أخذنا فقط حواصل ضرب منتهية لقواها الصحيحة.

1.7 مثال زمرة كلاين الرباعية $V = \{e,a,b,c\}$ في المثال 9.5 تُولَّد بـ $\{a,b\}$؛ لأن $ab = c$. وهي كذلك تُولَّد بـ $\{a,c\}$، $\{b,c\}$، و $\{a,b,c\}$، فإذا وُلّدت الزمرة G بمجموعة جزئيّة S، فإنّ أيّ مجموعة جزئيّة من G تحوي S تُولِّد G. ▲

2.7 مثال الزمرة $\mathbb{Z}_6$ تُولَّد بـ $\{1\}$ و $\{5\}$، وهي كذلك تُولَّد بـ $\{2,3\}$؛ لأن $5 = 3 + 2$؛ ولذلك، فإنّ أيّ زمرة جزئيّة تحوي 2 و 3 يجب أن تحوي 5، وعليه، يجب أن تكون $\mathbb{Z}_6$ هي أيضًا تُولَّد بـ $\{3,4\}$، $\{2,3,4\}$، $\{1,3\}$، و $\{3,5\}$، لكنها لا تُولَّد بـ $\{2,4\}$؛ لأن $\langle 2 \rangle = \{0,2,4\}$ تحوي 2 و 4. ▲

لقد أعطينا تفسيرًا بدهيًّا للزمرة الجزئيّة من زمرة G المُولَّدة بمجموعة جزئيّة من G. فيما يأتي شرح تفصيلي للفكرة نفسها بطريقة أخرى، تحديدًا من خلال تقاطع زمر جزئية، فبعد أن ندرك مفهومًا ما إدراكًا بدهيًّا، فمن الرائع أن نحاول كتابته بصورة أنيقة قدر الإمكان. نعطي تعريفًا مبنيًّا على مبرهنة المجموعات، ونعمّم مبرهنة وردت في التمرين 54 من الفصل 5.

3.7 تعريف لتكن $\{S_i \mid i \in I\}$ تكتّلًا من مجموعات، وهنا يمكن أن تكون I أيّ مجموعة من الأدلّة، **التقاطع** $\bigcap_{i \in I} S_i$ **للمجموعات S_i (intersection of the sets)** هو مجموعة العناصر كلها التي في المجموعات S_i كلها، أي إنّ:

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \{x \mid x \in S_i \text{ لكل } i \in I\}.$$

إذا كانت I منتهية، $I = \{1,2,\ldots,n\}$، فيمكننا أن نشير إلى $\cap_{i \in I} S_i$ بـ

$$S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n.$$ ■

4.7 مبرهنة تقاطع بعض الزمر الجزئيّة H_i من G، حيث $i \in I$ أيضًا زمرة جزئيّة من G.

البرهان لنثبت الانغلاق، لتكن $a \in \cap_{i\in I} H_i$ و $b \in \cap_{i\in I} H_i$؛ ولذلك، $a \in H_i$ لكل $i \in I$ و $b \in H_i$ لكل $i \in I$؛ لذلك $ab \in H_i$ لكل $i \in I$ ؛ لأن H_i زمرة، وعليه، يكون $ab \in \cap_{i\in I} H_i$.

لأنّ H_i زمرة جزئيّة لكل $i \in I$، فإنّ $e \in H_i$ لكل $i \in I$ ؛ ولذلك، $e \in \cap_{i\in I} H_i$.
أخيرًا، لـ $a \in \cap_{i\in I} H_i$ يكون $a \in H_i$ لكل $i \in I$، وعليه، يكون $a^{-1} \in H_i$ لكل $i \in I$، وهذا يضمن أنّ $a^{-1} \in \cap_{i\in I} H_i$. ♦

لتكن G زمرة، وليكن $a_i \in G$ حيث $i \in I$. توجد على الأقل زمرة جزئيّة من G تحوي العناصر a_i كلها، حيث $i \in I$، تحديدًا G ذاتها، وتؤكد المبرهنة 4.7 أننا لو أخذنا تقاطع الزمر الجزئيّة كلها من G التي تحوي a_i حيث $i \in I$، فسنحصل على زمرة جزئيّة H من G. هذه الزمرة الجزئيّة H هي أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي كل a_i حيث $i \in I$.

5.7 تعريف لتكن G زمرة، وليكن $a_i \in G$ حيث $i \in I$. أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي $\{a_i \mid i \in I\}$ هي **الزمرة الجزئيّة المولّدة بـ (subgroup generated by)** $\{a_i \mid i \in I\}$. فإذا كانت هذه الزمرة الجزئيّة هي G كاملةً، فإنّ $\{a_i \mid i \in I\}$ **تولّد (generates)** G والـ a_i **مولّدات (generators)** لـ G. وإذا توافرت مجموعة منتهية $\{a_i \mid i \in I\}$ تولّد G، فإنّ G **منتهية التولّد (finitely generated)**. ■

لاحظ أنّ هذا التعريف منسجم مع تعريفنا السابق لمولّد الزمرة الدورية، ولاحظ أيضًا أنّ العبارة a هي مولّدٌ لـ G تعني إمّا $G = \langle a \rangle$ أو a هي عنصر في مجموعة جزئيّة من G تولّد G، والسياق الذي تظهر فيه العبارة يحدّد المعنى المقصود. مبرهنتنا الآتية تعطي النظرة المتبصّرة لتركيب الزمرة الجزئيّة من G المولّدة بـ $\{a_i \mid i \in I\}$، التي تمت مناقشتها لمولّدين قبل المثال 1.7.

6.7 مبرهنة إذا كانت G زمرةً و $a_i \in G$ حيث $i \in I$، فإنّ عناصر الزمرة الجزئيّة H من G المولّدة بـ $\{a_i \mid i \in I\}$ هي بالتحديد تلك العناصر من G التي هي حاصل ضرب منتهٍ من قوى صحيحة لـ a_i، حيث يمكن ورود قوًى محدّدة لـ a_i مرّات عدّة في الضرب.

البرهان لتكن K مجموعة حواصل الضرب كلها المنتهية لقوًى صحيحة لـ a_i، عندئذ تكون $K \subseteq H$. نحتاج فقط إلى أن نلاحظ أنّ K زمرة جزئيّة لإتمام المطلوب؛ لأن H هي أصغر زمرة جزئيّة تحوي a_i حيث $i \in I$. لاحظ أنّ حاصل ضرب عناصر من K يبقى في K. ولأنّ $e = (a_i)^0$، نستنتج أنّ $e \in K$. لكل عنصر k من K، إذا شكلنا من حاصل الضرب الذي يعطي k حاصلَ ضربٍ جديد بترتيب عكسيّ لـ a_i وإشارات معاكسة للقوى نحصل على k^{-1} التي تنتمي إلى K، فمثلاً:

$$\left[(a_1)^3\ \ (a_2)^2\,(a_1)^{-7}\right]^{-1} = (a_1)^7\,(a_2)^{-2}\,(a_1)^{-3}$$

التي بدورها تنتمي إلى K. ♦

رسومات كايلي الموجهة

لكل مجموعة مولّدة S لزمرة منتهية G، يوجد رسم موجه (directed graph، وعادة ما تختصر digraph) يمثل الزمرة بدلالة المولّدات من S. هذه التمثيلات المرئية للزمر ابتكرت من قبل كايلي، وكذلك يشار إليها في المراجع بمخططات كايلي.

ببداهة، **الرسم الموجه (digraph)** يتكون من عدد منتهٍ من النقاط تسمّى **رؤوس (vertices)** الرسم الموجه، وبعض **الحواف (arcs)** (لكل منها اتجاه يشار إليه بسهم) التي تربط الرؤوس، ففي الرسم الموجه لزمرة G باستخدام مجموعة مولّدة S، لدينا رأس – ممثل بنقطة – لكل عنصر من G، وكل مولّد من S يشار إليه بنوع من الحواف، إذ يمكننا عند التعامل مع القلم والورق أن نستخدم ألوانًا مختلفة لأنواع الحواف المختلفة، ولأنّ الألوان المختلفة ليست متوافرة في كتابنا، فسنستخدم أنماطًا مختلفة من الحواف، متصلة ، مقطّعة، ومنقّطة مثلًا للإشارة إلى مولّدات مختلفة، فلو كان $S = \{a,b,c\}$، فيمكننا الإشارة إليها على النحو :

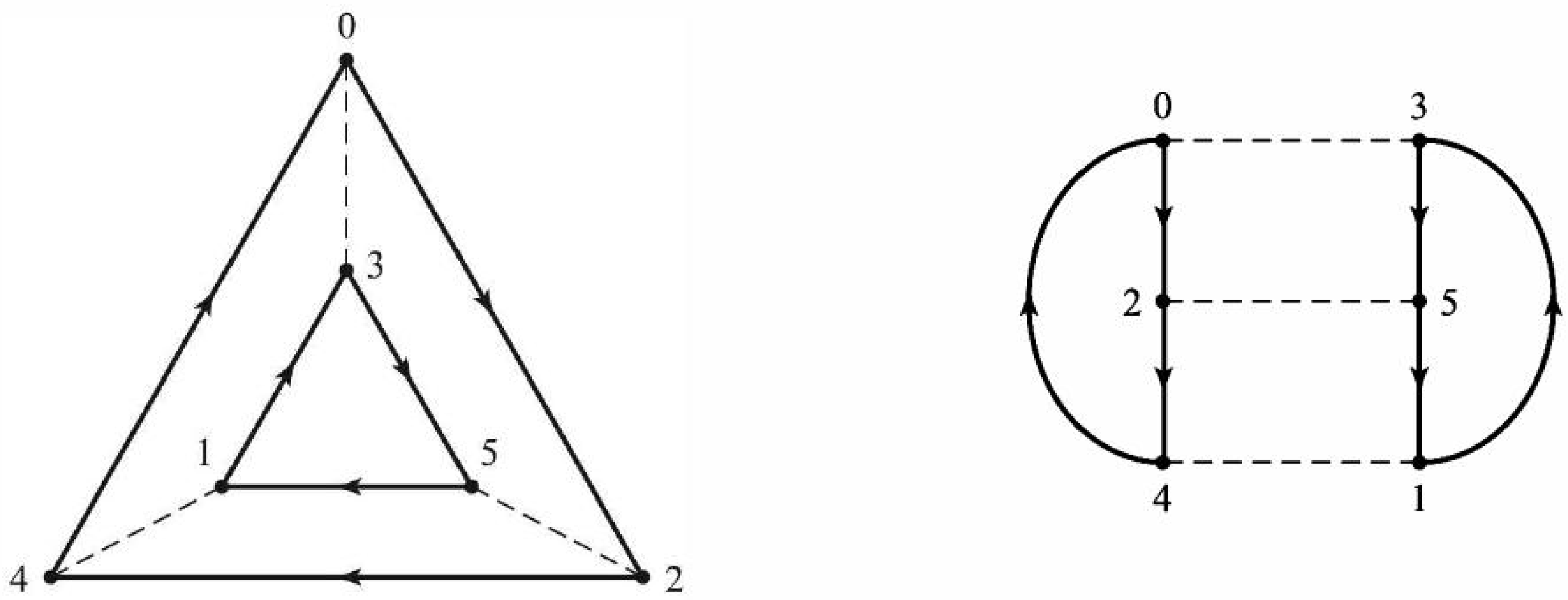
a: ——►——, b: – – –►– – –, و c: ·······►·······.

مع هذه الرموز، ورود x•——►——•y في رسم كايلي الموجه يعني أنّ $xa = y$، أي إنّ الانتقال عبر حافّة في اتجاه السهم يدل على أنّ ضرب عنصر الزمرة عند بداية الحافّة من اليمين بالمولّد الذي يخصّ نوع الحافة ينتج عنصر الزمرة عند نهاية الحافّة. بالطبع، لأننا في زمرة، ندرك مباشرة أنّ $ya^{-1} = x$، ولهذا فالانتقال عبر الحافّة بعكس اتجاه السهم يقابل الضرب من اليمين بمعكوس المولّد المعنيّ، فإذا كان مولّد من S هو معكوس نفسه، فمن المألوف أن يشار إلى ذلك بحذف السهم من الحافة بدلًا من استخدام سهم مزدوج، مثلًا: إذا كان $b^2 = e$، فيمكننا أن نشير إلى b بـ – – – – – – – –.

7.7 مثال كلا الرسمين الموجهين الظاهرين في الشكل 8.7 يمثل الزمرة $\mathbb{Z}_6$ مع المجموعة المولّدة $S = \{1\}$. ليس هناك أيّ أهمية لطول الحافّة وشكلها ولا للزاوية بين الحواف. ▲

(ب)   (أ)

الشكل 8.7 رسمان موجهان لـِ $\mathbb{Z}_6$ مع $S = \{1\}$ باستخدام $\xrightarrow[1]{}$.



(ب)   (أ)

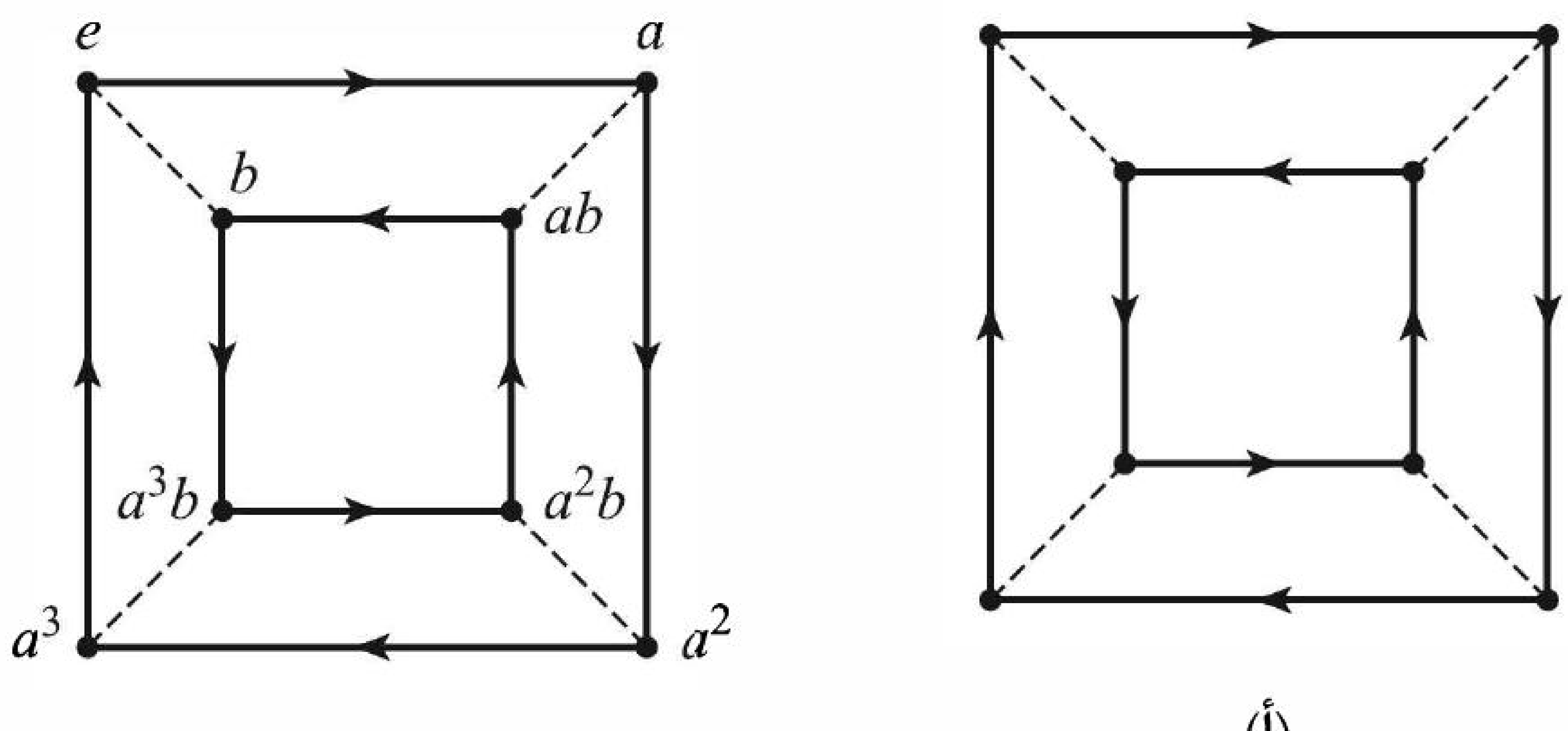
الشكل 9.7 رسمان موجهان لـِ $\mathbb{Z}_6$ مع $S = \{2,3\}$ باستخدام $\xrightarrow[2]{}$ و $\underset{3}{- - - - -}$.

10.7 مثال كلا الرسمين الموجهين الظاهرين في الشكل 9.7 يمثلان الزمرة $\mathbb{Z}_6$ مع المجموعة المولّدة $S = \{2, 3\}$، ولأنّ 3 هي معكوس نفسها، فلا يتوافر سهم على الحواف المقطّعة التي تمثل 3. لاحظ كيف تبدو مخططات كايلي هذه مختلفة عن تلك التي في الشكل 8.7 للزمرة نفسها، ويعود سبب الاختلاف إلى الاختيار المختلف لمجموعة المولّدات. ▲

إنّ أيّ رسم موجه لزمرة يجب أن يحقّق هذه الخصائص الأربع للأسباب المشار إليها.

الخاصية	السبب
1– الرسم الموجه متصل، أي إنه يمكننا الانتقال من أيّ رأس g إلى أيّ رأس h عبر حوافّ متتالية بادئين من g ومنتهين بـِ h.	أيّ معادلة $gx = h$ لها حل في الزمرة.
2– تنطلق حافّة واحدة على الأكثر من رأس g إلى رأس h.	الحل لـِ $gx = h$ وحيد.
3– لكل رأس g حافّة واحدة بالضبط من كل نوع تبدأ من g، وأخرى من كل نوع تنتهي بـِ g.	لـَ $g \in G$ ولكل مولّد b يمكننا حساب gb، و $(gb^{-1})\ b = g$.
4– إذا قادت متتاليتان مختلفتان من أنواع الحواف ابتداء من رأس g إلى الرأس h نفسه، فإنهما ابتداءً من أيّ رأس u ستقودان إلى الرأس v نفسه.	إذا كان $gq = h$ و $gr = h$، فإنّ $ug^{-1}h = ur$

ويمكن بالعكس إثبات أنّ أيّ رسم موجهٍ يحقق هذه الخصائص الأربعة يكون رسم كايلي موجهًا لزمرة ما؛ وبسبب التماثل لمثل هذا الرسمِ الموجه، يمكننا اختيار أسماء، مثل a , b , c لأنواع الحواف المختلفة، وتسمية رأس e لتمثيل المحايد، وتسمية كل رأس آخر بحاصل ضرب أسماء حواف ومعكوساتها بصورة تنقلنا إلى هذا الرأس ابتداءً من الذي أسميناه e. بعض الزمر المنتهية أُنْشِئَت أول مرة (أُوْجِدت) باستخدام رسومات موجهة.



(ب)   (أ)

الشكل 11.7

12.7 مثال يظهر في الشكل 11.7 (أ) رسم موجه يحقق الخصائص الأربعة في صفحة 71. للحصول على الشكل 11.7 (ب) اخترنا الأسماء.

وأسمينا رأسًا e، ثم أسمينا الرؤوس الأخرى كما هو مبين، وحصلنا على زمرة من ثمانية عناصر $\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$، لاحظ أنّ العنصر الذي أسميناه ab يمكن تسميته كذلك ba^{-1}. الرأس الذي أسميناه a^3 يمكن تسميته a^{-1}، وهكذا، فإنّ حساب ضرب العناصر في هذه الزمرة ليس صعبًا، فلحساب $(a^3b)(a^2b)$ نبدأ من الرأس المسمّى a^3b، وننتقل حافّتين متصلتين متتاليتين، فحافّة مقطّعة لنصل إلى الرأس a؛ ولذلك، $(a^3b)(a^2b) = a$، وبهذا النمط يمكننا كتابة الجدول لهذه الزمرة ذات العناصر الثمانية. ▲

تمارين 7

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، اسرد عناصر الزمرة الجزئيّة المولدة بالمجموعة الجزئيّة المعطاة.

1. المجموعة الجزئيّة $\{2,3\}$ من $\mathbb{Z}_{12}$

2. المجموعة الجزئيّة $\{4,6\}$ من $\mathbb{Z}_{12}$

3. المجموعة الجزئيّة $\{8,10\}$ من $\mathbb{Z}_{18}$

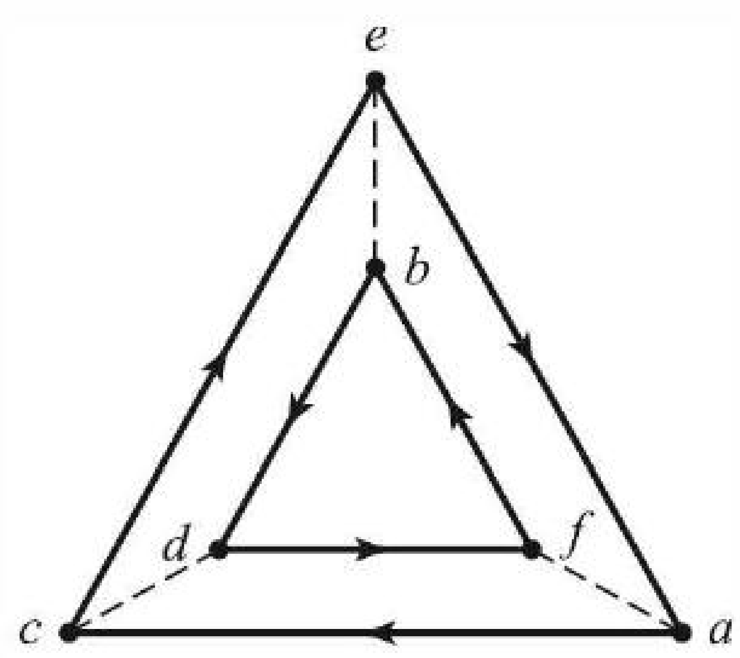
4. المجموعة الجزئيّة $\{12,30\}$ من $\mathbb{Z}_{36}$

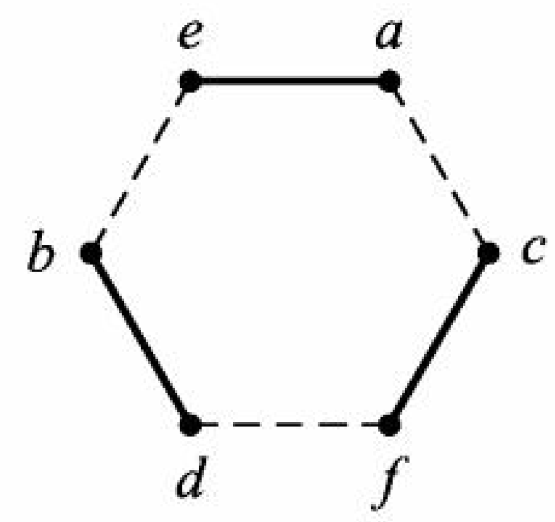
5. المجموعة الجزئيّة $\{12,42\}$ من $\mathbb{Z}$

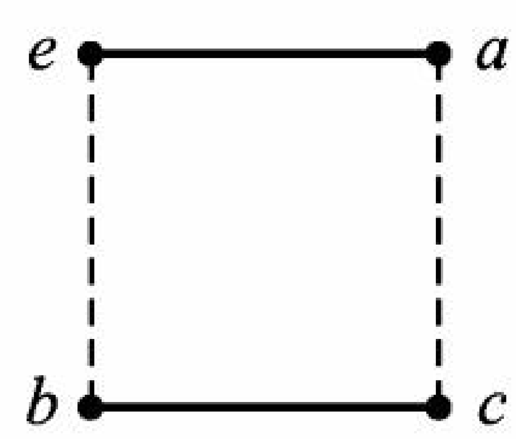
6. المجموعة الجزئيّة $\{18,24,39\}$ من $\mathbb{Z}$

7. للزمرة الموصوفة في المثال 12.7 احسب حواصل الضرب باستخدام الشكل 11.7 (ب).

أ. $(a^2b)a^3$ ب. $(ab)(a^3b)$ جـ. $b(a^2b)$







الشكل 13.7

في التمارين من 8 إلى 10، أعطِ جدول الزمرة ذات الرسم الموجه المشار إليه. وفي كل رسم موجه، خذ e بوصفها عنصرًا محايدًا. أورد e أولًا في جدولك، واسرد باقي العناصر بترتيب هجائي؛ حتى يسهل عليك التأكّد من جوابك.

8. الرسم الموجه في الشكل 13.7 (أ).

9. الرسم الموجه في الشكل 13.7 (ب).

10. الرسم الموجه في الشكل 13.7 (جـ).

مفاهيم

11. كيف يمكننا من رسم كايلي الموجه استنتاج ما إذا كانت الزمرة المقابلة إبداليّة أم لا؟

12. بالرجوع إلى التمرين 11، حدّد ما إذا كانت الزمرة المقابلة لرسم كايلي الموجه في الشكل 11.7 (ب) إبداليّة.

13. هل يتضح من رسم كايلي الموجه لزمرة أنّ الزمرة دورية أم لا؟ [مساعدة: انظر إلى الشكل 9.7 (ب)].

14. المثلث الخارجي الكبير في الشكل 9.7 (ب) يُظهر الزمرة الجزئيّة الدورية $\{0, 2, 4\}$ من $\mathbb{Z}_6$. هل يُظهر بالمثل المثلث الداخلي الأصغر زمرة جزئيّة دورية من $\mathbb{Z}_6$؟ لماذا أو لماذا لا؟

15. المجموعة المولّدة $S = \{1, 2\}$ لـ $\mathbb{Z}_6$ تحوي مولّدات أكثر مما يجب؛ لأن 1 مولد للزمرة، وعلى الرغم من ذلك، يمكننا رسم رسم كايلي الموجه لـِ $\mathbb{Z}_6$ مع هذه المجموعة المولدة S. ارسم مثل هذا الرسم.

16. ارسم رسم كايلي الموجه لـِ $\mathbb{Z}_8$ بأخذ المجموعة المولّدة $S = \{2, 5\}$.

17. العلاقة **(relation)** على مجموعة مولّدات S لزمرة G هي معادلة تساوي حاصل ضرب ما لمولّدات ومعكوساتها بالمحايد e من G فعلى سبيل المثال: إذا كانت $S = \{a,b\}$ و G إبداليّة، بحيث إنّ $ab = ba$، فإنّ $aba^{-1}b^{-1} = e$ هي علاقة، وإذا كان علاوة على ذلك b هي معكوس نفسها، فإنّ $b^2 = e$ هي علاقة أخرى.

أ. وضّح كيف يمكننا إيجاد بعض العلاقات على S من رسم كايلي الموجه لـِ G.

ب. أوجد ثلاث علاقات على مجموعة المولّدات $S = \{a,b\}$ للزمرة الموصوفة بالشكل 11.7 (ب).

18. ارسم رسومات موجهة للزمرتين من الرتبة 4 مختلفتي التركيب، بأخذ أصغر مجموعة مولّدات ممكنة في كل حالة. لا يلزمك تسمية الرؤوس.

براهين

19. أثبت أنه لـِ $n \geq 3$، توجد زمرة غير إبداليّة لها $2n$ عنصر، وتُولّد بعنصرين من الرتبة 2.

الوحدة الثانية

التبـاديل، ومجموعـات المشـاركة، والـضـرب المبـاشر
Permutations, Cosets, and Direct Products

---

[1] الفصل 21 لن يستخدم فيما تبقى من الكتاب

الفصل 8 زمر التبـاديل Groups Of Permutations

رأينا أمثلة على زمر أعداد، مثل الزمر $\mathbb{Z}$، و$\mathbb{Q}$، و$\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع. وقدّمنا كذلك زمر مصفوفات، مثل الزمرة $GL(2, \mathbb{R})$، فكل عنصر A من $GL(2, \mathbb{R})$ ينتج تحويلًا للمستوى $\mathbb{R}^2$ إلى نفسه؛ وبالتحديد، إذا اعتبرنا $\mathbf{x}$ بوصفه متجه عمود ذي مركبتين، فإنّ $A\mathbf{x}$ أيضًا متجه عمود ذي مركبتين، والزمرة $GL(2,\mathbb{R})$ نمط لكثير من الزمر المهمة، حيث إنّ عناصرها تؤثر في أشياء لتحويلها، وفي الغالب يمكن أن يُعدّ التأثير الناتج عن عنصر الزمرة دالّة، والعملية الثنائية للزمرة تركيب دوالّ. سنبني في هذا الفصل بعض الزمر المنتهية التي تؤثر عناصرها – تسمّى تباديل – في مجموعات منتهية، وستزوّدنا هذه الزمر بأمثلة على زمر منتهية غير إبداليّة، ثم سنثبت أنّ أيّ زمرة منتهية هي – تركيبيًّا – مثل زمرة تباديل ما، وللأسف، لن تصبح هذه النتيجة – التي تبدو قوية جدًّا – مفيدة لنا على وجه الخصوص.

ربما تكون معتادًا على مفهوم تبديل المجموعة على أنه إعادة ترتيب لعناصر المجموعة؛ لذلك فإعادة ترتيب لعناصر المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ يمكن أن تُعطى تخطيطيًّا كما في الشكل 1.8، وينتج عنها التّرتيب الجديد $\{4, 2, 5, 3, 1\}$، لنفكر الآن في هذا الرسم التخطيطيّ في الشكل 1.8، على أنه دالّة ترسل كل عنصر موجود في العمود الأيسر إلى عنصر وحيد (ليس بالضرورة مختلفًا) من المجموعة نفسها موجود على اليمين؛ لذلك 1 أرسلت إلى 4 ، و 2 أرسلت إلى 2 وهكذا، إضافة إلى ذلك، لكي تكون تبديلًا للمجموعة، على هذه الدالّة أن تكون على حالة تجعل كل عنصر يظهر في العمود الأيمن مرةً واحدة فقط، مثلًا: المخطّط في الشكل 2.8 لا يعطي تبديلًا؛ لأن 3 ظهرت مرتين، بينما 1 لم تظهر أبدًا في العمود الأيمن، لنُعرِّف التبديل ليكون مثل هذه الدالّة.

$1 \to 4$	$1 \to 3$
$2 \to 2$	$2 \to 2$
$3 \to 5$	$3 \to 4$
$4 \to 3$	$4 \to 5$
$5 \to 1$	$5 \to 3$
الشكل 1.8	الشكل 2.8

3.8 تعريف **تبديل مجموعةٍ A (*permutation of a set*)** هو دالّة $\phi : A \longrightarrow A$ أحاديّة وغامرة. ■

زمر التبديلات

نبين الآن أنّ تركيب الدوالّ $\circ$ عملية ثنائيّة على مجموعة تبديلات المجموعة A كلها، ونسمّي هذه العملية ضرب التبديلات، لتكن A مجموعة، وليكن σ و τ تبديلين لـ A بحيث إنّ كلًّا من σ و τ دالّتان أحاديّتان ترسلان A بصورة غامرة إلى A، في حين أنّ الدالّة المركبة $\sigma \circ \tau$ المعرّفة تخطيطيًّا بـ

$$A \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\sigma} A،$$

تعطي دالّة من A إلى A ، سنرمز لـ $\sigma \circ \tau$ بالكتابة المتتالية على الصورة $\sigma\tau$، وذلك بدلًا من الاحتفاظ بالرمز $\circ$ لضرب التبديلات، وكما فعلنا مع الزمر العامة، حيث ستكون $\sigma\tau$ الآن تبديلًا إذا كانت أحاديّة وغامرة إلى A، تذكّر أنّ تأثير $\sigma\tau$ في A يجب أن يُقرأ بالترتيب من اليمين إلى اليسار: أولًا طبّق τ ثم σ. دعنا نثبت أنّ $\sigma\tau$ أحاديّة.

فإذا كان:

$$(\sigma\tau)(a_1) = (\sigma\tau)(a_2),$$

فإنّ

$$\sigma(\tau(a_1)) = \sigma(\tau(a_2)),$$

ولأنّ σ معطاة على أنها أُحاديّة، فنعلم أنّ $\tau(a_1) = \tau(a_2)$، لكن لأنّ τ أحاديّة، فعندئذ يعطي هذا $a_1 = a_2$؛ لذلك $\sigma\tau$ أحاديّة، ولإثبات أنّ $\sigma\tau$ غامرة إلى A، لتكن $a \in A$، ولأنّ σ غامرة إلى A، فيوجد $a' \in A$ ، بحيث إنّ $\sigma(a') = a$، ولأنّ τ غامرة إلى A، فيوجد $a'' \in A$، بحيث إنّ $\tau(a'') = a'$؛ لذلك:

$$a = \sigma(a') = \sigma(\tau(a'')) = (\sigma\tau)(a''),$$

وتكون، $\sigma\tau$ غامرة إلى A.

4.8 مثال افترض أنّ

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

وأنّ σ هو التبديل المعطى بالشكل 1.8. نكتب σ بطريقة قياسية أكثر، بتغيير الأعمدة إلى صفوف داخل أقواس وحذف الأسهم، على الصورة:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث $\sigma(1) = 4$ ، $\sigma(2) = 2$ ، وهكذا،

■ نبذة تاريخية

ظهرت واحدة من أوائل الدراسات المسجلة للتبديلات في (*Sefer Yetsirah*)، أو كتاب الخلق لمؤلف يهودي مجهول في وقت ما قبل القرن الثامن، اهتمّ المؤلف بعَدِّ الطرق المختلفة التي يمكن أن تُرتَّب فيها الحروف العبرية، وكان السؤال إلى حدّ ما روحيًّا، فقد كان المعتَقَد أنّ الحروف لها طاقة سحريّة؛ لذلك يمكن أن تُخْضِع ترتيباتٌ مناسبة قوى الطبيعة، والنصّ الفعليّ في (*Sefer Yetsirah*) ضئيل جدًّا، وهو على هذا النحو : "حرفان يبنيان كلمتين، ثلاثة تبني ست كلمات، أربعة تبني 24 كلمة، خمسة تبني 120، ستة تبني 720، سبعة تبني 5040". ومن المدهش فعلًا أنّ عدّ ترتيبات الحروف الهجائية وقع أيضًا في الرياضيات الإسلاميّة في القرنين الثامن والتاسع، ففي القرن الثالث عشر، أخذت فكرة التبديل المجردة مكانها في كلتا الثقافتين الإسلامية والعبرية، بحيث إنّ كلًّا من أبي العباس بن البنّا

(*Abu – l – 'Abbas ibn al- Banna* 1256 – 1321)

– عالم رياضيات من مرّاكش فيما يسمّى الآن المغرب – وليفي بن جرسون –(*Levi ben Gerson*) الحاخام الفرنسي، فيلسوف وعالم رياضيات – كانا قادرين على إعطاء براهين دقيقة جدًّا على أنّ عدد التبديلات لأيّ مجموعة فيها n عنصرًا هو $n!$، إضافة إلى برهان نتائج مختلفة حول عدّ التراكيب.

على أيّ حال، كان ليفي وأسلافه مهتمّين بالتبديلات ببساطة؛ بوصفها ترتيبات لمجموعة منتهية معطاة، والبحث عن حلول لمعادلات كثيرة الحدود هو الذي قاد لاجرانج وآخرين في آخر القرن الثامن عشر إلى التفكير في التبديلات بوصفها دوالّ من مجموعة منتهية إلى نفسها، وكانت المجموعة جذور معادلة معطاة، وقد كان أوجستين – لويس كوشي (*Augustin – Louis Cauchy* 1789 – 1857) هو الذي طوّر بالتفصيل المبرهنات الأساسية نظرية التبديلات، وهو من قدّم الرمز القياسي المستخدم في هذا الكتاب.

لتكن

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ يكون:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

مثلًا: بإجراء الضرب بالترتيب من اليمين إلى اليسار،

$$(\sigma\tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 5, \qquad \blacktriangle$$

نثبت الآن أنّ مجموعة التبديلات كلها لمجموعة غير خالية A تشكّل زمرة بالنسبة إلى ضرب التبديلات هذا.

5.8 مبرهنة لتكن A مجموعة غير خالية، ولتكن S_A مجموعة جميع تبديلات A، عندئذٍ تكون S_A زمرة بالنسبة إلى ضرب التبديلات.

البرهان: أثبتنا أنّ تركيب تبديلين لـ A ينتج تبديلًا لـ A؛ ولذلك S_A مغلقة بالنسبة إلى ضرب التبديلات.

ونرى أنّ ضرب التبديلات معرّف بوصفه تركيب دوالّ، وقد برهنّا في الفصل 2 على أنّ تركيب الدوالّ تجميعيٌّ؛ لهذا، يكون $\mathscr{G}_1$ متحقّقًا.

التبديل ι بحيث إنّ $\iota(a) = a$ لكل $a \in A$ يعمل بوصفه محايدًا؛ لذلك يكون $\mathscr{G}_2$ متحقّقًا.

للتبديل σ، الدالّة المعكوسة σ^{-1} تبديل يعكس اتجاه الإرسال في σ، أي إنّ $\sigma^{-1}(a)$ هو العنصر a' من A، بحيث إنّ $a = \sigma(a')$، ووجود عنصر واحد بالضبط a' من مثل هذا، هو نتيجة لحقيقة أنّ σ بوصفها دالّة هي أحاديّة وغامرة، ولكل $a \in A$ لدينا:

$$\iota(a) = a = \sigma(a') = \sigma(\sigma^{-1}(a)) = (\sigma\sigma^{-1})(a)$$

وكذلك:

$$\iota(a') = a' = \sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(\sigma(a')) = (\sigma^{-1}\sigma)(a'),$$

ما يعني أنّ كلًّا من $\sigma^{-1}\sigma$ و $\sigma\sigma^{-1}$ هما التبديل ι ؛ لذلك، يكون $\mathscr{G}_3$ متحقّقًا. ♦

تحذير: بعض الكتب تحسب ضرب التباديل $\sigma\mu$ بالترتيب من اليسار إلى اليمين، بحيث إنّ $(\sigma\mu)(a) = \mu(\sigma(a))$؛ لذلك فالتبديل الذي يُحصل عليه من $\sigma\mu$ هو ذاك الذي نحصل عليه بحساب $\mu\sigma$، حيث يطلب التمرين 51 التأكّد بطريقتين من أننا لا نزال نحصل على زمرة، وإذا رجعت إلى كتاب آخر بخصوص هذه المادة، فتأكد من فحص ترتيبه لضرب التبديلات.

لم يكن في تعريفنا للتبديل شرط يطلب أن تكون A منتهية، لكن معظم أمثلتنا على زمر التبديلات ستتعلق بتبديلات مجموعات منتهية، لاحظ أنّ تركيب الزمرة S_A يتعلق فقط بعدد عناصر المجموعة A وليس بماهيّة عناصرها، وإذا كان للمجموعتين A و B عدد العناصر نفسه، فإنّ $S_A \simeq S_B$، ولتعريف تماثل $\phi : S_A \longrightarrow S_B$، نأخذ $f : A \longrightarrow B$ دالّة أحاديّة غامرة من A إلى B، ما يفضي إلى أنّ A و B لهما عدد العناصر نفسه، ولـ $\sigma \in S_A$، نأخذ $\phi(\sigma)$ لتكون هي التبديل $\bar{\sigma} \in S_B$، بحيث إن $\bar{\sigma}(f(a)) = f(\sigma(a))$ لكل $a \in A$، لتوضيح ذلك لـ $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{\#, \$, \%\}$ وللدالّة $f : A \longrightarrow B$ المعرّفة بـ

$$f(1) = \#،\quad f(2) = \$،\quad f(3) = \%،$$

ϕ ترسل

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} \# & \$ & \% \\ \% & \$ & \# \end{pmatrix}$$

نعيد ببساطة تسمية عناصر A في رمزنا ذي الصفين بعناصر B بحسب الدالّة f التي تعيد التسمية، وبهذا نعيد تسمية عناصر S_A لتكون عناصر S_B، ويمكننا أخذ $\{1,2,3,\ldots,n\}$ لتكون نموذجًا للمجموعة المنتهية A التي فيها n عنصرًا.

6.8 تعريف لتكن A المجموعة المنتهية $\{1,2,\ldots,n\}$. زمرة التبديلات كلها لـ A هي **زمرة التناظر على n حرف (symmetric group on n letters)**، ويرمز لها S_n. ■

لاحظ أنّ عدد عناصر S_n هو $n!$ حيث:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

مثالان مهمّان

7.8 مثال الزمرة S_3 من $3! = 6$ عنصرًا هي مثال مشوّق لنا، ولتكن المجموعة A هي $\{1,2,3\}$. نسرد هنا تبديلات A، ونسمّي كل واحد منها بحرف إغريقي مُذَيَّل.

ستتضح أسباب اختيار الأسماء لاحقًا، ليكن

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

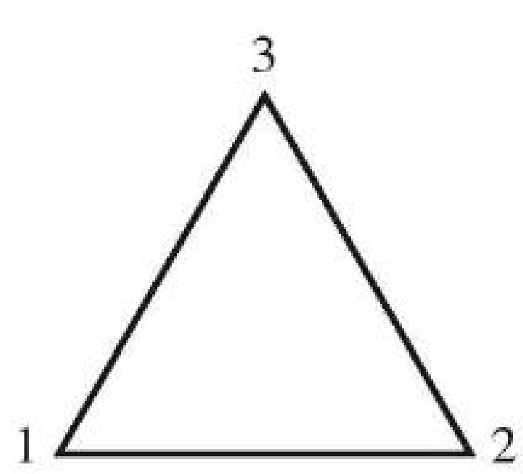
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

الجدول 8.8

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

جدول الضرب لـ S_3 مبيّن في الجدول 8.8، لاحظ أنّ هذه الزمرة ليست إبداليّة؛ وقد رأينا أنّ أيّ زمرة من أربعة عناصر على الأكثر تكون إبداليّة، وسنرى لاحقًا أنّ أيّ زمرة من خمسة عناصر تكون أيضًا إبداليّة؛ لذلك، S_3 لها أقل رتبة لأيّ زمرة غير إبداليّة. ▲



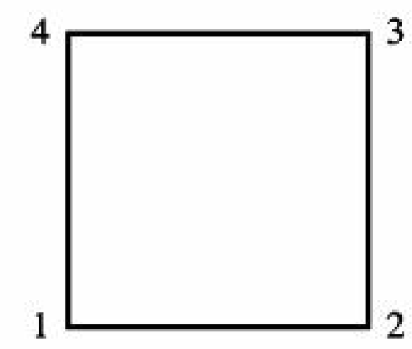
الشكل 9.8

هناك تقابل طبيعي بين عناصر S_3 في المثال 7.8، والطرق التي يمكن بها وضع نسختين من مثلث متساوي الأضلاع برؤوس 1، و2، و3 (انظر الشكل9.8) على أن يغطّي أحدهما الآخر، حيث تكون الرؤوس فوق الرؤوس؛ ولهذا السبب، S_3 هي أيضًا **زمرة تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع** D_3 **(group of symmetries of an equilateral triangle)**. ببساطة، استخدمنا ρ_i في الدورانات و μ_i في انعكاسات المرآة في منصّفات الزوايا. يمثّل الرمز D_3 الزمرة الزوجيّة الثالثة، و**الزمرة الزوجيّة من الدرجة** n **(*n*th dihedral group)** D_n هي زمرة تناظرات المضلّع المنتظم ذي n ضلعًا، انظر التمرين 44.[2]

لاحظ أنه يمكن أن تُعدّ عناصر S_3 مؤثرة في المثلث الذي في الشكل 9.8، انظر النقاش في بداية هذا الفصل.

10.8 مثال

لنكوّن الزمرة الزوجيّة D_4 للتبديلات المقابلة للطرق التي يمكن بها وضع نسختين من مربع برؤوس 1 ، و2 ، و3 ، و4، على أن يغطّي أحدهما الآخر، وتكون الرؤوس فوق الرؤوس (انظر الشكل 11.8)، عندئذ تكون D_4 **زمرة تناظرات المربع (group of symmetries of the square)**، وتسمّى أيضًا **الزمرة الثمانية (*octic group*)**، نختار مرّةً أخرى ما يبدو أنه رموز عشوائيّة التي سنوضحها لاحقًا، ببساطة، نستخدم ρ_i في الدورانات، و μ_i في انعكاسات المرآة في المنصفات المعامدة للأضلاع، و δ_i في عمليات قلب الأقطار، هناك ثمانية تبديلات متضمّنة هنا، وليكن:



الشكل 11.8

2. يرمز الكثير من المؤلفين للزمرة الزوجية ذات الترتيب n بالرمز D_{2n} وليس D_n لأن رتبة الزمرة هي $2n$.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

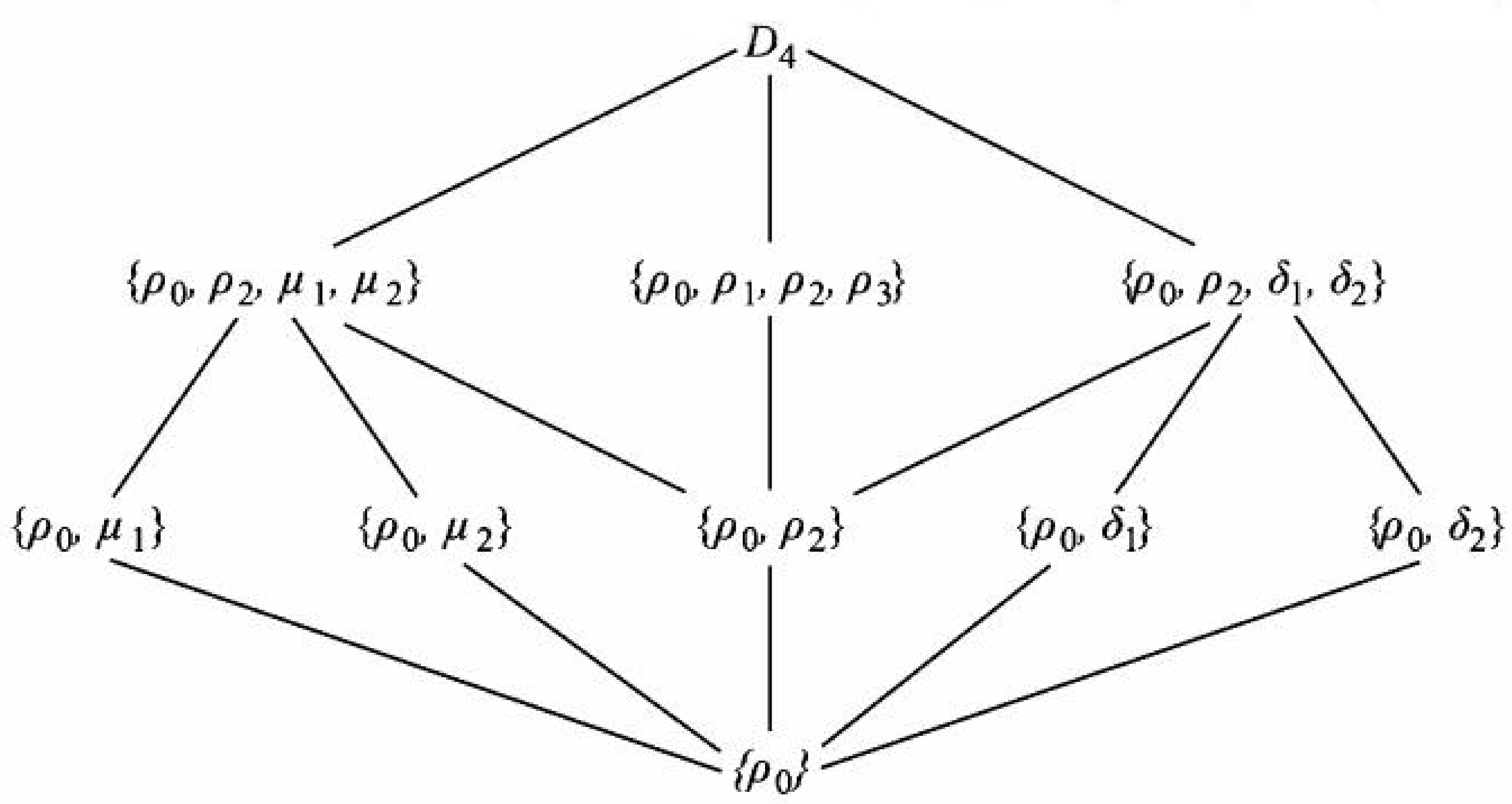
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

الجدول 12.8

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0



الشكل 13.8 : مخطّط الزمر الجزئيّة لـِ D_4.

جدول D_4 معطًى في الجدول 12.8، لاحظ أنّ D_4 أيضًا ليست إبداليّة، هذه الزمرة ببساطة جيدة، وستزوّدنا بأمثلة متقنة لكثير من المفاهيم التي سنقدّمها في نظرية الزمر، انظر إلى التناظرات الرائعة في الجدول! أخيرًا، نعطي في الشكل 13.8 مخطّط الزمر الجزئيّة للزمر الجزئيّة لـ D_4، انظر إلى التناظرات الرائعة في المخطط! ▲

مبرهنة كايلي

انظر إلى أيّ جدول زمرة في الكتاب، ولاحظ كيف يعطي كل صف من الجدول تبديلًا لمجموعة عناصر الزمرة المسرودة في أعلى الجدول، وبالمثل يعطي كل عمود من الجدول تبديلًا لمجموعة الزمرة المسرودة في يسار الجدول، وليس مفاجئًا من خلال هذه الملحوظات، أنه على الأقل أيّ زمرة منتهية G تماثل زمرة جزئيّة من الزمرة S_G لتبديلات G كلها، والشيء نفسه صحيح للزمر اللانهائية؛ حيث تنصّ مبرهنة كايلي على أنّ كل زمرة تماثل زمرة ما مكوّنة من تبديلات بالنسبة إلى ضرب التبديلات، وهذه نتيجة حسنة ومثيرة للاهتمام، وهي نتيجة تقليدية في نظرية الزمر، فللوهلة الأولى، ربما تبدو هذه المبرهنة كأنها أداة للإجابة عن الأسئلة كلها المتعلقة بالزمر، وما تبينه في الحقيقة هو عموم زمر التبديلات، وسيكون فحص الزمر الجزئيّة لزمر التبديلات S_A كلها لمجموعات A من الحجوم كلها مهمَّة ثقيلة، فقد بينت مبرهنة كايلي إنه إذا وجد مثال مناقض لمقولةٍ ما حول الزمر، فإنّ زمرة تبديلات ما ستعطي المثال المناقض.

نواصل الآن العرض في اتجاه إثبات مبرهنة كايلي، مستهلّين بتعريف، ثم نضيف تمهيدية مهمّة بذاتها.

■ **نبذة تاريخية**

وضع آرثر كايلي (*Arthur Cayley* 1821 – 1895) تعريفًا ذا صبغة تجريدية للزمرة في بحث عام 1854م، هو: "مجموعة الرموز $1, \alpha, \beta, \ldots$ وجميعها مختلفة وعلى أن يكون حاصل ضرب أيّ اثنين منها (بغض النظر بأيّ ترتيب) أو حاصل ضرب أيّ واحد منها في نفسه، ينتمي إلى المجموعة، تسمى زمرة"، ثم واصل بحثه لتعريف جدول الزمرة، ولاحظ أنّ كل سطر وعمود في الجدول "سيحوي الرموز $1, \alpha, \beta, \ldots$ جميعها"، لكن رموز كايلي مثّلت دائمًا عمليات على مجموعات، ولا يبدو أنه كان مدركًا لأيّ نوع آخر من الزمر، وقد لاحظ على سبيل المثال: أنّ عمليات المصفوفات الأربع: 1 أخذ المعكوس= α، أخذ المنقول= β، و$\gamma = \alpha\beta$ تُكوِّن – تجريديًّا – الزمرة غير الدورية من أربعة عناصر، على أيّ حال، بقي تعريفه غير ملاحظ ربع قرن.

هذا البحث عام 1854م كان واحدًا من قرابة (300) بحث كتبت في الـ (14) عامًا التي كان فيها كايلي يمارس المحاماة، إذ لم يكن قادرًا على توفير وظيفة مدرس مناسبة له، إلّا أنه أصبح أستاذًا في جامعة كامبردج عام 1863م، وعاد إلى مبرهنة الزمر عام 1878م، فنشر أربعة أبحاث، نصّ في أحدها على المبرهنة 16.8 في هذا الكتاب؛ وكان "برهانه" ببساطة قائمًا على الملاحظة من جدول الزمرة بأنّ الضرب بأيّ عنصر من الزمرة بدّل عناصر الزمرة، على أيّ حال، كتب كايلي ما يأتي: "هذا لا يثبت بأيّ صورة أنّ أفضل أو أسهل أسلوب للتعامل مع المسألة العامة [لإيجاد الزمر جميعها من رتبة معطاة] هو عدُّها مسألة [تبديلات]، ويبدو واضحًا أن السبيل الأفضل هو عدُّ المسألة العامة بذاتها".

وجدت الأبحاث عام 1878م – على خلاف البحث السابق –قارئًا متلقّيًا؛ وقد شكّلت تأثيرًا مهمًّا في تعريف الزمرة المجردة باستخدام المسلّمات عام 1882م لواتر فون دايك (*Walter Van Dyck*)، وهو التعريف الذي قاد إلى تطوير نظرية الزمر المجردة.

14.8 تعريف لتكن $f: A \longrightarrow B$ دالّة، ولتكن H مجموعة جزئيّة من A. **صورة H تحت تأثير f** (***image of** H **under** f*)، هي $\{f(h) \mid h \in H\}$، ويرمز لها $f[H]$.

15.8 تمهيدية لتكن G و G' زمرتين، ولتكن $\phi: G \longrightarrow G'$ دالّة أحاديّة تحقق $\phi(xy) = \phi(x)\, \phi\, (y)$ لكل $x,y \in G$، عندئذٍ، تكون $\phi[G]$ زمرة جزئيّة من G'، وتشكل ϕ تماثلًا من G إلى $\phi[G]$.

البرهان: سنثبت أنّ شروط الزمرة الجزئيّة المعطاة في المبرهنة 14.5 متحقّقة لـ $\phi[G]$. ليكن $x', y' \in \phi[G]$، عندئذ، يوجد $x,y \in G$ ، بحيث إنّ $x' = \phi(x)$ و $y' = \phi(y)$، وبالفرض: $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = x' y'$، ما يثبت أنّ $x' y' \in \phi[G]$. أثبتنا أنّ $\phi[G]$ مغلقة بالنسبة إلى عملية G'.

لتكن e' محايد G'، عندئذٍ يكون:

$$e'\, \phi(e) = \phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\, \phi(e)$$

بالحذف في G'، يظهر أنّ $e' = \phi\, (e)$؛ ولذلك، $e' \in \phi\, [G]$.

لـ $x' \in \phi\, [G]$ ، حيث $x' = \phi\, (x)$، لدينا:

$$e' = \phi(e) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = x'\, \phi(x^{-1})$$

الذي يبين أنّ $x'^{-1} = \phi(x^{-1}) \in \phi[G]$، هذا يكمل البرهان بأنّ $\phi[G]$ زمرة جزئيّة من G'.

ينتج الآن مباشرة أنّ ϕ تشكل تماثلًا من G إلى $\phi\, [G]$ ؛ لأن ϕ تشكل دالّة أحاديّة غامرة من G إلى $\phi[G]$، بحيث إنّ $\phi(xy) = \phi(x)\, \phi\, (y)$ لكل $x,y \in G$. ♦

16.8 مبرهنة (**مبرهنة كايلي**) كل زمرةٍ تُماثلُ زمرةَ تبديلات.

البرهان لتكن G زمرة، ونريد أن نثبت أنّ G تماثل زمرة جزئيّة من S_G. بالاستعانة بالتمهيديّة 15.8، نحتاج فقط إلى تعريف دالّة أحاديّة $\phi: G \longrightarrow S_G$ ، على أن تكون $\phi(xy) = \phi(x)\, \phi\, (y)$ لكل $x, y \in G$ لـ $x \in G$، لتكن $\lambda_x: G \longrightarrow G$ معرّفة بـ $\lambda_x\, (g\,) = x\, g$ لكل $g \in G$ (نفكّر في λ_x على أنها تجري ضربًا من اليسار بـ x.) تبيّن المعادلة $\lambda x\, (x^{-1}c) = x(x^{-1}c) = c$ لكل $c \in G$، أنّ λ_x ترسل G بصورة غامرة إلى G، فإذا كان $\lambda_x(a) = \lambda_x(b)$، فإنّ $xa = xb$ ؛ ولذلك $a = b$ بالحذف؛ لهذا λ_x أيضًا أحاديّة، وهي تبديل لـ G. نعرّف الآن $\phi: G \longrightarrow S_G$ بتعريف $\phi(x) = \lambda_x$ لكل $x \in G$.

لإثبات أنّ ϕ أحاديّة، افترض أنّ $\phi(x) = \phi(y)$، عندئذ تكون $\lambda_x = \lambda_y$ بوصفها دوالّ من G إلى G، على وجه الخصوص $\lambda_x(e) = \lambda_y(e)$؛ ولهذا يكون $xe = ye$ و $x = y$؛ لذلك ϕ أحاديّة. بقي فقط إثبات أنّ $\phi(xy) = \phi(x)\, \phi(y)$، أي إنّ $\lambda_{xy} = \lambda_x\, \lambda_y$ الآن لأيّ $g \in G$، لدينا $\lambda_{xy}(g) = (xy)g$ ضرب التبديلات هو تركيب دوال؛ لهذا

$(\lambda_x\lambda_y)(g) = \lambda_x\, (\lambda_y(g)) = \lambda_x\, (y\, g) = x\, (yg)$؛ لذلك ، $\lambda_{xy} = \lambda_x\, \lambda_y$ بالتجميع. ♦

كان بإمكاننا إثبات المبرهنة بصورة مشابهة بأخذ التبديلات ρ_x لـِ G المعرفة بالقاعدة

$$\rho_x(g) = g\,x$$

حيث $g \in G$. (يمكننا أن نفكر في ρ_x على أنها تعني الضرب من اليمين بـ x). يبيّن التمرين 52 أنّ هذه التبديلات تشكل زمرة جزئيّة من S_G، وهي أيضًا تماثل G، لكنها معطاة بدالّة $\mu: G \longrightarrow S_G$

معرفة بـِ

$$\mu(x) = \rho_{x^{-1}}$$

17.8 تعريف للدالّة ϕ في إثبات المبرهنة 16.8 **هي التمثيل المنتظم الأيسر (*left regular representation*)** لـ G، والدالّة μ في التعليق السابق **هي التمثيل المنتظم الأيمن (*right regular representation*)** لـِ G. ■

18.8 مثال لنحسب الآن التمثيل المنتظم الأيسر للزمرة المعطاة بجدول الزمرة 19.8. ونعني بـِ "نحسب" إعطاء العناصر للتمثيل المنتظم الأيسر وجدول الزمرة، هذه العناصر هي:

$$\lambda_e = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}, \quad \lambda_a = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}, \quad \lambda_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}.$$

يشبه الجدول لهذا التمثيل الجدول الأصلي مع إعادة تسمية x بـِ λ_x، كما نرى في الجدول 20.8، فمثلًا:

$$\lambda_a\lambda_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix} = \lambda_e. \quad ▲$$

الجدول 19.8

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

الجدول 20.8

	λ_e	λ_a	λ_b
λ_e	λ_e	λ_a	λ_b
λ_a	λ_a	λ_b	λ_e
λ_b	λ_b	λ_e	λ_a

وبالنسبة إلى زمرة منتهية معطاة بجدول زمرة، ρ_a هي تبديل العناصر المقابلة لترتيبها في العمود تحت a في الأعلى، و λ_a هي التبديل المقابل لترتيب العناصر في الصف المقابل لـِ a في أقصى اليسار، وقد اختيرت الرموز ρ_a و λ_a للإيحاء بالضرب من اليمين واليسار بـ a، على الترتيب.

تمارين 8

حسابات

في التمارين من 1 إلى 5 احسب الضرب المشار إليه، والمتعلق بالتبديلات الآتية من S_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. $\tau\sigma$ **2.** $\tau^2\sigma$ **3.** $\mu\sigma^2$ **4.** $\sigma^{-2}\tau$ **5.** $\sigma^{-1}\tau\sigma$

في التمارين من 6 إلى 9 احسب التعبيرات المبيّنة للتبديلات σ ، τ ، μ، التي عرفت قبل التمرين 1.

6. $|\langle\sigma\rangle|$ **7.** $|\langle\tau^2\rangle|$ **8.** σ^{100} **9.** μ^{100}

10. جزّئ مجموعة الزمر المعطاة إلى صفوف من الزمر المتماثلة. والدليل العلوي * هنا يعني العناصر جميعها غير الصفريّة للمجموعة.

$\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع	S_2
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{R}^+$ بالنسبة إلى الضرب
S_6	$\mathbb{Q}^*$ بالنسبة إلى الضرب
$17\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع	$\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب
$\mathbb{Q}$ بالنسبة إلى الجمع	الزمرة الجزئيّة $\langle\pi\rangle$ من $\mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب
$3\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع	الزمرة الجزئيّة G من S_5 المولّدة بـِ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع	

لتكن A مجموعة، ولتكن $\sigma \in S_A$. لعنصر محدد $a \in A$ ، المجموعة

$$\mathcal{O}_{a,\sigma}\{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

هي مدار a بالنسبة إلى σ (***orbit of a under σ***). في التمارين من 11 إلى 13، أوجد مدار 1 بالنسبة إلى التبديل المعرّف قبل التمرين 1.

11. σ **12.** τ **13.** μ

14. في الجدول 8.8، استخدمنا μ_3 ، μ_2 ،μ_1 ، ρ_2 ، ρ_1 ، ρ_0 بوصفها أسماء لعناصر S_3 ألـ 6. يستخدم بعض المؤلفين الرموز $\rho^2\phi$ ، $\rho\phi$ ،ϕ ،ρ^2 ، ρ ، $\in$ لهذه العناصر، حيث $\in$ عندهم هي محايدنا ρ_0، وρ هي ρ_1 عندنا، و ϕ هي μ_1 عندنا. تحقّق هندسيًّا من أنّ تعبيراتهم الستّة تعطى فعلًا S_3 كاملة.

15. بالرجوع إلى التمرين 14، أعطِ تسمية بديلة مشابهة لعناصر D_4 ألـ 8 في الجدول 12.8.

16. أوجد عدد العناصر في المجموعة $\{\sigma \in S_4 \,|\, \sigma(3) = 3\}$.

17. أوجد عدد العناصر في المجموعة $\{\sigma \in S_5 \,|\, \sigma(2) = 5\}$.

18. لتكن الزمرة S_3 في المثال 7.8:

أ. أوجد الزمر الجزئيّة الدوريّة $\langle\rho_1\rangle$ ، $\langle\rho_2\rangle$ ، و $\langle\mu_1\rangle$ لـِ S_3.

ب. أوجد جميع الزمر الجزئيّة، الفعلية وغير الفعليّة، لـِ S_3 ، وأعطِ مخطط الزمر الجزئيّة لها.

19. تحقّق من أنّ مخطط الزمر الجزئيّة لـ D_4 المبيّن في الشكل 13.8 صحيح، من خلال إيجاد جميع الزمر الجزئيّة (الدوريّة) المولّدة بعنصر واحد، ثم جميع الزمر الجزئيّة المولّدة بعنصرين، إلى آخره.

20. أعطِ جدول الضرب للزمرة الجزئيّة الدوريّة من S_5 المولّدة بـ

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

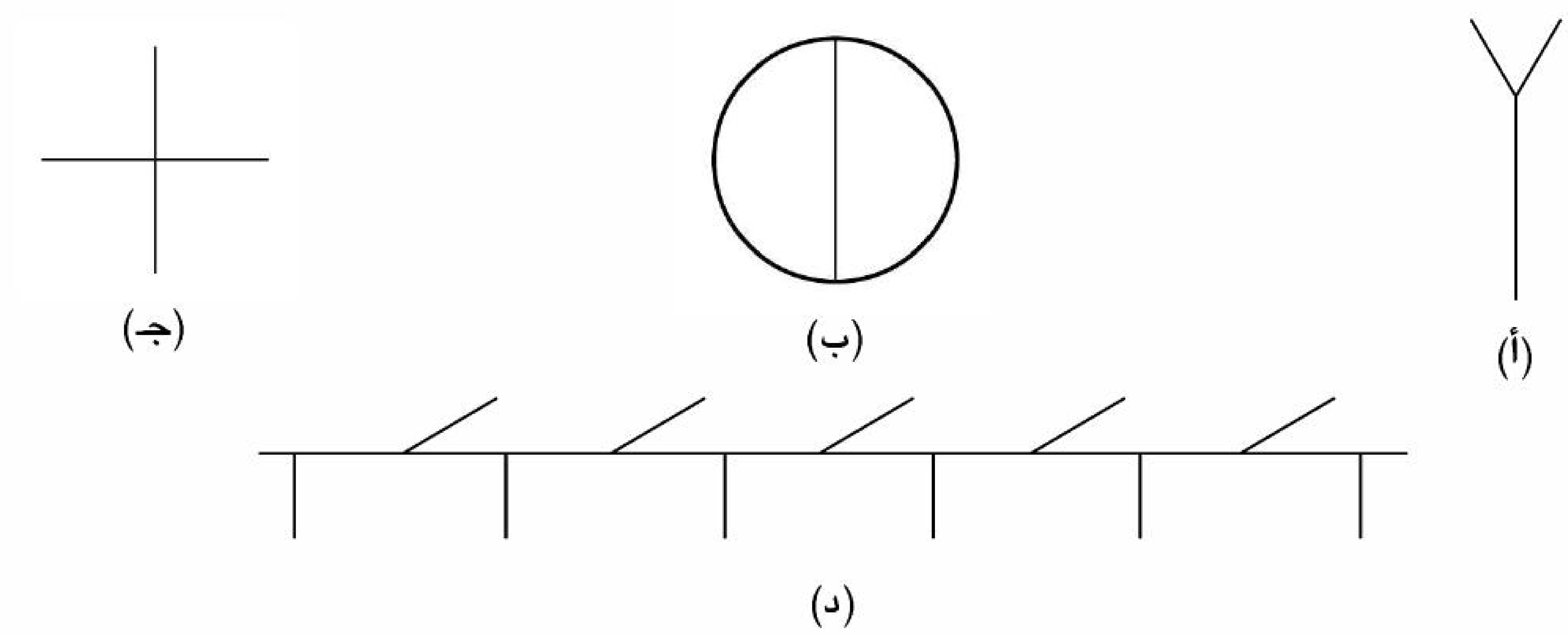
سيكون هناك ستة عناصر، ولتكن : ρ، ρ^2، ρ^3، ρ^4، ρ^5، و $\rho^0 = \rho^6$. هل هذه الزمرة تماثل S_3؟

21. أ. تحقّق من أنّ المصفوفات الستّ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تشكل زمرة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. [مساعدة: لا تحاول حساب حواصل الضرب كلها لهذه المصفوفات، وبدلًا من ذلك، فكّر في كيفيّة تحوّل متجه العمود $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بضربه من اليسار بكل من هذه المصفوفات].

ب. ما الزمرة التي نوقشت في هذا الفصل والتي تماثل هذه الزمرة من ستّ مصفوفات؟



افترض هذا الفرع يستمرّ بصورة لا نهائية إلى اليسار واليمين

الشكل 21.8

22. بعد إنجاز حلّ التمرين 21 ، اكتب ثماني مصفوفات تشكل زمرة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات، وتماثل D_4.

ناقشنا في هذا الفصل زمرة التناظرات لمثلث متساوي الأضلاع ولمربّع. أعطِ زمرة ناقشناها في الكتاب، تماثل زمرة التناظرات للشكل المشار إليه في التمارين من 23 إلى 26. (ربما تحب أن تسمي بعض النقاط على الشكل)، ثم اكتب بعض التبديلات المطابقة للتناظرات، واحسب بعض حواصل الضرب لتبديلات.

23. الشكل في الشكل 21.8 (أ)

24. الشكل في الشكل 21.8 (ب)

25. الشكل في الشكل 21.8 (جـ)

26. الشكل في الشكل 21.8 (د)

27. احسب التمثيل المنتظم الأيسر لـِ $\mathbb{Z}_4$ والتمثيل المنتظم الأيمن لـِ S_3 مستخدمًا الرموز في المثال 7.8.

مفاهيم

في التمرينين 28 و 29 صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل، دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

28. التبديل لمجموعة S، هو دالّة أحاديّة من S إلى S.

29. التمثيل المنتظم الأيسر لزمرة G، هو الدالّة من G إلى S_G، التي قيمتها عند $g \in G$ تبديل G الذي يحمل كل $x \in G$ إلى gx.

في التمارين من 30 إلى 34، حدّد ما إذا كانت الدالّة المعطاة تبديلًا لـ $\mathbb{R}$.

30. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_1(x) = x + 1$

31. $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_2(x) = x^2$

32. $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_3(x) = -x^3$

33. $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_4(x) = e^x$

34. $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_5(x) = x^3 - x^2 - 2x$

35. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

_____ أ. كل تبديل هو دالّة أحاديّة.

_____ ب. كل دالّة هي تبديل، إذا وفقط إذا كانت أحاديّة.

_____ جـ. كل دالّة غامرة من مجموعة منتهية إلى نفسها يجب أن تكون أحاديّة.

_____ د. كل زمرة G تماثل زمرة جزئيّة من S_G.

_____ هـ. كل زمرة جزئيّة من زمرة إبداليّة هي إبداليّة.

_____ و. كل عنصر من زمرة يولّد زمرة جزئيّة دوريّة من الزمرة.

_____ ز. زمرة التناظر S_{10} فيها 10 عناصر.

_____ ح. زمرة التناظر S_3 دوريّة.

_____ ط. S_n ليست دوريّة لأيّ n.

_____ ي. كل زمرة تماثل زمرة تبديلات ما.

36. بيّن بمثال أنّ كل زمرة جزئيّة فعليّة من زمرة غير إبداليّة يمكن أن تكون إبداليّة.

37. لتكن A مجموعة غير خالية، ما نوع البنية الجبرية المذكورة سابقًا في الكتاب، والمعطاة بمجموعة الدوالّ كلها من A إلى نفسها بالنسبة إلى تركيب الاقترانات؟

38. عبّر تخطيطيًا عن رسم كايلي موجه لـ D_n مستخدمًا مجموعة مولّدة مؤلفة من دوران بمقدار $2\pi/n$ بالتقدير الدائري وانعكاس (صورة مرآة)، انظر التمرين 44.

براهين مختصرة

39. أعطِ اختصارًا من جملتين لإثبات مبرهنة كايلي.

براهين

في التمارين من 40 إلى 43، لتكن A مجموعة، B مجموعة جزئيّة من A، وليكن b عنصرًا خاصًا من B. حدّد ما إذا كان مؤكّدًا أنّ المجموعة المعطاة تكون زمرة جزئيّة من S_A بالنسبة إلى العملية المتولّدة. هنا $\sigma[B] = \{\sigma(x) \mid x \in B\}$.

40. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma(b) = b\}$

41. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma(b) \in B\}$

42. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma[B] \subseteq B\}$

43. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma[B] = B\}$

44. على غرار المثالين 7.8 و 10.8، افترض مضلّعًا مستويًا منتظمًا ذا n ضلعًا، حيث $n \geq 3$. كل طريقة يمكن بها وضع نسختين من مثل هذا المضلع ذي n ضلعًا على أن تغطي إحداهما الأخرى تقابل تبديلًا معينًا للرؤوس، ومجموعة هذه التبديلات هي زمرة - **الزمرة الزوجية من الدرجة n** (***nth dihedral group***) D_n - بالنسبة إلى ضرب التبديلات. أوجد رتبة هذه الزمرة D_n، ثم بيّن هندسيًا أنّ هذه الزمرة لها زمرة جزئيّة فيها نصف عدد عناصر الزمرة الكليّة تمامًا.

45. افترض مكعبًا يملأ صندوقًا مكعبًا تمامًا، كما في المثالين 7.8 و 10.8، في هذه الحالة تقابل الطرق التي يمكن بها وضع المكعب داخل الصندوق زمرة معيّنة من تبديلات لرؤوس المكعب، وهذه الزمرة هي **زمرة الحركات (أو الدورانات) الصلبة للمكعب** (***group of rigid motions (or rotations) of the cube***). (يجب ألا يُخلط بينها وبين زمرة تناظرات الشكل، التي ستناقش في تمارين الفصل 12). أوجد عدد العناصر في هذه الزمرة، ثم بيّن هندسيًا أنّ هذه الزمرة لها على الأقل ثلاث زمر جزئيّة مختلفة من الرتبة 4، وعلى الأقل أربع زمر جزئيّة مختلفة من الرتبة 3.

46. أثبت أنّ S_n زمرة غير إبداليّة لـ $n \geq 3$.

47. تقويةً للتمرين 46، أثبت أنه إذا كان $n \geq 3$، فإنّ العنصر الوحيد σ من S_n الذي يحقّق $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ لكل $\gamma \in S_n$ هو $\sigma = \iota$، التبديل المحايد.

48. عُرِّفت المدارات قبل التمرين 11. ليكن $a, b \in A$ و $\sigma \in S_A$، فأثبت أنه إذا كان $\mathcal{O}_{a,\sigma}$ و $\mathcal{O}_{b,\sigma}$ لهما عنصر مشترك، فإنّ $\mathcal{O}_{a,\sigma} = \mathcal{O}_{b,\sigma}$.

49. إذا كانت A مجموعة، فإنّ الزمرة الجزئيّة H من S_A **متعدية على** (***transitive on***) A إذا كان لكل $a, b \in A$ يوجد $\sigma \in H$، بحيث إن $\sigma(a) = b$. أثبت أنه إذا كانت A مجموعة منتهية غير خالية، فإنه توجد زمرة جزئيّة دورية منتهية H من S_A بالصفة $|H| = |A|$ تكون متعدية على A.

50. بالرجوع إلى التعريف الذي سبق التمرين 11 وإلى التمرين 49، أثبت أنه لـ $\sigma \in S_A$، $\langle\sigma\rangle$ متعدية على A إذا وفقط إذا كان $\mathcal{O}_{a,\sigma} = A$ لعنصر ما $a \in A$.

51. (انظر التحذير صفحة 78). لتكن G زمرة مع عملية ثنائيّة $*$، ولتكن G' المجموعة G نفسها، فعَرِّف العملية الثنائيّة $*'$ على G' بـ $x *' y = y * x$ لكل $x, y \in G'$.

أ. (من البدهي أن G' بالنسبة إلى $*'$ زمرة) افترض أنّ الجدار الأمامي لغرفة صفك صنع من زجاج شفاف، وأنّ حواصل

الضرب الممكنة كلها $a * b = c$ والأمثلة الممكنة كلها $a*(b*c) = (a*b)*c$ على خاصية التجميع لـ G بالنسبة إلى * قد كتبت على الجدار بقلم سبّورة.

ما الذي سيراه الشخص إذا نظر من الغرفة المجاورة أمام غرفتك إلى الجهة الأخرى من الجدار؟

ب. أثبت من التعريف الرياضيّ لـ $*'$ أنّ G' زمرة بالنسبة إلى $*'$.

52. لتكن G زمرة. برهن على أنّ التبديلات $\rho_a: G \longrightarrow G$، حيث $\rho_a(x) = xa$ لـ $a \in G$ و $x \in G$، تشكل زمرة تُماثِلُ G.

53. **مصفوفة التبديل** (***permutation matrix***) هي مصفوفة يمكن الحصول عليها من مصفوفة محايدة بإعادة ترتيب صفوفها، فإذا كانت P مصفوفة تبديل من الدرجة $n \times n$ و A أيّ مصفوفة من الدرجة $n \times n$ و $C = PA$، فإنّ C يمكن الحصول عليها من A بإعادة ترتيب صفوف A تمامًا بالطريقة نفسها لإعادة ترتيب الصفوف التي أنتجت P من I_n.

أ. أثبت أنّ أيّ زمرة منتهية من الرتبة n تماثل زمرة مكوّنة من مصفوفات تبديل من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

ب. لكل من العناصر الأربعة b و a و e و c في الجدول 11.5 للزمرة V، أعطِ مصفوفة معينة من الدرجة 4×4 تقابله بالنسبة إلى مثل هذا التماثل.

الفصل 9 المدارات، والدورات، والزمر المتناوبة
Orbits, Cycles, and the Alternating Groups

المدارات

يحدّد كل تبديل σ لمجموعة A تجزئةً للمجموعة A إلى خلايا تحقق: $a,b \in A$ تقعان في الخلية نفسها، إذا وفقط إذا كان $b = \sigma^n(a)$ لعدد ما $n \in \mathbb{Z}$. نُكوِّن هذه التجزئة باستخدام علاقة تكافؤ مناسبة:

افترض أن $a,b, \in A$ تعرف العلاقة $a \sim b$ إذا وفقط إذا وجد $n \in \mathbb{Z}$ بحيث $b = \sigma^n(a)$. (1)

نتحقّق الآن من أنّ $\sim$ المعرّفة بالشرط (1) هي بالفعل علاقة تكافؤ.

منعكسة من الواضح أنّ $a \sim a$؛ لأن $a = \iota(a) = \sigma^0(a)$.

متناظرة إذا كان $a \sim b$، فإنّ $b = \sigma^n(a)$ لعدد ما $n \in \mathbb{Z}$، عندئذٍ يكون $a = \sigma^{-n}(b)$ و $-n \in \mathbb{Z}$؛ ولذلك $b \sim a$.

متعدية افترض أنّ $a \sim b$ و $b \sim c$، هذا يضمن أنّ $b = \sigma^n(a)$ و $c = \sigma^m(b)$ لعددين ما $n,m \in \mathbb{Z}$، ونجد بالتعويض أنّ $c = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{n+m}(a)$؛ ولذلك $a \sim c$.

1.9 تعريف لتكن σ تبديلًا لمجموعة A، صفوف التكافؤ في A المحددة بعلاقة التكافؤ (1) هي مدارات σ (**orbits of σ**). ■

2.9 مثال لأنّ التبديل المحايد ι لـِ A يُثبّت كل عنصرٍ من A، فمدارات ι هي المجموعات الجزئيّة أحاديّة العنصر من A ▲

3.9 مثال أوجد مدارات التبديل:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

في S_8

الحل: لإيجاد المدار الذي يحوي 1، نكرّر تطبيق σ، حاصلين بالرموز على:

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} \cdots .$$

لأنّ σ^{-1} سوف تعكس ببساطة اتجاه الأسهم في هذه السلسلة، نرى أنّ المدار الذي يحوي 1 هو $\{1,3,6\}$، فنختار الآن عددًا صحيحًا من 1 إلى 8 لا ينتمي إلى $\{1,3,6\}$، ولنقل 2، ونجد على صورة مشابهة أنّ المدار الذي يحوي 2 هو $\{2,8\}$. أخيرًا، نجد أنّ المدار الذي يحوي 4 هو $\{4,7,5\}$، ولأنّ هذه المدارات الثلاثة تشمل الأعداد الصحيحة كلها من 1 إلى 8، فإننا نرى أنّ القائمة الكاملة لمدارات σ هي:

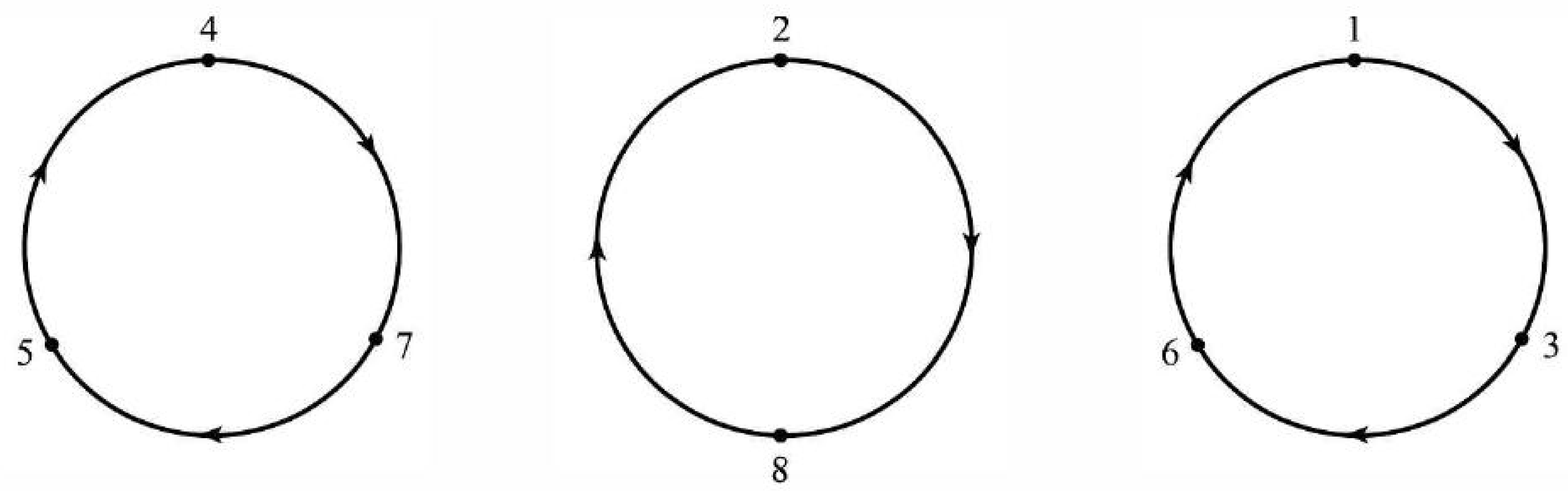
$\{1,3,6\}$ ، $\{2,8\}$ ، $\{4,5,7\}$. ▲

الدورات

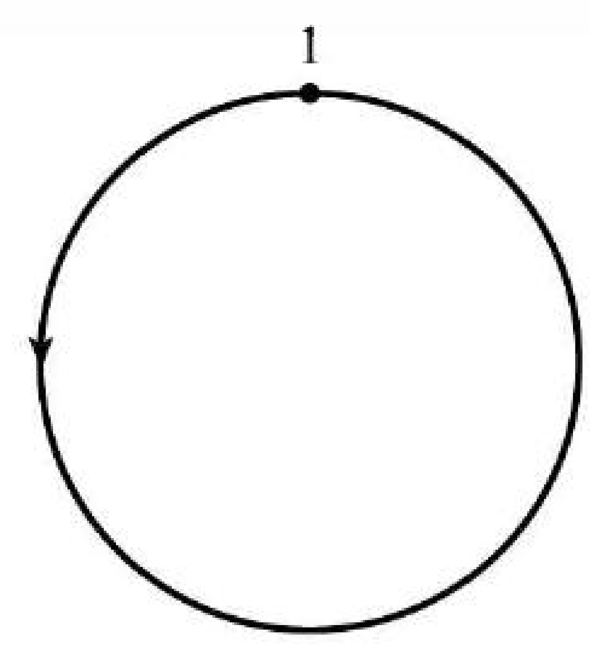
فيما تبقّى من هذا الفصل، نفترض فقط التبديلات لمجموعة منتهية A فيها n عنصرًا، ويمكننا أيضًا افتراض أنّ $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$، وأننا نتعامل مع عناصر من زمرة التناظر S_n.

ارجع إلى المثال 3.9. المدارات لـ:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

مشار إليها بالرسم في الشكل 4.9، أي إنّ σ تؤثر في كل عدد صحيح من 1 إلى 8 بواحدة من الدوائر بحمله إلى العدد الصحيح الآتي على الدائرة، متحركين بعكس عقارب الساعة في اتجاه الأسهم، فمثلًا: تشير الدائرة التي في أقصى اليسار إلى أنّ $\sigma(1) = 3$، $\sigma(3) = 6$ ، و $\sigma(6) = 1$. الشكل 4.9 هو طريقة لطيفة لتَصوُّر تركيب التبديل σ.



الشكل 4.9



الشكل 5.9

إنّ كل دائرة في الشكل 4.9 بمفردها تعرف بنفسها تبديلًا في S_8، فمثلًا: الدائرة في أقصى اليمين تقابل التبديل:
$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

المؤثر في 1 ،و3 ، و6 تمامًا بتأثير σ نفسه، لكنه يثبّت باقي الأعداد الصحيحة 2 ، و4 ، و5، و7، و8. وباختصار، μ لها مدار واحد من ثلاثة عناصر $\{1,3,6\}$ وخمسة مدارات أحاديّة العنصر $\{2\}$، و$\{4\}$ ، و$\{5\}$ ، و$\{7\}$، و$\{8\}$، مثل هذا التبديل – الموصوف بالرسم بدائرة واحدة – يُسمّى دورة (من دائرة)، على أننا نعُدّ التبديل المحايد دورةً؛ لأنه يمكن تمثيله بدائرة فيها العدد الصحيح 1 فقط، كما في الشكل 5.9، نُعرِّف الآن الحدّ دورة بطريقة رياضية دقيقة.

6.9 تعريف التبديل $\sigma \in S_n$ **دورة (cycle)**، إذا كان له على الأكثر مدار واحد يحوي أكثر من عنصر، **وطول الدورة (length)** هو عدد العناصر في مدارها الأكبر. ■

لتجنّب الرمز المتعب – كما في المعادلة (3) – للدورة، نقدّم رمز الدورة المكوّن من صفّ منفرد، فبرمز الدورة، تصبح الدورة في المعادلة (3)

$$\mu = (1،3،6)$$

ونفهم من خلال هذا الرمز أنّ μ تحمل العدد الأول 1 إلى العدد الثاني 3، والعدد الثاني 3 إلى العدد الآتي 6، إلى آخره، إلى أن يُحمَل في النهاية العدد الأخير 6 إلى العدد الأول 1، حيث يُفهم أنّ μ ثبّتت العدد الذي لم يظهر في الرمز لـ μ ، ويجب أن تكون المجموعة التي تؤثر فيها μ واضحة من السياق، ويبينها مثالنا $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

7.9 مثال في الزمرة S_5، نرى أنّ:

$$(1,3,5,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

لاحظ أنّ $(1,3,5,4) = (3,5,4,1) = (5,4,1,3) = (4,1,3,5)$. ▲

بالطبع، لأنّ الدورات أنواع خاصة من التبديلات، فيمكن ضربها تمامًا كأيّ تبديلين؛ لكن حاصل ضرب دورتين ليس بالضرورة دورة.

باستخدام رمز الدورة، نرى أنّ التبديل σ في المعادلة (2) يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب دورات:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,6)(2,8)(4,7,5) \tag{4}$$

هذه الدورات **منفصلة (disjoint)**، بمعنى أنّ أيّ عدد صحيح يُحرَّك بواحدة على الأكثر من هذه الدورات؛ لذلك، لا يظهر أيّ عدد في رمزي دورتين مختلفتين، مع العلم أنّ المعادلة (4) تُظهر σ بدلالة مداراتها، وهي وصف بسطرٍ واحدٍ للشكل 4.9، ويمكن التعبير بطريقة مشابهة عن كل تبديلٍ من S_n بوصفه حاصل ضربِ دوراتٍ منفصلة تقابل مداراته، نصوغ ذلك بمبرهنة، ونكتب إثباتها.

8.9 مبرهنة كل تبديل σ لمجموعة منتهية هو حاصل ضرب دورات منفصلة.

البرهان لتكن B_1 ، B_2 ، ... ، B_r هي مدارات σ، ولتكن μ_i هي الدورة المعرّفة بـِ

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & ، x \in B_i \\ x & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

من الواضح أنّ $\sigma = \mu_1 \; \mu_2 \; \dots \; \mu_r$، ولأنّ مدارات صفوف التكافؤ B_1 ، B_2 ، ... ، B_r منفصلة بصفتها صفوف تكافؤ مختلفة، فتكون الدورات μ_1 ، μ_2 ، ... ، μ_r منفصلة أيضًا. ◆

في حين أنّ ضرب التبديلات عمومًا غير إبدالي، إلّا أنه يُرى بسهولة أنّ ضرب الدورات المنفصلة إبداليّ، ولأنّ مدارات التبديل وحيدة، فيكون تمثيل التبديل بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة – ليس أيّ منها التبديل المحايد – وحيدًا وفق ترتيب العوامل.

9.9 مثال اعتبر التبديل $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

لنكتبه بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة. أولًا ، حُرِّكت 1 إلى 6 ثم 6 إلى 1، ما يعطي الدورة $(1,6)$، ثمّ حُرِّكت 2 إلى 5، ثمّ إلى 3، ثم إلى 2، أو $(2,5,3)$. وبهذا تمّ الاعتناء بالعناصر كلها ما عدا 4، التي ثُبِّتت؛ لذلك:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)(2,5,3)$$

ضرب الدورات المنفصلة إبداليّ، لهذا فإنّ ترتيب العاملين $(1,6)$ و $(2,5,3)$ غير مهم. ▲

عليك التدرّب على ضرب التبديلات برمز الدورات، حيث يمكن أن تكون الدورات منفصلة أو غير منفصلة، نعطي مثالًا، ونضيف مزيدًا من التدريب في التمارين من 7 إلى 9.

10.9 مثال لتكن الدورتان $(1,4,5,6)$ و $(2,1,5)$ من S_6، فبالضرب نجد أنّ:

$$(1,4,5,6)(2,1,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

و

$$(2,1,5)(1,4,5,6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

ليس أيّ من هذين التبديلين دورةً. ▲

التبديلات الزوجية والفردية

يبدو مبررًا أنّ كل إعادة ترتيب للمتسلسلة 1 ، 2 ، ... ، n يمكن الوصول إليه من خلال تبديل متكرر لمواقع أزواج من الأعداد. نناقش هذا بصورة أكثر منهجيةً.

11.9 تعريف الدورة التي طولها 2 هي مُناقلة (***transposition***). ■

لذلك، فالمناقلة تُثبّت العناصر كلها ما عدا اثنين، وترسل كلًّا من هذين العنصرين إلى الآخر. يبيّن الحساب أنّ:

$$\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=(a_1,a_n)(a_1,a_{n-1})\ldots(a_1,a_3)(a_1,a_2)$$

لذلك، أيّ دورة هي حاصل ضرب مناقلات، وبهذا نحصل على ما يأتي نتيجة للمبرهنة 8.9.

12.9 نتيجة أيّ تبديل لمجموعة منتهية فيها عنصران على الأقل هو حاصل ضرب مناقلات.

من البدهي أنّ ما تنصّ عليه هذه النتيجة هو أنّ أيّ إعادة ترتيبٍ لـ n عنصرًا يمكن الوصول إليها بتبديلٍ متتابعٍ لأزواج منها.

13.9 مثال باتباع الملاحظات التي سبقت النتيجة، نرى أنّ $(2,5,3)$ $(1,6)$ هي حاصل الضرب $(2,5)$ $(2,3)$ $(1,6)$ لمناقلات. ▲

14.9 مثال في S_n حيث $n \geq 2$، التبديل المحايد هو حاصل ضرب مناقلتين $(1,2)$ $(1,2)$. ▲

رأينا أنّ كل تبديل لمجموعة منتهية فيها عنصران على الأقل هو حاصل ضرب مناقلات، ربّما لا تكون المناقلات منفصلة، وتمثيل التبديل بهذه الطريقة ليس وحيدًا، فمثلًا: يمكننا دائمًا أن ندخل المناقلة $(1,2)$ مرّتين في البداية؛ لأن $(1,2)$ $(1,2)$ هو التبديل المحايد، والصحيح أنّ عدد المناقلات المستخدمة لتمثيل تبديلٍ معطًى يجب أن يكون إما زوجيًّا دائمًا أو فرديًّا دائمًا، وهذه حقيقة مهمّة، وسنعطي برهانين: يستخدم الأول خاصيّةً للمحددات من الجبر الخطيّ، ويشمل الثاني عدّ المدارات الذي اقتُرح من قبل ديفيد م. بلوم (*Dovid M. Bloom*).

15.9 مبرهنة ليس هناك أيّ تبديل من S_n يمكن التعبير عنه بوصفه حاصل ضرب عددٍ زوجي من المناقلات، وبوصفه حاصل ضرب عدد فردي من المناقلات في الوقت نفسه.

البرهان 1 (من الجبر الخطي) أشرنا في الفصل 8 إلى أنّ $S_A \simeq S_B$ إذا كان A و B لهما عدد العناصر نفسه. نعمل مع تبديلات الـ n صفًّا للمصفوفة المحايدة I_n من الدرجة $n \times n$ بدلًا من الأعداد $1, 2, \ldots, n$، والمصفوفة المحايدة لها المحددة 1، إنّ تبديل أيّ صفّين من مصفوفة مربّعة يغيّر إشارة المحددة، ولتكن C مصفوفةً تمّ الحصول عليها بالتبديل σ لصفوف I_n، فلو كان بالإمكان الحصول على C من I_n بعددٍ زوجيّ وبعددٍ فرديّ من المناقلات كذلك، لكان لها المحددة 1 و 1- كذلك، وهذا مستحيل؛ ولذلك، لا يمكن التعبير عن σ بوصفه حاصل ضرب عددٍ زوجيّ وعددٍ فرديّ من المناقلات.

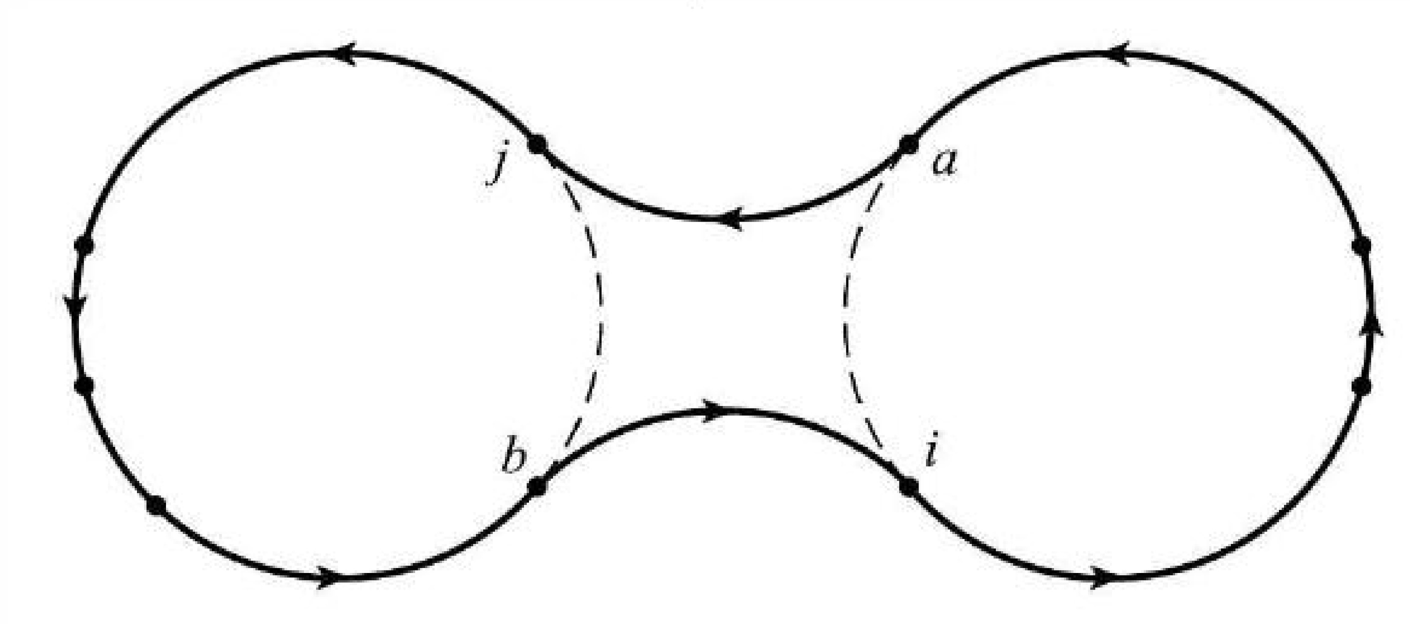
البرهان 2 (عدّ المدارات)

ليكن $\sigma \in S_n$ ولتكن $\tau = (i,j)$ مناقلة من S_n، وندّعي أنّ عدد مدارات σ وعدد مدارات $\tau\sigma$ يختلفان بـ 1.

حالة I: افترض أنّ i و j في مدارين مختلفين لـ σ، واكتب σ بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة: أولاها تحوي j والثانية تحوي i، وهما ممثّلتان بالدائرتين في الشكل 16.9، ويمكننا أن نكتب حاصل ضرب هاتين الدورتين بالرموز على الصورة:

$$(b,j,\times,\times,\times)\ (a,i,\times,\times)$$

حيث يشير الرمز $\times$ إلى عناصر أخرى محتملة في هذين المدارين.



الشكل 16.9

بحساب حاصل ضرب أول ثلاث دورات في $\tau\sigma = (i,j)\ \sigma$ نحصل على:

$$(i,j)(b,j,\times,\times,\times)(a,i,\times,\times) = (a,j,\times,\times,\times,\ b,i,\times,\times)$$

دُمج المداران الأصليّان معًا لتكوين مدار واحد في $\tau\sigma$ كما في الشكل 16.9، ويطلب التمرين 28 إعادة الحسابات لبيان أنّ الشيء نفسه يحدث لو كان أحد i و j أو كلاهما عنصرًا وحيدًا في مداره في σ.

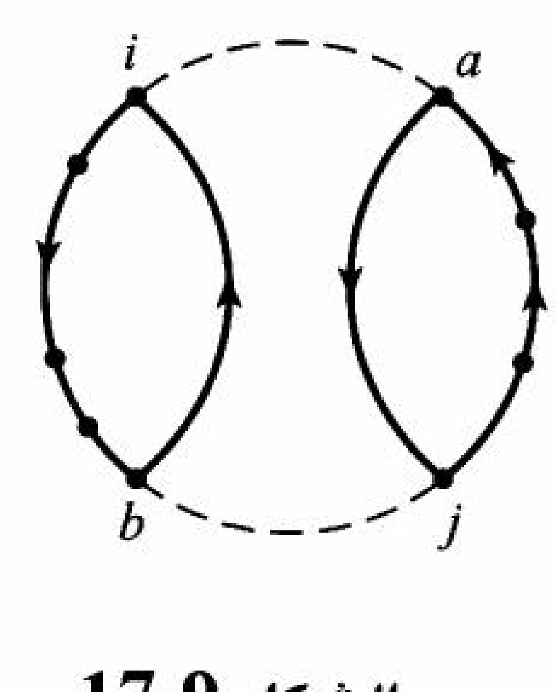
حالة II: افترض أنّ i و j في المدار نفسه لـ σ، يمكننا عندئذٍ كتابة σ بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة، على أن تكون أول دورة على الصورة:

$$(a,\ i,\ \times,\ \times,\ \times,\ b,j,\ \times,\ \times)$$

المبينة بطريقة رمزية بالدائرة في الشكل 17.9، وبحساب حاصل ضرب أول دورتين في $\tau\sigma = (i,j)\ \sigma$ نحصل على:

$$(i,j)\ (a,\ i,\ \times,\ \times,\ \times,\ b,j,\ \times,\ \times) = (a,j,\ \times,\ \times)\ (b,\ i,\ \times,\ \times,\ \times)$$

وهنا المدار الأصلي المنفرد انقسم إلى مدارين كما في الشكل 17.9.



الشكل 17.9

لقد أثبتنا أنّ عدد المدارات لـ $\tau\sigma$ يختلف عن عدد المدارات لـ σ بـ 1، والتبديل المحايد ι له n مدار؛ لأن كل عنصر هو العضو الوحيد في مداره. والآن، عدد المدارات لتبديل معطًى $\sigma \in S_n$ يختلف عن n إمّا بعددٍ زوجيّ أو فرديّ، لكن ليس بكليهما؛ لذلك، فمن المستحيل كتابة

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \cdots \tau_m \iota$$

حيث τ_k هي مناقلات بطريقتين، مرّة بـ m زوجيّة ومرّة بـ m فرديّة. ◆

18.9 تعريف يكون تبديل مجموعة منتهية زوجيًا (***even***) أو فرديًا (***odd***)، بناءً على إمكانية التعبير عنه في صورة حاصل ضرب لعددٍ زوجيّ من المناقلات، أو في صورة حاصل ضرب لعددٍ فرديّ من المناقلات على التوالي. ■

19.9 مثال إنّ التبديل المحايد ι من S_n تبديل زوجيّ؛ لأن $(1,2)\ (1,2) = \iota$، وإذا كان $n = 1$، وعليه، فإننا لا نستطيع تكوين حاصل الضرب هذا، نُعرّف ι بأنه زوجيّ، ومن ناحية أخرى، التبديل $(1,4,5,6)\ (2,1,5)$ من S_6 يمكن كتابته على الصورة:

$$(1,4,5,6)\ (2,1,5) = (1,6)\ (1,5)\ (1,4)\ (2,5)\ (2,1)$$

التي فيها خمس مناقلات؛ ولذلك، هذا تبديل فرديّ. ▲

الزمر المتناوبة

ندّعي أنه لـ $n \geq 2$، عدد التبديلات الزوجيّة في S_n هو عدد التبديلات الفرديّة نفسه؛ أي إنّ S_n تنقسم بالتساوي، وأنّ كل عددٍ هو $(n!)/2$، لإثبات ذلك، لتكن A_n مجموعة التبديلات الزوجيّة كلها في S_n ، ولتكن B_n مجموعة التبديلات الفرديّة كلها، حيث $n \geq 2$، نتابع لتعريف دالّة أحاديّة غامرة من A_n إلى B_n، وهذا بالضبط ما يلزم لإثبات أنّ A_n و B_n لهما عدد العناصر نفسه.

لتكن τ أيّ مناقلة محدّدة من S_n؛ وهي موجودة لأنّ $n \geq 2$، ويمكننا حتى أن نفترض أنّ $\tau = (1,2)$. نعرّف دالّةً

$$\lambda_\tau : A_n \rightarrow B_n$$

بالقاعدة

$$\lambda_\tau(\sigma) = \tau\,\sigma$$

أي إنّ $\sigma \in A_n$ تُرسل إلى $(1,2)\ \sigma$ بـ λ_τ، لاحظ أنّ σ زوجيّة، ويمكن التعبير عن التبديل $(1,2)\sigma$ بوصفه حاصل ضرب (1 + عدد زوجيّ) – أو عدد فرديّ – لمناقلات؛ ولذلك $(1,2)\sigma$ هي فعلًا في B_n، وإذا صحّ أنّ $\lambda_\tau(\sigma) = \lambda_\tau(\mu)$ لـ σ و μ من A_n، فإنّ

$$(1,2)\sigma = (1,2)\mu,$$

ولأنّ S_n زمرة، فيكون لدينا $\sigma = \mu$؛ لذلك، λ_τ دالّة أحاديّة، أخيرًا

$$\tau = (1,2) = \tau^{-1},$$

ولهذا إذا كان $\rho \in B_n$ ، فإنّ

$$\tau^{-1}\rho \in A_n,$$

و

$$\lambda_\tau(\tau^{-1}\rho) = \tau(\tau^{-1}\rho) = \rho.$$

لذلك، λ_τ غامرةٌ إلى B_n؛ لهذا عدد العناصر في A_n هو عدد العناصر نفسه في B_n؛ لأنه يوجد تقابلٌ بين عناصر المجموعتين.

لاحظ أنّ حاصل ضرب تبديلين زوجيين هو تبديل زوجي كذلك، أيضًا لأنّ $n \geq 2$، فالمناقلة $(1,2)$ في S_n و $(1,2)(1,2) = \iota$ هو تبديل زوجيّ. أخيرًا، لاحظ أنه إذا عُبِّر عن σ بوصفه حاصل ضرب مناقلات، فإنّ حاصل ضرب المناقلات نفسها، لكنها مأخوذة بترتيب مُعاكس هو σ^{-1}، وإذا كان σ تبديلًا زوجيًّا، فيجب أن يكون σ^{-1} زوجيًّا كذلك، وبالرجوع إلى المبرهنة 14.5، نرى أننا برهنّا العبارة الآتية:

20.9 مبرهنة إذا كان $n \geq 2$، فإنّ مجموعة التبديلات الزوجيّة كلها لـِ $\{1,2,3,\ldots,n\}$ تشكل زمرة جزئيّة رتبتها $n!/2$ من زمرة التناظرات S_n.

21.9 تعريف الزمرة الجزئية من S_n المؤلفة من التبديلات الزوجيّة لـِ n حرف، هي **الزمرة المتناوبة A_n على n حرف** (***alternating group A_n on n letters***). ■

إنّ كلًّا من S_n و A_n زمرة مهمّة، وقد بيّنت مبرهنة كايلي أنّ كل زمرة منتهية G تطابق تركيبيًّا زمرةً جزئيّة ما من S_n، حيث $n = |G|$. ويمكن إثبات أنه لا توجد صيغٌ تشمل فقط جذورًا لحل معادلات كثيرات الحدود من الدرجة n لـِ $n \geq 5$، وهذه الحقيقة ترجع في الواقع إلى تركيب A_n، أمرٌ مفاجىء كما يبدو!

تمارين 9

حسابات

أوجد جميع المدارات للتبديل المعطى في التمارين من 1 إلى 6.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

4. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ حيث $\sigma(n) = n + 1$

5. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$، حيث $\sigma(n) = n + 2$

6. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$، حيث $\sigma(n) = n - 3$

في التمارين من 7 إلى 9، احسب حاصل الضرب المشار إليه لدوراتٍ هي تبديلاتٌ لـِ $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

7. $(1,4,5)\ (7,8)(2,5,7)$

8. $(1,3,2,7)\ (4,8,6)$

9. $(1,2)(4,7,8)(2,1)(7,2,8,1,5)$

في التمارين من 10 إلى 12، عبّر عن التبديل لـِ $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة، ثم بوصفه حاصل ضرب مناقلات.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

13. تذكّر أنّ العنصر a من زمرة G بمحايد e له الرتبة $r > 0$ ، إذا كان $a^r = e$ وليس هناك قوة موجبة أصغر لـ a هي المحايد. لتكن الزمرة S_8.

أ. ما رتبة الدورة $(1,4,5,7)$؟

ب. صُغ مبرهنة مستوحاة من الفرع (أ).

جـ. ما رتبة $\sigma = (4,5)(2,3,7)$؟ وما رتبة $\tau = (1,4)(3,5,7,8)$؟

د. أوجد رتبة كل من التبديلات المعطاة في التمارين من 10 إلى 12 بالنظر إلى تحليلها بوصفها حاصل ضرب دورات منفصلة.

هـ. صُغ مبرهنة مستوحاة من الفرعين (جـ) و (د). [مساعدة: الكلمات المهمة التي تبحث عنها هي المضاعف المشترك الأصغر].

في التمارين من 14 إلى 18، أوجد أكبر رتبة ممكنة لعنصر من S_n لقيمة n المعطاة.

14. $n = 5$ **15.** $n = 6$ **16.** $n = 7$ **17.** $n = 10$ **18.** $n = 15$

19. يظهر الشكل 22.9 رسم كايلي موجهًا للزمرة المتناوبة A_4 باستخدام المجموعة المولِّدة $S = \{(1,2,3), (1,2)(3,4)\}$. تابع تسمية الرؤوس التسعة الأخرى بعناصر A_4، مُعبّرًا عنها بوصفها حواصل ضرب دورات منفصلة.

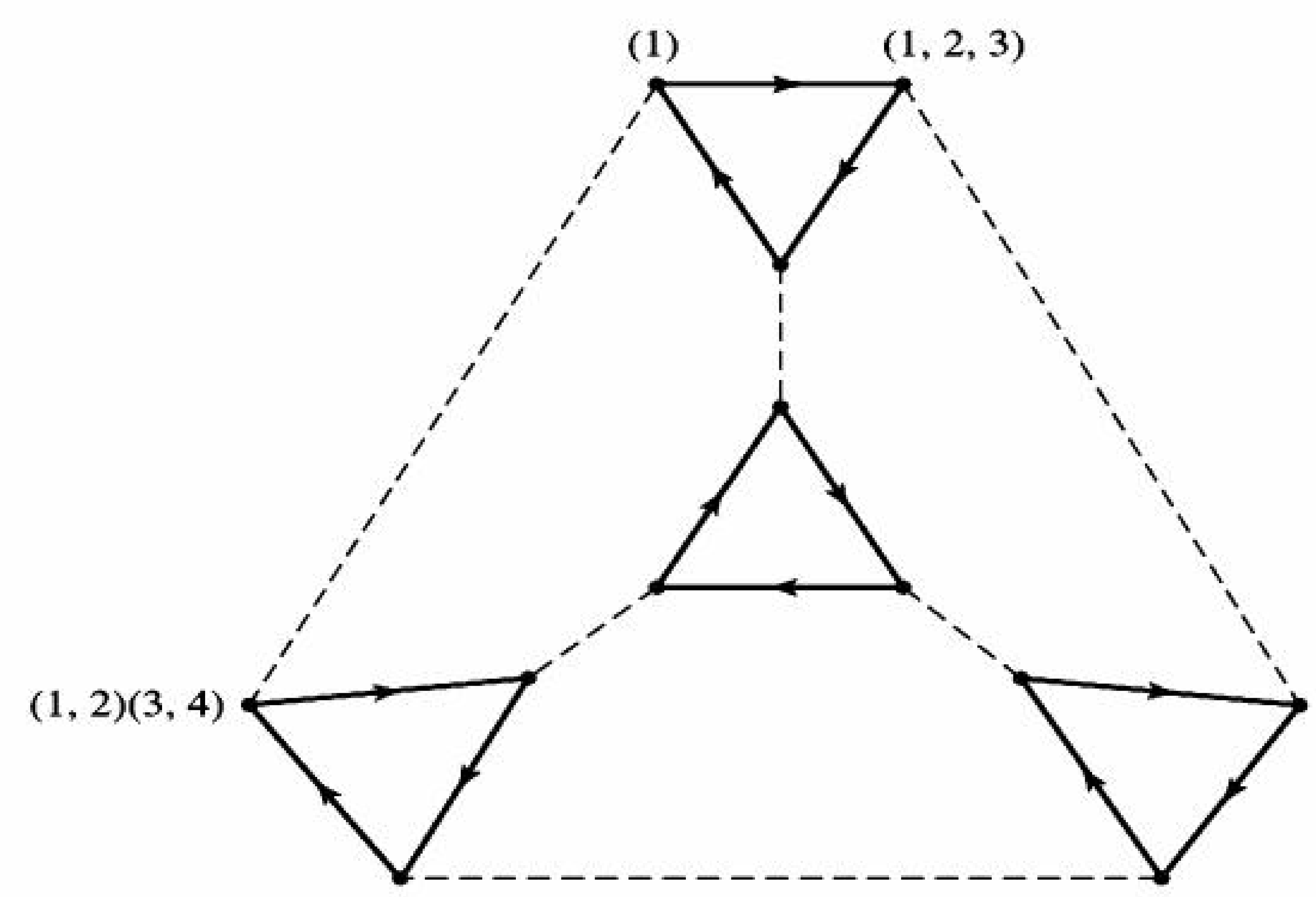
مفاهيم

في التمارين من 20 إلى 22، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل، دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

20. للتبديل σ لمجموعةٍ A، المدار لـ σ هو مجموعة جزئيّة أصغريّة غير خالية من A تُرسَل إلى نفسها على نحو غامر بـ σ.

21. الدورة هي تبديل له مدار واحد.

22. الزمرة المتناوبة هي زمرة التبديلات الزوجيّة جميعها.



الشكل 22.9

23. ضع إشارة صحّ أو إشارة خطأ.

__________ أ. كل تبديل هو دورة.

__________ ب. كل دورة هي تبديل.

__________ جـ. تعريف التبديلات الزوجيّة والفرديّة بالإمكان إعطاؤه على حدّ سواء قبل المبرهنة 15.9.

__________ د. كل زمرة جزئيّة غير تافهة H من S_9 تحوي تبديلًا فرديًّا ما، ستحوي مناقلة.

__________ هـ. A_5 فيها 120 عنصرًا.

__________ و. S_n ليست دوريةً لأيّ $n \geq 1$.

__________ ز. A_3 زمرة إبداليّة.

__________ ح. S_7 تماثل الزمرة الجزئيّة المؤلفة من العناصر كلها من S_8 التي تُثَبّت العدد 8.

__________ ط. S_7 تماثل الزمرة الجزئيّة المؤلفة من العناصر كلها من S_8 التي تُثبّت العدد 5.

__________ ي. التبديلات الفرديّة في S_8 تشكل زمرة جزئيّة من S_8.

24. أيّ من التبديلات من S_3 في المثال 7.8 زوجيّة؟ أعطِ جدول الزمرة المتناوبة A_3.

براهين مختصرة

25. أعطِ اختصارًا من جملة واحدة للإثبات 1 للمبرهنة 15.9.

26. أعطِ اختصارًا من جملتين للإثبات 2 للمبرهنة 15.9.

براهين

27. برهن على ما يأتي حول S_n إذا كان $n \geq 3$.

أ. كل تبديلٍ من S_n يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب $n - 1$ مناقلة على الأكثر.

ب. كل تبديلٍ من S_n ليس دورةً يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب $n-2$ مناقلة على الأكثر.

جـ. كل تبديلٍ فرديّ من S_n يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب $2n+3$ مناقلة، وكل تبديلٍ زوجيّ بوصفه حاصل ضرب $2n+8$ مناقلة.

28. أ. ارسم شكلًا مشابهًا للشكل 16.9 ؛ لتوضيح أنه إذا كان i و j في مدارين مختلفين لـِ σ و $\sigma(i)=i$، فإنّ عدد مدارات $\sigma(i,j)$ أقل بواحدٍ من عدد مدارات σ.

ب. أعد الفرع (أ) إذا كان $\sigma(j)=j$ أيضًا.

29. أثبت أنه لأيّ زمرة جزئيّة H من S_n، حيث $n \geq 2$، إمّا أن تكون التبديلات كلها في H زوجيّة أو نصفها بالضبط زوجية.

30. ليكن σ تبديلًا لمجموعة A سوف نقول: إنّ " σ تُحرّك (*moves*) $a \in A$" إذا كان $\sigma(a) \neq a$. إذا كانت A مجموعة منتهية، فكم عنصرًا حُرِّك بدورةٍ $\sigma \in S_A$ طولها n؟

31. لتكن A مجموعة غير منتهية، ولتكن H مجموعة كل $\sigma \in S_A$، بحيث إنّ عدد العناصر التي حُرِّكت بـِ σ (انظر التمرين 30) منتهٍ. أثبت أنّ H زمرة جزئيّة من S_A.

32. لتكن A مجموعة غير منتهية، ولتكن K مجموعة كل $\sigma \in S_A$ التي تُحرِّك (انظر التمرين 30) على الأكثر 50 عنصرًا من A. فهل K زمرة جزئيّة من S_A؟ لماذا؟

33. لتكن S_n حيث $n \geq 2$ محددةً، وليكن σ تبديلًا فرديًّا محدّدًا. أثبت أنّ أيّ تبديل فرديّ من S_n هو حاصل ضرب σ مع تبديل ما من A_n.

34. أثبت أنه إذا كانت σ دورةً طولها فردي، فإنّ σ^2 دورة.

35. مواصلةً لاتجاه التفكير الذي بُدئ بالتمرين 34، أكمل ما يأتي بشرطٍ يشمل n و r، على أن تكون العبارةُ الناتجةُ مبرهنةً:

إذا كانت σ دورةً طولها n، فإنّ σ^r أيضًا دورةٌ إذا وفقط إذا كان ...

36. لتكن G زمرة، وليكن a عنصرًا محددًا من G. أثبت أنّ الدالّة $\lambda_a: G \longrightarrow G$ المعطاة بـِ $\lambda_a(g)=ag$ لـ $g \in G$ هي تبديلٌ للمجموعة G.

37. بالرجوع إلى التمرين 36، أثبت أنّ $H=\{\lambda_a | a \in G\}$ زمرة جزئيّة من S_G، زمرة تبديلات G كلها.

38. بالرجوع إلى التمرين 49 من الفصل 8، أثبت أنّ H في التمرين 37 متعدّية على المجموعة G. [مساعدة: هذه نتيجة مباشرة لإحدى المبرهنات في الفصل 4].

39. أثبت أنّ S_n مُولَّدةٌ بـِ $\{(1,2),(1,2,3,\ldots,n)\}$. [مساعدة: أثبت أنه بتغيُّر r تعطي $(1,2,3,\ldots,n)^r(1,2)(1,2,3,\ldots,n)^{n-r}$ المناقلات كلها $(1,2)$، $(2,3)$، $(3,4)$، ... ، $(n\text{-}1,n)$، $(n,1)$. ثمّ أثبت أنّ أيّ مناقلة هي حاصل ضربٍ لبعض هذه المناقلات، واستخدم النتيجة 12.9].

الفصل 10 مجموعات المشاركة ومبرهنة لاجرانج Cosets and the Theorem of Lagrange

ربما لاحظت أنّ رتبة الزمرة الجزئيّة H من زمرة منتهية G تبدو دائمًا قاسمًا لرتبة G. هذه مبرهنة لاجرانج، وسوف نبرهنها من خلال تقديم تجزئة لـ G إلى خلايا، جميعها لها حجم H نفسه؛ لذلك، إذا وُجِد r من مثل هذه الخلايا، فسوف يكون لدينا:

$$(G \text{ رتبة}) = r(H \text{ رتبة})$$

الذي تنتج منه المبرهنة مباشرة، ثم سوف تُسمّى الخلايا في التجزئة مجموعات المشاركة لـ H، وهي مهمّة بذاتها، وفي الفصل 14، سنرى أنه إذا كانت H تحقّق خاصية معيّنة، فإن كل مجموعة مشاركة يمكن النظر إليها بوصفها عنصرًا من زمرة بطريقة طبيعية جدًّا. سنعطي في هذا الفصل بعض الإيضاحات حول زمر مجموعات المشاركة، لمساعدتك على تكوين انطباع عن الموضوع.

مجموعات المشاركة

لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، التي يمكن أن تكون من رتبة منتهية أو غير منتهية. سنُقدّم تجزئتين لـ G من خلال تعريف علاقتي تكافؤ، $\sim_L$ و $\sim_R$ على G.

1.10 مبرهنة لتكن H زمرة جزئيّة من G، ولتكن العلاقة $\sim_L$ معرّفةً على G بـ

$a \sim_L b$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}b \in H$.

لتكن $\sim_R$ مُعرّفةً بـ

$a \sim_R b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$.

عندئذٍ تكون كلتا $\sim_L$ و $\sim_R$ علاقة تكافؤ على G.

البرهان سنثبت أنّ $\sim_L$ علاقة تكافؤ، ونترك برهان ذلك لـ $\sim_R$ إلى التمرين 26. ولاحظ عند قراءتك للبرهان، كيف يتعيّن علينا باستمرار استخدام حقيقة أنّ H زمرة جزئيّة من G.

منعكسة ليكن $a \in G$، عندئذٍ يكون $a^{-1}a = e$ و $e \in H$؛ لأن H زمرة جزئيّة؛ لذلك، $a \sim_L a$.

متناظرة افترض أنّ $a \sim_L b$، عندئذ يكون $a^{-1}b \in H$، ولأنّ H زمرة جزئيّة، $(a^{-1}b)^{-1}$ في H و $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a$؛ ولذلك $b^{-1}a$ في H و $b \sim_L a$.

متعدية ليكن $a \sim_L b$ و $b \sim_L c$، عندئذ يكون $a^{-1}b \in H$ و $b^{-1}c \in H$، ولأنّ H زمرة جزئيّة، $(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c$ في H؛ ولذلك $a \sim_L c$. ♦

تُعرِّف علاقةُ التكافؤ $\sim_L$ في المبرهنة 1.10 تجزئة لـ G، كما وصفت في المبرهنة 22.0. لنلاحظ كيف تبدو الخلايا في هذه التجزئة. افترض أنّ $a \in G$، تتألف الخلية التي تحوي a من كل $x \in G$، بحيث إنّ $a \sim_L x$، وهذا يعني كل $x \in G$، بحيث إنّ $a^{-1}x \in H$. الآن، $a^{-1}x \in H$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}x = h$ لعنصر ما $h \in H$، أو بصيغة مكافئة، إذا وفقط إذا كان $x = ah$ لعنصر ما $h \in H$؛ ولذلك، فالخلية التي تحوي a هي $\{ah \mid h \in H\}$، التي نرمز لها بـ aH، وإذا ما اتبعنا التبرير نفسه لعلاقة التكافؤ $\sim_R$ المعرّفة بـ H، فنجد أنّ الخلية من هذه التجزئة التي تحوي $a \in G$ هي $Ha = \{ha \mid h \in H\}$، ولأنّ G ليست بالضرورة إبداليّة، فليس لدينا ما يدعو إلى توقُّع أن تكون aH و Ha هما المجموعة الجزئيّة نفسها من G. نعطي الآن تعريفًا منهجيًّا:

2.10 تعريف لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، المجموعة الجزئيّة $aH = \{ah \mid h \in H\}$ من G، هي **مجموعة المشارَكة اليسرى (left coset)** لـِ H التي تحوي a، بينما المجموعة الجزئيّة $Ha = \{ha \mid h \in H\}$، هي **مجموعة المشاركة اليمنى (right coset)** لـِ H التي تحوي a. ■

3.10 مثال اعرض مجموعات المشاركة اليسرى ومجموعات المشاركة اليمنى للزمرة الجزئيّة $3\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$.

الحل رَمْزُنا هنا هو الجمع؛ ولذلك، فمجموعة المشاركة اليسرى لـِ $3\mathbb{Z}$ التي تحوي m هي $m + 3\mathbb{Z}$، وبأخذ $m = 0$، نرى أنّ

$$3\mathbb{Z} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6,9, \dots\}$$

وهي نفسها واحدة من مجموعات مشاركتها اليسرى، مجموعة المشاركة التي تحوي 0، ولإيجاد مجموعة مشاركة يسرى أخرى، نختار عنصرًا من $\mathbb{Z}$ ليس في $3\mathbb{Z}$، لنَقُل: 1، ونجد مجموعة المشاركة اليسرى التي تحويه:

$$1+3\mathbb{Z} = \{\dots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\dots\}.$$

مجموعتا المشاركة اليسريان هاتان، $3\mathbb{Z}$ و $1 + 3\mathbb{Z}$، لم تستنفدا $\mathbb{Z}$ كلها بعد، فمثلًا: 2 ليس في أيّ منهما، مجموعة المشاركة اليسرى التي تحوي 2 ، هي:

$$2 + 3\mathbb{Z} = \{\dots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\dots\}$$

من الواضح أنّ مجموعات المشاركة اليسرى الثلاث التي أوجدناها تستنفد $\mathbb{Z}$؛ ولذلك، فهي تُشكّل تجزئة $\mathbb{Z}$ إلى مجموعات مشاركة يسرى لـِ $3\mathbb{Z}$.

لأنّ $\mathbb{Z}$ إبداليّة، فمجموعة المشاركة اليسرى $m + 3\mathbb{Z}$ هي مجموعة المشاركة اليمنى نفسها $3\mathbb{Z} + m$؛ ولهذا فتجزئة $\mathbb{Z}$ إلى مجموعات مشاركة يمنى هي نفسها. ▲

نلاحظ من المثال 3.10 أمرين.

لزمرة جزئيّة H من زمرة إبداليّة G، تكون تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـِ H هي تجزئة G نفسها إلى مجموعات مشاركة يمنى.

كذلك، بالنظر ثانيةً إلى المثالين 17.0 و 20.0، نرى أنّ علاقة التكافؤ $\sim_R$ للزمرة الجزئية $n\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$ هي علاقة التطابق نفسها مقياس n. تذكّر أنّ $h \equiv k \ (mod\ n)$ في $\mathbb{Z}$ ، إذا كان $h - k$ يقبل القسمة على n، وهذا تمامًا مثل قولنا: إنّ $h + (-k)$ هو في $n\mathbb{Z}$، التي هي العلاقة $\sim_R$ في المبرهنة 1.10 برمز الجمع؛ ولذلك، فتجزئة $\mathbb{Z}$ إلى مجموعات مشاركة لـِ $n\mathbb{Z}$ هي تجزئة $\mathbb{Z}$ إلى صفوف بواقٍ مقياس n؛ لهذا ، نشير غالبًا للخلايا في هذه التجزئة بمجموعات المشاركة مقياس $n\mathbb{Z}$، لاحظ أننا لا نحتاج إلى أن نحدّد مجموعات مشاركة يسرى أو يمنى؛ لأنها نفسها لهذه الزمرة الإبداليّة $\mathbb{Z}$.

4.10 مثال الزمرة $\mathbb{Z}_6$ إبداليّة. أوجد تجزئة $\mathbb{Z}_6$ إلى مجموعات مشاركة للزمرة الجزئيّة $H = \{0,3\}$.

الحل إحدى مجموعات المشاركة هي $\{0,3\}$ نفسها، ومجموعة المشاركة التي تحوي 1، هي $\{1,4\} = \{0,3\} + 1$، وكذلك مجموعة المشاركة التي تحوي 2 ، هي $\{2,5\} = \{0,3\} + 2$، ولأنّ $\{0,3\}$ ، و$\{1,4\}$ ، و$\{2,5\}$ تستنفد $\mathbb{Z}_6$ جميعها، فهذه هي مجموعات المشاركة كلها. ▲

نلفت النظر إلى شيء مدهش سنوضحه بالتفصيل في الفصل 14، فبالرجوع ثانيةً إلى المثال 4.10، يعطي الجدول 5.10 العملية الثنائيّة لـ $\mathbb{Z}_6$ لكن مع كون العناصر مسرودةً بالترتيب الذي ظهرت به في مجموعات المشاركة $\{0,3\}$، $\{1,4\}$، $\{2,5\}$، وقد ظلّلنا الجدول بحسب مجموعات المشاركة هذه.

افترض أننا رمزنا لمجموعات المشاركة هذه بحسب تظليلها بـ فا (فاتح)، مت (متوسط)، وغا (غامق)، عندئذٍ يُعرِّف الجدول 5.10 عملية ثنائية على هذه التظليلات، وفي الجدول 6.10، لاحظ أنه إذا استبدلنا 0 بـ فا، و1 بـ مت، و 2 بـ غا في الجدول 6.10، فإننا نحصل على جدول $\mathbb{Z}_3$؛ لذلك فجدول التظليلات يشكل زمرة! وسوف نرى في الفصل 14 أنه لتجزئة زمرة إبداليّة إلى مجموعات مشاركة لزمرة جزئيّة، فإنّ إعادة ترتيب جدول الزمرة بحسب العناصر في مجموعات المشاركة يُنشئ مثل زمرة مجموعات المشاركة هذه.

الجدول 5.10

$+_6$	0	3	1	4	2	5
0	0	3	1	4	2	5
3	3	0	4	1	5	2
1	1	4	2	5	3	0
4	4	1	5	2	0	3
2	2	5	3	0	4	1
5	5	2	0	3	1	4

الجدول 6.10

	فا	مت	غا
فا	فا	مت	غا
مت	مت	غا	فا
غا	غا	فا	مت

7.10 مثال يبين الجدولُ 8.10 مرةً أخرى الجدولَ 8.8 لزمرة التناظر S_3 على ثلاثة حروف، ولتكن H الزمرة الجزئيّة $\{\rho_0, \mu_1\} = \langle \mu_1 \rangle$ من S_3، فأوجد تجزئة S_3 إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H، والتجزئة إلى مجموعات مشاركة يمنى لـ H.

الحل للتجزئة إلى مجموعات مشاركة يسرى، لدينا:

$$H = \{\rho_0 , \mu_1\},$$
$$\rho_1 H = \{\rho_1\rho_0 , \rho_1 \mu_1\} = \{\rho_1 , \mu_3\},$$
$$\rho_2 H = \{\rho_2\rho_0 , \rho_2 \mu_1\} = \{\rho_2 , \mu_2\}.$$

التجزئة إلى مجموعات مشاركة يمنى هي:

$$H = \{\rho_0 , \mu_1\},$$
$$H \rho_1 = \{\rho_0\rho_1 , \mu_1\rho_1\} = \{\rho_1 , \mu_2\},$$
$$H \rho_2 = \{\rho_0\rho_2 , \mu_1\rho_2\} = \{\rho_2 , \mu_3\}.$$

والتجزئة إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H مختلفة عن التجزئة إلى مجموعات مشاركة يمنى، فمثلاً: مجموعة المشاركة اليسرى التي تحوي ρ_1 هي $\{\rho_1 , \mu_3\}$، في حين أنّ مجموعة المشاركة اليمنى التي تحوي ρ_1 هي $\{\rho_1 , \mu_2\}$، هذا لا يفاجئنا؛ لأن الزمرة S_3 غير إبداليّة. ▲

بالرجوع إلى المثال 7.10، يعطي الجدول 9.10 ضرب التبديلات في S_3، فقد سُردت العناصر بالترتيب الذي ظهرت به في مجموعات المشاركة اليسرى $\{\rho_0, \mu_1\}$، $\{\rho_1, \mu_3\}$، $\{\rho_2, \mu_2\}$ التي وجدت في ذاك المثال، ثم مرةً أخرى، ظلّلنا الجدول على صورة: فاتح، ومتوسط، وغامق بحسب مجموعات المشاركة التي تنتمي إليها العناصر، والآن، لاحظ الفرق بين هذا الجدول والجدول 5.10، فلم ينقسم جسم الجدول هذه المرة إلى كُتل 2×2 مقابل وتحت مجموعات المشاركة المظللة في اليسار والأعلى كالجدول 5.10، ولم نحصل على زمرة مجموعاتِ مشاركة، فحاصل ضرب عنصر فاتح وآخر غامق يمكن أن يكون غامقًا أو متوسطًا.

ظُلِّل الجدول 8.10 بحسب مجموعتي المشاركة اليسريين للزمرة الجزئية $\langle\rho_1\rangle = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ من S_3، هاتان هما أيضًا مجموعتا المشاركة اليمنيين، على الرغم من أنّ S_3 ليست إبداليّة، فمن الواضح من خلال الجدول 8.10 أنّ لدينا زمرة مجموعات مشاركة

الجدول 8.10

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

الجدول 9.10

	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2
ρ_0	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2
μ_1	μ_1	ρ_0	μ_2	ρ_2	μ_3	ρ_1
ρ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2	ρ_0	μ_1
μ_3	μ_3	ρ_1	μ_1	ρ_0	μ_2	ρ_2
ρ_2	ρ_2	μ_2	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3
μ_2	μ_2	ρ_2	μ_3	ρ_1	μ_1	ρ_0

تماثل $\mathbb{Z}_2$ في هذه الحالة، سوف نرى في الفصل 14 أنّ مجموعات المشاركة اليسرى لزمرة جزئيّة H من زمرة G تُنشئ زمرة مجموعات مشاركة بالضبط، عندما تكون تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H ، هي التجزئة نفسها إلى مجموعات مشاركة يمنى لـ H. وفي مثل هذه الحالة، يمكننا ببساطة أن نتكلم عن **مجموعات مشاركة** لـ H، حاذفين صفة يسرى أو يمنى، ثم سنناقش زمر مجموعات المشاركة بالتفصيل في الفصل 14، إلّا أننا نظن أنه سيكون من الأسهل لك أن تفهمها لاحقًا، إذا تعاملت معها قليلًا الآن. وقد صُمِّمت بعض التمارين في هذا الفصل لهذه الغاية.

مبرهنة لاجرانج

لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، وهنا ندّعي أنّ أيّ مجموعة مشاركة يسرى وأيّ مجموعة مشاركة يمنى لـ H فيها عدد العناصر نفسه الذي في H، ونثبت ذلك من خلال تقديم دالّة أحاديّة غامرة من H إلى مجموعة مشاركة يسرى gH لـ H لعنصر محدّد g من G، فإذا كانت H ذات رتبة منتهية، فسيثبت هذا أنّ gH فيها عدد العناصر نفسه الذي في H، وإذا كانت H غير منتهية، فيؤخذ وجود مثل هذه الدالّة على أنه تعريفُ تساوي حجم H وحجم gH. (انظر التعريف 13.0).

اختيارنا لدالّة أحاديّة $\phi: H \to gH$ هو الاختيار الطبيعي، وليكن $\phi(h) = gh$ لكل $h \in H$، هذه الدالّة غامرة إلى gH بحسب تعريف gH على الصورة $\{gh \mid h \in H\}$، ثم لإثبات أنها أحاديّة، افترض أنّ $\phi(h_1) = \phi(h_2)$ لـ h_1 و h_2 من H، عندئذٍ يكون $gh_1 = gh_2$، وبقانون الحذف في الزمرة G نحصل على $h_1 = h_2$؛ لذلك ϕ أحاديّة.

بالطبع، يمكن تكوين دالّة أحاديّة غامرة مشابهة من H إلى مجموعة المشاركة اليمنى Hg. (انظر التمرين 27). نلخص بالآتي:

> كل مجموعة مشاركة (يمنى أو يسرى) لزمرة جزئية H من زمرة G فيها عدد العناصر نفسه الذي في H.

يمكننا الآن إثبات مبرهنة لاجرانج.

10.10 مبرهنة **(مبرهنة لاجرانج)**: لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة منتهية G، عندئذٍ تكون رتبة H قاسمًا لرتبة G.

البرهان لتكن n رتبة G، ولتكن H من الرتبة m. تثبت العبارة المؤطّرة السابقة أنّ أيّ مجموعة مشاركة لـ H فيها كذلك m عنصرًا، فليكن r عدد الخلايا في تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H، عندئذٍ، يكون $n = rm$؛ ولذلك، m هي فعلًا قاسمٌ لـ n. ◆

البرهان لاحظ أنّ هذه المبرهنة الرائعة والمهمة جاءت من العدّ البسيط لمجموعات المشاركة ولعددِ العناصر في كل منها. (لا تستخفَّ أبدًا بنتائج تَعُدُّ شيئًا ما!).

سنواصل اشتقاق نتائج للمبرهنة 10.10، التي يجب أن تُعدَّ مبرهنة عدّ.

11.10 نتيجة كل زمرة من رتبة أوليّة هي دورية.

البرهان لتكن G من رتبة أوليّة p، وليكن a عنصرًا من G مختلفًا عن المحايد، عندئذ يكون في الزمرة الجزئيّة الدوريّة $\langle a\rangle$ من G المولّدة بـ a على الأقل عنصران، a و e، لكن من المبرهنة 10.10، الرتبة $m \geq 2$ لـ $\langle a\rangle$ يجب أن تقسم العدد الأوليّ p؛ لذلك، يجب أن يكون لدينا $m = p$ و $\langle a\rangle = G$؛ ولذلك G دورية. ◆

ولأنّ كل زمرة دوريّة من الرتبة p تماثل $\mathbb{Z}_p$، نرى أنّ هناك تركيب زمرة واحدًا فقط – وفق التماثل – من رتبة أوليّة معطاة p. الآن، ألم تنبثق هذه النتيجة بسهولة عن مبرهنة لاجرانج، التي هي مبرهنة عدّ؟ لا تستخفَّ أبدًا بمبرهنةٍ تعدّ شيئًا ما. (برهنة النتيجة السابقة هي سؤال امتحان مفضّل).

12.10 مبرهنة رتبة العنصر من زمرة منتهية تقسم رتبة الزمرة.

البرهان بتذكُّرنا أنّ رتبة العنصر هي الرتبة نفسها للزمرة الجزئيّة الدوريّة المولَّدة به، نرى أنّ هذه المبرهنة تنتج مباشرة من المبرهنة 10.10. ◆

13.10 تعريف لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، عدد مجموعات المشارَكة اليسرى لـِ H في G هو **الدليل** (***index***) $(G : H)$ لـِ H في G. ■

الدليل $(G : H)$ الذي عُرِّف توًّا يمكن أن يكون منتهيًا أو غير منتهٍ، فإذا كانت G منتهية، فمن الواضح أنّ $(G : H)$ منته و $(G : H) = |G|/|H|$؛ لأن كل مجموعة مشاركة لـ H تحوي $|H|$ عنصرًا، ويبيّن التمرين 35 أنّ الدليل $(G: H)$ يمكن أن يُعرَّف على حدٍّ سواء بأنّه عدد مجموعات المشاركة اليمنى لـ H في G، وهنا نصوغ مبرهنةً أساسية متعلقةً بأدلّة الزمر الجزئيّة، ونترك البرهان للتمارين (انظر التمرين 38).

14.10 مبرهنة افترض أنّ H و K زمرتان جزئيتان من زمرة G، بحيث إنّ $K \leq H \leq G$، وافترض أنّ $(H : K)$ و $(G: H)$ كلاهما منتهٍ، عندئذٍ يكون $(G: K)$ منتهيًا، و $(G: K) = (G : H)(H: K)$.

تبيّن المبرهنة 10.10 أنه إذا كان هناك زمرة جزئيّة H من زمرة منتهية G، فإنّ رتبة H تقسم رتبة G، هل ترى أنّ العكس صحيح؟ أي إنه، إذا كانت G زمرة من رتبة n، و m تقسم n، فهل هناك دائمًا زمرة جزئيّة من الرتبة m؟ سوف نرى في الفصل الآتي أنّ هذا صحيح للزمر الإبداليّة، ومن ناحية أخرى، يمكن أن يُثْبَتَ أنّ A_4 ليس لها زمرة جزئيّة من الرتبة 6، ما يعطي مثالًا مناقضًا للزمر غير الإبداليّة.

تمارين 10

حسابات

1. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $4\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$.

2. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $4\mathbb{Z}$ من $2\mathbb{Z}$.

3. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $\langle 2 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{12}$.

4. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $\langle 4 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{12}$.

5. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $\langle 18 \rangle$ من $\mathbb{Z}_{36}$.

6. أوجد مجموعات المشاركة اليسرى كلها للزمرة الجزئيّة $\{\rho_0, \mu_2\}$ من الزمرة D_4 المعطاة بالجدول 12.8.

7. أعد التمرين السابق، لكن أوجد هذه المرة مجموعات المشاركة اليمنى. هل ترى أنها هي مجموعات المشاركة اليسرى نفسها؟

8. أعد كتابة الجدول 12.8 بالترتيب الظاهر من خلال مجموعات المشاركة اليسرى في التمرين 6. هل يبدو أنك حصلت على زمرة مجموعات مشاركة من الرتبة 4؟ فإذا كان كذلك، فهل هي تماثل $\mathbb{Z}_4$ أم زمرة كلاين الرباعيّة V؟

9 . أعد التمرين 6 للزمرة الجزئيّة $\{\rho_0, \mu_2\}$ من D_4.

10. أعد التمرين السابق، لكن أوجد هذه المرة مجموعات المشاركة اليمنى. هل هي مجموعات المشاركة اليسرى نفسها؟

11 . أعد كتابة الجدول 12.8 بالترتيب الظاهر من خلال مجموعات المشاركة اليسرى في التمرين 9. هل يبدو أنك حصلت على زمرة مجموعات مشاركة من الرتبة 4؟ إذا كان كذلك، فهل هي تماثل $\mathbb{Z}_4$ أم زمرة كلاين الرباعية V؟

12. أوجد دليل $\langle 3 \rangle$ في الزمرة $\mathbb{Z}_{24}$.

13. أوجد دليل $\langle \mu_1 \rangle$ في الزمرة S_3، باستخدام الرمز في المثال 7.10.

14. أوجد دليل $\langle \mu_2 \rangle$ في الزمرة D_4 المعطاة في الجدول 12.8.

15. ليكن $\sigma = (1, 2, 5, 4)(2, 3)$ من S_5. أوجد دليل $\langle \sigma \rangle$ في S_5.

16. ليكن $\mu = (1, 2, 4, 5)(3, 6)$ من S_6. أوجد دليل $\langle \mu \rangle$ في S_6.

مفاهيم

في التمرينين 17 و 18، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

17. لتكن G زمرة، ولتكن $H \subseteq G$. *مجموعة المشاركة اليسرى لـِ H التي تحوي a* ، هي $aH = \{ah | h \in H\}$.

18. لتكن G زمرة، ولتكن $H \leq G$. إنّ *دليل H في G* هو عدد مجموعات المشاركة اليمنى لـِ H في G.

19. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ **أ**. كل زمرة جزئيّة من أيّ زمرة لها مجموعات مشاركة يسرى.

______ **ب**. عدد مجموعات المشاركة اليسرى لزمرة جزئيّة من زمرة منتهية يقسم رتبة الزمرة.

______ **جـ**. كل زمرة من رتبة أوّليّة هي إبداليّة.

______ **د**. لا يمكن أن تكون هناك مجموعات مشاركة يسرى لزمرة جزئيّة منتهية من زمرة غير منتهية.

______ **هـ**. الزمرة الجزئيّة من زمرة، هي مجموعة مشاركة يسرى لذاتها.

______ **و**. فقط الزمر الجزئيّة من زمرٍ منتهية يمكن أن يكون لها مجموعات مشاركة يسرى.

______ ز. A_n لها الدليل 2 في S_n لـِ $n > 1$.

______ **ح**. مبرهنة لاجرانج نتيجة لطيفة.

______ **ط**. كل زمرة منتهية تحوي عنصرًا من أيّ رتبة تقسم رتبة الزمرة.

______ **ي**. كل زمرةٍ منتهيةٍ دوريّةٍ تحوي عنصرًا من أيّ رتبة تقسم رتبة الزمرة.

في التمارين من 20 إلى 24، أعطِ مثالًا على الزمرة الجزئيّة والزمرة المطلوبتين إن أمكن، وإذا كان ذلك غير ممكن، فبيّن السبب.

20. زمرة جزئيّة من زمرة إبداليّة G، مجموعاتها المشاركة اليسرى ومجموعاتها المشاركة اليمنى تعطيان تجزئتين مختلفتين لـِ G.

21. زمرة جزئيّة من زمرة G، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة لـِ G إلى خلية واحدة فقط.

22. زمرة جزئيّة من زمرة من الرتبة 6، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة للزمرة إلى 6 خلايا.

23. زمرة جزئيّة من زمرة من الرتبة 6، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة للزمرة إلى 12 خلية.

24. زمرة جزئيّة من زمرة من الرتبة 6، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة للزمرة إلى 4 خلايا.

براهين مختصرة

25. أعطِ اختصارًا من جملة واحدة لإثبات المبرهنة 10.10.

براهين

26. برهن على أنّ العلاقة $\sim_R$ في المبرهنة 1.10 هي علاقة تكافؤ.

27. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، وليكن $g \in G$. عرِّف دالةً أحاديّة غامرة من H إلى Hg، وبرهن على أنّ دالّتك أحاديّة وغامرة إلى Hg.

28. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، بحيث إنّ $g^{-1}hg \in H$ لكل $g \in G$، وكل $h \in H$. أثبت أنّ كل مجموعة مشاركة يسرى gH هي مجموعة المشاركة اليمنى Hg نفسها.

29. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G. برهن على أنه إذا كانت تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H هي التجزئة نفسها إلى مجموعات مشاركة يمنى لـ H، فإنّ $g^{-1}hg \in H$ لكل $g \in G$ ، وكل $h \in H$. (لاحظ أنّ هذا هو عكس التمرين 28).

لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، وليكن $a, b \in G$. فبرهن في التمارين من 30 إلى 33 على صحّة العبارة أو أعطِ مثالًا مناقضًا.

30. إذا كان $aH = bH$، فإنّ $Ha = Hb$.

31. إذا كان $Ha= Hb$، فإنّ $b \in Ha$.

32. إذا كان $aH = bH$، فإنّ $Ha^{-1} = Hb^{-1}$.

33. إذا كان $aH = bH$، فإنّ $a^2H = b^2H$.

34. لتكن G زمرة من الرتبة pq، بحيث إنّ p و q عددان أوّليان. أثبت أنّ أيّ زمرة جزئيّة فعلية من G هي دوريّة.

35. أثبت أنّ هناك العدد نفسه من مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لزمرة جزئيّة H من زمرة G؛ أي، قدّم دالّة أحاديّة غامرة من جماعة مجموعات المشاركة اليسرى إلى جماعة مجموعات المشاركة اليمنى. (لاحظ أنّ هذه النتيجة واضحة من خلال العدّ للزمر المنتهية، وأنّ برهانك يجب أن يصلح لأيّ زمرة).

36. بيّن التمرين 29 في الفصل 4 أنّ أيّ زمرة منتهية من رتبة زوجيّة $2n$ تحوي عنصرًا من الرتبة 2. باستخدام مبرهنة لاجرانج، أثبت أنه إذا كانت n فرديّة، فإنّ الزمرة الإبداليّة من الرتبة $2n$ تحوي عنصرًا واحدًا بالضبط من الرتبة 2.

37. أثبت أنّ الزمرة التي فيها عنصران على الأقل، لكن ليس لها زمرة جزئيّة فعلية غير تافهة، يجب أن تكون منتهية ومن رتبة أوّليّة.

38. أثبت المبرهنة 14.10 [مساعدة: لتكن $\{a_i H \mid i = 1, \cdots, r\}$ جماعة مجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـ H في G ، و $\{b_j K \mid j = 1, \cdots, s\}$ جماعة مجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـ K في H. برهن على أنّ:

$$\left\{(a_i b_j)K \mid i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,s\right\}$$

هي جماعة مجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـ K في G].

39. أثبت أنه إذا كانت H زمرة جزئيّة دليلها 2 في زمرة منتهية G، فإنّ أيّ مجموعة مشاركة يسرى لـ H هي كذلك مجموعة مشاركة يمنى لـ H.

40. أثبت أنه إذا كان للزمرة G مع محايد e الرتبةَ المنتهية n، فإنّ $a^n = e$ لكل $a\in G$.

41. أثبت أنّ أيّ مجموعة مشاركة يسرى للزمرة الجزئيّة $\mathbb{Z}$ من زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، تحوي عنصرًا واحدًا بالضبط x ، بحيث إنّ $0 \leq x < 1$.

42. أثبت أنّ الدالّة جيب (**sine**) تقرن القيمة نفسها مع كل عنصر من أيّ مجموعة مشاركة يسرى محدّدة للزمرة الجزئيّة $\langle 2\pi \rangle$ من زمرة الجمع للأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. (لذلك تولِّدُ جيب (**sine**) دالةً حسنة التعريف على مجموعة مجموعات

المشاركة؛ ونحصل على قيمة الدالّة عند مجموعة مشاركة، باختيارنا لعنصر x من مجموعة المشاركة وحساب $sinx$).

43. لتكن H و K زمرتين جزئيّتين من زمرة G. عرّف ~ على G بـِ $a \sim b$، إذا وفقط إذا كان $a = hbk$ لعنصر ما $h \in H$ وعنصر ما $k \in K$.

أ. برهن على أنّ ~ هي علاقة تكافؤ على G.

ب. صِف العناصر في صفّ التكافؤ الذي يحوي $a \in G$. (تسمّى صفوف التكافؤ هذه **مجموعات المشاركة المزدوجة** (***double cosets***).

44. لتكن S_A زمرة التبديلات جميعها للمجموعة A، وليكن c عنصرًا خاصًّا من A.

أ. أثبت أنّ $\{\sigma \in S_A \mid \sigma(c) = c\}$ $S_{c,c}$ زمرة جزئيّة من S_A.

ب. ليكن $d \neq c$ عنصرًا خاصًّا آخر من A هل $S_{c,d} = \{\sigma \in S_A \mid \sigma(c) = d\}$ زمرة جزئيّة من S_A؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

جـ. شخِّص المجموعات $S_{c,d}$ في الفرع (ب) بدلالة الزمرة الجزئيّة $S_{c,c}$ في الفرع (أ).

45. أثبت أنّ للزمرة الدوريّة المنتهية من الرتبة n زمرة جزئيّة واحدة بالضبط من كل رتبةٍ d تقسم n، وأنّ هذه هي الزمر الجزئيّة كلها لها.

46. تُعرَّف دالة–**فاي لأويلر** (***Euler phi-function***) للأعداد الصحيحة الموجبة n بـِ $\varphi(n)= s$، حيث s هي عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أقل من أو تساوي n الأوّلية نسبيًّا مع n. استخدم التمرين 45 في إثبات أنّ:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

يؤخذ المجموع على الأعداد الصحيحة الموجبة d كلها التي تقسم n. [مساعدة: لاحظ أنّ عدد مولّدات $\mathbb{Z}_d$ هو $\varphi(d)$ بحسب النتيجة 16.6].

47. لتكن G زمرة منتهية. أثبت أنه إذا كان لأيّ عدد صحيح موجب m، عدد الحلول x للمعادلة $x^m= e$ في G هو على الأكثر m، فإنّ G دوريّة. [مساعدة: استخدم المبرهنة 12.10 والتمرين 46 في إثبات أنّ G يجب أن تحوي عنصرًا من الرتبة $n= |G|$].

الفصل 11 الضرب المباشر والزمر الإبدالية منتهية التولُّد

Direct Products and Finitely Generated Abelian Groups

الضرب المباشر

لنُمضِ لحظةً في مراجعة مخزوننا الحالي من الزمر، ولنبدأ بالزمر المنتهية، لدينا الزمرة الدورية $\mathbb{Z}_n$، وزمرة التناظر S_n، والزمرة المتناوبة A_n لكل عدد صحيح موجب n، ولدينا أيضًا الزمرة الزوجيّة D_n من الفصل 8، وزمرة كلاين الرباعية V، وبالطبع نعرف أنّ لهذه الزمر زمرًا جزئيّة، ولننتقل الآن إلى الزمر غير المنتهية، فلدينا زمرٌ مؤلفة من مجموعات أعداد بالنسبة إلى الجمع أو الضرب المعتادين، على سبيل المثال: $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{R}$، و $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الجمع، وعناصرها غير الصفرية بالنسبة إلى الضرب، ولدينا الزمرة U للأعداد المركبة ذات المقدار 1 بالنسبة إلى الضرب، التي تماثل كُلًّا من الزمر $\mathbb{R}_c$ بالنسبة إلى الجمع مقياس c، حيث $c \in \mathbb{R}^+$، ولدينا أيضًا الزمرة S_A للتبديلات جميعها للمجموعة غير المنتهية A، إضافة إلى زمر مختلفة مكوّنة من مصفوفات.

يتمثل أحد أهداف هذا الفصل في بيان طريقةٍ لاستخدام زمر معروفة بوصفها وحدات بناء لتشكيل مزيد من الزمر، وسوف يعاد إنشاء زمرةِ كلاين الرباعية بهذه الطريقة من زمر دوريّة، حيث سيعطينا توظيف هذا الإجراء مع الزمر الدوريّة طائفةً كبيرة من الزمر الإبداليّة، ويمكن إثبات أنها تشمل أنواع التراكيب جميعها الممكنة للزمرة الإبداليّة المنتهية. سنبدأ بتعميم التعريف 4.0.

1.11 تعريف الضرب الديكارتي للمجموعات (*Cartesian product of sets*) $S_1, S_2, \ldots, S_n$ هو مجموعة المتعددات كلها $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ من الرتبة n، حيث $a_i \in S_i$ لِـ $i = 1, 2, \ldots, n$. يرمز للضرب الديكارتي إمّا بـِ

$$S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$$

أو بـِ

$$\prod_{i=1}^{n} S_i$$

يمكننا أيضًا تعريف الضرب الديكارتي لعدد غير منتهٍ من المجموعات، لكن التعريف أكثر تعقيدًا إلى حدّ بعيد، ولن نحتاج إليه.

الآن، لتكن $G_1, G_2, \ldots, G_n$ زمرًا، ولنستخدم رمز الضرب في عمليات الزمر كلها، فبالنظر إلى G_i بوصفها مجموعات، يمكننا تكوين $\prod_{i=1}^{n} G_i$، لنثبت أنّ بإمكاننا جعل $\prod_{i=1}^{n} G_i$ زمرةً من خلال العملية الثنائيّة للضرب عبر المركبات، لاحظ ثانيةً أننا نتجاوز عندما نستخدم رمز الزمرة نفسه لمجموعة عناصر الزمرة.

2.11 مبرهنة لتكن $G_1, G_2, \ldots, G_n$ زمرًا، لِـ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ من $\prod_{i=1}^{n} G_i$، عرّف $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ على أنه العنصر $(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$، عندئذٍ، تكون $\prod_{i=1}^{n} G_i$ زمرة – الضرب المباشر للزمر (**direct product of the groups**) G_i– بالنسبة إلى هذه العملية الثنائيّة.

البرهان لاحظ أنه لأنّ G_i زمرة، فيكون لدينا $a_i \in G_i$، $b_i \in G_i$، و $a_ib_i \in G_i$؛ لذلك، فتعريف العملية الثنائيّة على $\Pi_{i=1}^{n}G_i$ المعطى في نصّ المبرهنة منطقي؛ أي إنّ $\Pi_{i=1}^{n}G_i$ مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائيّة.

قانون التجميع في $\Pi_{i=1}^{n}G_i$ يُرَدُّ إلى قانون التجميع في كل مركبة على النحو الآتي:

$$(a_1,a_2,....,a_n)\left[(b_1,b_2,...,b_n)(c_1,c_2,...,c_n)\right]$$

$$=(a_1,a_2,....,a_n)(b_1c_1,b_2c_2,...,b_nc_n)$$

$$=(a_1(b_1c_1),a_2(b_2c_2),....,a_n(b_nc_n))$$

$$=((a_1b_1)c_1,(a_2b_2)c_2,....,(a_nb_n)c_n)$$

$$=(a_1b_1,a_2b_2...,a_nb_n)(c_1,c_2,....,c_n)$$

$$=\left[(a_1,a_2,...,a_n)(b_1,b_2,...,b_n)\right](c_1,c_2,...,c_n)$$

إذا كان e_i هو العنصر المحايد في G_i، فمن الواضح مع الضرب عبر المركبات أنّ $(e_1, e_2, ..., e_n)$ محايدٌ في $\Pi_{i=1}^{n}G_i$. أخيرًا، إنّ معكوس $(a_1, a_2, ..., a_n)$ هو $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, ..., a_n^{-1})$؛ احسب حاصل الضرب عبر المركبات؛ لذلك $\Pi_{i=1}^{n}G_i$ زمرة. ♦

في حالة أنّ العملية لكل G_i إبداليّة، نستخدم أحيانًا رمز الجمع في $\Pi_{i=1}^{n}G_i$ ونشير إلى $\Pi_{i=1}^{n}G_i$ بالجمع المباشر للزمر G_i (*direct sum of the groups*). ويستخدم – أحيانًا – الرمز $\oplus_{i=1}^{n}G_i$ في هذه الحالة بدلًا من $\Pi_{i=1}^{n}G_i$، خاصة مع الزمر الإبداليّة مع العملية +. الجمع المباشر للزمر الإبداليّة $G_1,G_2,...,G_n$ يمكن أن يكتب $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$، سنترك للتمرين 46 البرهان على أنّ الضرب المباشر لزمر إبداليّة هو كذلك إبداليّ.

يُرى مباشرة أنه إذا كانت S_i فيها r_i عنصرًا لـ $i= 1, 2, ..., n$، فإنّ $\Pi_{i=1}^{n}S_i$ فيه $r_1r_2...r_n$ عنصرًا؛ لأنه في المتعدّد من الرتبة n هناك r_1 خيارًا للمركبة الأولى من S_1، ولكل من هذه الخيارات هناك r_2 خيارًا للمركبة الآتية من S_2، وهكذا.

3.11 مثال لتكن الزمرة $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ التي فيها $2.3 = 6$ عنصرًا، تحديدًا $(0,0)$، $(0,1)$، $(0,2)$، $(1,0)$، $(1,1)$، $(1,2)$، ندّعي أنّ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ دورية، ومن الضروري فقط إيجاد مولّد. لنجرّب $(1,1)$، هنا تُكتب العمليتان في $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ بالجمع، ولهذا فسنتبع الطريقة نفسها في الضرب المباشر $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned}
(1,1) &= (1,1)\\
2(1,1) &= (1,1)+(1,1) = (0,2)\\
3(1,1) &= (1,1)+(1,1)+(1,1) = (1,0)\\
4(1,1) &= 3(1,1)+(1,1) = (1,0)+(1,1) = (0,1)\\
5(1,1) &= 4(1,1)+(1,1) = (0,1)+(1,1) = (1,2)\\
6(1,1) &= 5(1,1)+(1,1) = (1,2)+(1,1) = (0,0)
\end{aligned}$$

لذلك، $(1,1)$ مولدٌ لـ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$، ولأنه يوجد – وفق التماثل– تركيب زمرة دورية واحد فقط من رتبة معطاة، فإننا نرى أنّ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ تماثل $\mathbb{Z}_6$. ▲

4.11 مثال لنفترض $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$، هذه زمرة من تسعة عناصر، ندّعي أنّ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ليست دوريّة، ولأنّ الجمع عبر المركّبات، وأنّ جمع كل عنصر من $\mathbb{Z}_3$ لنفسه ثلاث مرّات يعطي المحايد، فهذا ما سيحدث في $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$؛ لذلك ليس هناك عنصر يمكن أن يولّد الزمرة؛ لأن المولّد إذا جمع لنفسه مرات متتالية، فيمكن أن يعطي المحايد فقط بعد تسع مرات، وقد وجدنا تركيبًا آخر لزمرة من الرتبة 9، وتبين حجة مشابهة أنّ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ليست دوريّة؛ لذلك يجب أن تكون $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ مماثلةً لزمرة كلاين الرباعية. ▲

وضّح المثالان السابقان المبرهنة الآتية:

5.11 مبرهنة الزمرة $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ دوريّة، وتماثل $\mathbb{Z}_{mn}$ إذا وفقط إذا كان m و n أوّليّين نسبيًّا، أي إنّ gcd لـ m و n هو 1.

البرهان لنفترض الزمرة الجزئيّة الدوريّة من $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ المولّدة بـ $(1,1)$ كما وُصفت في المبرهنة 17.5، وقد بيّن عملنا السابق، أنّ رتبة هذه الزمرة الجزئيّة الدوريّة هي أصغر قوة لـ $(1,1)$ تعطي المحايد $(0,0)$. ورفع قوة لـ $(1,1)$ في رمز الجمع هنا سوف يقتضي تكرار جمع $(1,1)$ لنفسها، وبالنسبة إلى الجمع عبر المركبات، فتؤدي المركبة الأولى $1 \in \mathbb{Z}_m$ إلى 0 فقط بعد m مُجْمَعًا، $2m$ مُجْمَعًا، وهكذا، وتؤدي المركبة الثانية $1 \in \mathbb{Z}_n$ إلى 0 فقط بعد n مُجْمَعًا، $2n$ مُجْمَعًا، وهكذا، وحتى تؤديا إلى 0 معًا، فيجب أن يكون عدد المُجمعَات مضاعفًا لكلا m و n، ثمّ سيكون العدد الأصغر الذي يشكل مضاعفًا لكل من m و n هو mn ، إذا وفقط إذا كان gcd لـ m و n هو 1؛ وفي هذه الحالة، يولّد $(1,1)$ زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة mn، التي هي رتبة الزمرة كاملةً، وهذا يثبت أنّ $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ دوريّة من الرتبة mn، – وعليه، فهي تماثل $\mathbb{Z}_{mn}$ – إذا كان m و n أوّليّين نسبيًّا.

في المقابل، افترض أنّ gcd لـ m و n هو $d > 1$، عندئذ يكون mn/d قابلًا للقسمة على كل من m و n؛ ونتيجة لذلك، لأيّ (r,s) من $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ يكون لدينا:

$$\underbrace{(r,s)+(r,s)+\ldots+(r,s)}_{\text{مُجمعًا } mn/d} = (0,0)$$

لهذا، فليس هناك عنصر (r,s) من $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ يمكن أن يولّد الزمرة كاملةً؛ لذلك نقول: $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ليست دورية؛ ولذلك لا تماثل $\mathbb{Z}_{mn}$. ♦

ويمكن توسيع هذه المبرهنة بمناقشة مشابهة إلى حاصل ضرب أكثر من عاملين. نصوغ ذلك بوصفه نتيجة دون الذهاب عبر تفاصيل البرهان.

6.11 نتيجة الزمرة $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{m_i}$ دورية وتماثل $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \ldots m_n}$، إذا وفقط إذا كانت الأعداد m_i لكل $i = 1, \ldots, n$ أولية نسبيًا مثنى مثنى.

7.11 مثال تبيّن النتيجة السابقة أنه إذا كتبت n بوصفها حاصل ضرب قوًى لأعدادٍ أوّليّة مختلفة، كما في

$$n = (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} \ldots (p_r)^{n_r},$$

فإنّ $\mathbb{Z}_n$ تماثل

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{n_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_r)^{n_r}}$$

على وجه الخصوص، $\mathbb{Z}_{72}$ تماثل $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$. ▲

نوّهنا سابقًا بأنّ تغيير ترتيب العوامل في الضرب المباشر يؤدي إلى زمرة تماثل الأصلية، وتغيّرت – ببساطة– أسماء العناصر عن طريق تبديلٍ للمركبات في المتعدد ذي الرتبة n.

طلب إليك التمرين 47 في الفصل 6 أنّ تعرِّف المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين موجبين r وs بوصفه مولّدًا لزمرة دوريّة معينة، وإنه لأمر مباشر أن نثبت أنّ المجموعة الجزئيّة من $\mathbb{Z}$ المؤلفة من الأعداد الصحيحة جميعها التي هي مضاعفات لكلا r وs ، هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$؛ ولذلك فهي زمرة دوريّة، وبالمثل، مجموعة المضاعفات المشتركة كلها لـِ n عدد صحيح موجب $r_1, r_2, \ldots, r_n$ هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$؛ ولذلك هي دوريّة.

8.11 تعريف لتكن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ أعدادًا صحيحة، **المضاعف المشترك الأصغر** (***least common multiple***) لها (ويختصر *lcm*) هو المولّد الموجب للزمرة الدوريّة للمضاعفات المشتركة جميعها لـِ r_i، أي، الزمرة الدوريّة للأعداد الصحيحة جميعها القابلة للقسمة على r_i لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

من التعريف 8.11 وعملنا على الزمر الدورية، نرى أنّ lcm لـِ $r_1, r_2, ..., r_n$ هو أصغر عدد صحيح موجب يشكل مضاعفًا لكل r_i لـِ $i = 1,2, \ldots, n$، ومن هنا جاء الاسم: مضاعف مشترك أصغر.

9.11 مبرهنة ليكن $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} G_i$، فإذا كانت رتبة a_i في G_i منتهية r_i، فإنّ رتبة $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ في $\prod_{i=1}^{n} G_i$ تساوي المضاعف المشترك الأصغر لكل ألـ r_i.

البرهان ينتج هذا بإعادة المناقشة المستخدمة في إثبات المبرهنة 5.11، ولكي تعطي قوة لـِ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ العنصر $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$، فيجب أن تكون القوة في الوقت نفسه مضاعفًا لـِ r_1 لكي تؤدي هذه القوة للمركّبة الأولى a_1 إلى e_1، ومضاعفًا لـِ r_2 لكي تؤدي هذه القوة للمركبة الثانية a_2 إلى e_2، وهكذا. ♦

10.11 مثال أوجد رتبة $(8,4,10)$ في الزمرة $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$.

الحل لأنّ gcd لـِ 8 و 12 هو 4، فنرى أنّ رتبة 8 هي $\frac{12}{4} = 3$ في $\mathbb{Z}_{12}$.(انظر المبرهنة 14.6). وبصورة مشابهة، نجد أنّ رتبة 4 هي 15 في $\mathbb{Z}_{60}$ ورتبة 10 هي 12 في $\mathbb{Z}_{24}$. lcm لـِ 3، 15، و12 هو $3.5.4 = 60$؛ ولهذا، (8، 4، 10) هي من الرتبة 60 في الزمرة $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$. ▲

11.11 مثال الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ مولّدة بالعناصر (0،1) و(0 ،1)، وبوجه أعمّ، الضرب المباشر لـِ n زمرة دوريّة، كل منها $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{Z}_m$ لعدد صحيح موجب m، مولَّدٌ بألـ n متعدد من الرتبة n

$$(1, 0, 0, \cdots, 0), \quad (0, 1, 0, \cdots, 0), \quad (0, 0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad (0, 0, 0, \cdots, 1).$$

مثل هذا الضرب المباشر يمكن أن يولّد بعناصر أقل، فمثلًا: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{35}$ مولّد بالعنصر المنفرد $(1,1,1)$. ▲

لاحظ أنه إذا كان $\prod_{i=1}^{n} G_i$ هو الضرب المباشر للزمر G_i، فإنّ المجموعة الجزئيّة

$$\overline{G_i} = \{(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \mid a_i \in G_i\}$$

– أي، مجموعة المتعددات كلها من الرتبة n مع العناصر المحايدة في المواقع جميعها ما عدا الموقع ذي الترتيب i – هي زمرة جزئيّة من $\prod_{i=1}^{n} G_i$، ومن الواضح كذلك أنّ هذه الزمرة الجزئيّة $\overline{G_i}$ تماثل بصورة طبيعية G_i؛ فقط أعِدْ تسمية $(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ بـِ a_i

فانعكست الزمرة G_i من المركّبة ذات الترتيب i في عناصر $\overline{G}_i$، وأخذت e_j مجراها في المركّبات الأخرى، سنفترض أنّ $\prod_{i=1}^{n} G_i$ هو الضرب الداخلي لهذه الزمر الجزئيّة $\overline{G}_i$، ويسمّى الضرب المباشر المعطى بالمبرهنة 2.11 الضرب المباشر الخارجي للزمر G_i، فعند استخدام التعبيرين داخلي وخارجي مع الضرب المباشر للزمر، فإنهما يعكسان فقط ما إذا كنّا نعُدّ الزمر المركّبات بوصفها زمرًا جزئيّة من زمرة الضرب أم لا (على الترتيب)، وسوف نحذف الكلمتين خارجي وداخلي عادةً، وسنكتفي بالقول ضرب مباشر، وسيكون التعبير الذي نعنيه واضحًا من السياق.

■ **نبذة تاريخية**

أظهر كارل جاوس (*Carl Gauss*) في مُؤلَّفه (*Disquisitions Arithmetica*)، بوضوح نتائج متنوعة فيما يعرف اليوم نظرية الزمر الإبداليّة في سياق نظرية الأعداد، ولم يقتصر على التعامل بصورة موسّعة مع صفوف التكافؤ لصيغ تربيعية، بل عدّ أيضًا صفوف البواقي قياس عدد صحيح معطًى، فعلى الرغم من أنه لاحظ أنّ النتائج في هذين الموضوعين كانت متشابهة، إلّا أنه لم يحاول تطوير نظرية مجرّدة للزمر الإبداليّة.

وفي العقد 1840–1849، لاحظ إرنست كُمر (*Ernst Kummer*) في تعامله مع الأعداد المركبة المثالية أنّ نتائجه كانت مشابهة من نواحٍ عدّة لنتائج جاوس. (انظر النبذة التاريخية في الفصل 26.)، لكن تلميذ كُمر، ليوبولد كرونكر (*Leopold Kronecker*) (انظر النبذة التاريخية في الفصل 29)، هو الذي أدرك أخيرًا أنه يمكن تطوير نظرية مجرّدة من خلال التشابهات، إضافة إلى أنه كتب عام 1870م: "هذه المبادئ [من عمل جاوس وكُمر] تشكّل جزءًا من حقل من الأفكار الأكثر عمومًا وتجريدًا؛ لذلك، فمن المناسب تحرير تطويرهما من القيود غير المهمة جميعها، حتى يُجنِّب المرء نفسه الحاجة إلى إعادة المناقشة نفسها في حالات مختلفة، وتظهر هذه الفائدة في التطوير نفسه، ويكتسب التقديم بساطة إذا ما أُعطي بالنمط المقبول الأكثر عمومًا؛ لأن المعالم الأكثر أهمية تبرز بوضوح". ثمّ تابع كرونكر لتطوير المبادئ الأساسية لنظرية الزمر الإبداليّة المنتهية، وكان قادرًا على صياغة وبرهنة صيغة من المبرهنة 12.11 اقتصرت على الزمر المنتهية.

تركيب الزمر الإبدالية منتهية التولُّد

بعض مبرهنات الجبر المجرد سهلة للفهم والاستخدام، على الرغم من أنّ برهانها قد يكون تقنيًّا ومُستغرقًا وقتًا في تقديمه، وهذا فصلٌ في الكتاب نشرح فيه معنى وأهمية مبرهنة مع حذف الإثبات، إنّ مغزى أيّ مبرهنة نحذف إثباتها مُستحسن من وجهة نظرنا، ونشعر أنه يتعيّن أن نتقبّله؛ لأنه سوف يكون من المستحيل علينا أن نستقبل بعض هذه الحقائق المُبْهِرة في مقرر دراسي لفصل واحد، إذا ما كنا مصرّين على الخوض في إثباتات كاملة للمبرهنات جميعها، حيث تعطينا المبرهنة التي نصوغها الآن معلومات تركيبية كاملة عن جميع الزمر الإبداليّة الصغيرة صِغرًا كافيًا، وعلى وجه الخصوص عن الزمر الإبداليّة المنتهية كلها.

12.11 مبرهنة **المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (*Fundamental Theorem of Finitely Generated Abelian Groups*)** كل زمرة إبداليّة منتهية التولّد G تماثل ضربًا مباشرًا لزمرٍ دوريّةٍ بالصيغة:

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z},$$

حيث إنّ الـ p_i أعداد أوّليّة، ليست بالضرورة مختلفة، والـ r_i أعداد صحيحة موجبة، والضرب المباشر وحيد ما عدا لإعادة ترتيب ممكنة للعوامل؛ أي إنّ العدد (**عدد بيتي (Betti number)** لـ G) للعوامل $\mathbb{Z}$ وحيد، وقوى الأعداد الأوّليّة $\left(p_i\right)^{r_i}$ وحيدة.

البرهان الإثبات محذوف هنا. ♦

13.11 مثال أوجد الزمر الإبداليّة جميعها – وفق التماثل– من الرتبة 360. تَدلّ العبارة وفق التماثل على أنّ أيّ زمرة إبداليّة رتبتها 360، يجب أن تكون متطابقة تركيبيًّا (تماثل) مع واحدة من الزمر المعروضة ذات الرتبة 360.

الحل سنستخدم المبرهنة 12.11. لأنّه على زمرنا أن تكون من الرتبة 360، فلن تظهر العوامل $\mathbb{Z}$ في الضرب المباشر المبيّن في نصّ المبرهنة.

نعبّر أولًا عن 360 بوصفه حاصل ضرب قوى أعداد أوّليّة $2^3 3^2 5$، ثمّ نستخدم المبرهنة 12.11، فنحصل – بوصفها حالات ممكنة – على:

1. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
2. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
3. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
4. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
5. $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
6. $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$

لذلك، فهناك ست زمر إبداليّة مختلفة (وفق التماثل) من الرتبة 360. ▲

تطبيقات

نختم هذا الفصل بعيّنة من مبرهنات كثيرة، يمكننا إثباتها الآن بالنظر إلى الزمر الإبداليّة.

14.11 تعريف الزمرة G **قابلة للتفريق** (***decomposable***) إذا كانت تماثل ضربًا مباشرًا لزمرتين جزئيّتين فعليتين غير تافهتين، وبخلاف ذلك، تكون G **غير قابلة للتفريق** (***indecomposable***). ■

15.11 مبرهنة الزمر الإبداليّة المنتهية غير القابلة للتفريق هي بالضبط الزمر الدوريّة التي رتبتها قوة لعدد أوّلي.

البرهان لتكن G زمرًا إبداليّة منتهية غير قابلة للتفريق، عندئذ بحسب المبرهنة 12.11، G تماثل ضربًا مباشرًا لزمر دورية رتبها قوى لأعداد أوّليّة، ولأنّ G غير قابلة للتفريق، فيجب أن يتكوّن هذا الضرب المباشر من زمرة دوريّة واحدة فقط رتبتها قوة لعدد أوّلي.

في المقابل، ليكن p عددًا أوليًّا، عندئذٍ تكون $\mathbb{Z}_{p^r}$ غير قابلة للتفريق؛ لأنه لو كانت $\mathbb{Z}_{p^r}$ تماثل $\mathbb{Z}_{p^i} \times \mathbb{Z}_{p^j}$، حيث $i + j = r$، فإنّ كل عنصر سيكون له رتبة على الأكثر $p^{max(i,j)} < p^r$. ♦

16.11 مبرهنة إذا كانت m تقسم رتبة الزمرة الإبداليّة المنتهية G، فإنّ G لها زمرة جزئيّة رتبتها m.

البرهان باستخدام المبرهنة 12.11، يمكننا أن نفكّر في G على أنها:

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}}$$

في حين أنه ليس بالضرورة أن تكون الأعداد الأوّليّة p_i جميعها مختلفة، ولأنّ $(p_1)^{r_1}(p_2)^{r_2}\cdots(p_n)^{r_n}$ هي رتبة G، فإنّ m يجب أن تكون على الصورة $(p_1)^{s_1}(p_2)^{s_2}\cdots(p_n)^{s_n}$، حيث $0 \le s_i \le r_i$. بحسب المبرهنة 14.6، يولّد $(p_i)^{r_i - s_i}$ زمرة جزئيّة دورية من $\mathbb{Z}_{(p_i)^{r_i}}$ رتبتها تساوي ناتج قسمة $(p_i)^{r_i}$ على الـ gcd لـ $(p_i)^{r_i}$ و $(p_i)^{r_i - s_i}$، لكن الـ gcd لـ $(p_i)^{r_i}$ و $(p_i)^{r_i - s_i}$ هو $(p_i)^{r_i - s_i}$؛ لذلك، يولّد $(p_i)^{r_i - s_i}$ زمرة جزئيّة دوريّة من $\mathbb{Z}_{(p_i)^{r_i}}$ رتبتها $\left[(p_i)^{r_i}\right] / \left[(p_i)^{r_i - s_i}\right] = (p_i)^{s_i}$.

بتذكُّر أنّ $\langle a \rangle$ ترمز إلى الزمرة الجزئية الدوريّة المولّدة بـ a، نرى أنّ:

$$\left\langle (p_1)^{r_1 - s_1} \right\rangle \times \left\langle (p_2)^{r_2 - s_2} \right\rangle \times \ldots \times \left\langle (p_n)^{r_n - s_n} \right\rangle$$

هي الزمرة الجزئيّة المطلوبة ذات الرتبة m. ♦

17.11 مبرهنة إذا كان m عددًا صحيحًا خاليًا من المربعات، أي إنّ m لا يقبل القسمة على مربع أيّ عدد أوّلي، فإنّ أيّ زمرة إبداليّة رتبتها m هي دوريّة.

البرهان لتكن G زمرة إبداليّة من رتبة m خالية من المربعات، عندئذٍ وبحسب المبرهنة 12.11، G تماثل

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}}$$

حيث $m = (p_1)^{r_1} (p_2)^{r_2} \cdots (p_n)^{r_n}$، ولأنّ m خالية من المربعات، فيجب أن يكون لدينا كل $r_i = 1$ وكل p_i أعداد أوّليّة مختلفة، ثم تبين النتيجة 6.11 أنّ G تماثل $\mathbb{Z}p_1 p_2 \cdots p_n$؛ ولذلك، G دوريّة. ◆

تمارين 11

حسابات

1. اسرد عناصر $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$، ثمّ أوجد رتبة كل من هذه العناصر. هل هذه الزمرة دوريّة؟

2. أعد التمرين 1 للزمرة $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

في التمارين من 3 إلى 7 أوجد رتبة العنصر المعطى من الضرب المباشر.

3. $(2,6)$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ **4.** $(2,3)$ من $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ **5.** $(8, 10)$ من $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$

6. $(3, 10, 9)$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ 7. $(3, 6, 12, 16)$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{24}$

8. ما أكبر رتبة ضمن رتب الزمر الجزئيّة الدوريّة جميعها من $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$؟ من $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$؟

9. أوجد الزمر الجزئيّة الفعلية غير التافهة جميعها من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

10. أوجد الزمر الجزئيّة الفعلية غير التافهة جميعها من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

11. أوجد الزمر الجزئيّة جميعها من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ذات الرتبة 4.

12. أوجد الزمر الجزئيّة جميعها من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$، التي تماثل زمرة كلاين الرباعية.

13. بغض النظر عن رتب العوامل، اكتب ضروبًا مباشرة لزمرتين أو أكثر بالصورة $\mathbb{Z}_n$ ، بحيث يماثل الضرب الناتج $\mathbb{Z}_{60}$ بأكبر عدد ممكن من الطرق.

14. أكمل الفراغ.

أ. الزمرة الجزئيّة الدوريّة من $\mathbb{Z}_{24}$ المولَّدة بـ 18 لها الرتبة ______.

ب. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ هي من الرتبة _______.

جـ. العنصر $(4, 2)$ من $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8$ له الرتبة___.

د. زمرة كلاين الرباعية تماثل $\mathbb{Z}$ _____ $\times \mathbb{Z}$ _____.

هـ. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$ فيها _______ عنصرًا من رتبة منتهية.

15. أوجد الرتبة الممكنة العظمى لعنصر ما من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

16. هل الزمرتان $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ و $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ متماثلتان؟ لماذا أو لماذا لا؟

17. أوجد الرتبة الممكنة العظمى لعنصر ما من $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{24}$.

18. هل الزمرتان $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{24}$ و $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{40}$ متماثلتان؟ لماذا أو لماذا لا؟

19. أوجد الرتبة الممكنة العظمى لعنصر ما من $\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_{18}\times\mathbb{Z}_{15}$.

20. هل الزمرتان $\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_{18}\times \mathbb{Z}_{15}$ و $\mathbb{Z}_3\times \mathbb{Z}_{36}\times \mathbb{Z}_{10}$ متماثلتان؟ لماذا أو لماذا لا؟

في التمارين من 21 إلى 25، واصل إيجاد الزمر الإبداليّة – وفق التماثل – من الرتبة المعطاة، كما في المثال 13.11.

21. الرتبة 8 **22.** الرتبة 16 **23.** الرتبة 32

24. الرتبة 720 **25.** الرتبة 1089

26. كم زمرة إبداليّة (وفق التماثل) من الرتبة 24؟ ومن الرتبة 25؟ ومن الرتبة (24)(25)؟

27. باتباع الفكرة المقترحة في التمرين 26، ليكن m و n عددين صحيحين موجبين أوّليّين نسبيًّا. أثبت أنه إذا وجد (وفق التماثل) r زمرة إبداليّة من الرتبة m وs من الرتبة n، فإنه يوجد (وفق التماثل) rs زمرة إبداليّة من الرتبة mn.

28. استخدم التمرين 27 لتحديد عدد الزمر الإبداليّة (وفق التماثل) من الرتبة $(10)^5$.

29. أ. لتكن p عددًا أوّليًّا. أكمل الصف الثاني من الجدول لإعطاء عدد الزمر الإبداليّة من الرتبة p^n، وفق التماثل.

n	2	3	4	5	6	7	8
عدد الزمر							

ب. لتكن p، وq، وr أعدادًا أوّليّة مختلفة، استخدم الجدول الذي أنشأته في إيجاد عدد الزمر الإبداليّة – وفق التماثل – من الرتبة المعطاة.

i. $p^3q^4r^7$ **ii.** $(qr)^7$ **iii.** $q^5r^4q^3$

30. عبّر تخطيطيًّا عن رسم كايلي موجهٍ لـ $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ للمجموعة المولِّدة $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

31. افترض رسم كايلي موجه بنوعين من الحوافّ المتجهة: واحد متصل مع سهم وواحد مقطع من غير سهم، ومؤلفة من مضلعين منتظمين لهما n ضلعًا، لـ $n \geq 3$، مع أضلاع متجهة متصلة، أحدهما داخل الآخر، مع حوافّ متجهة مقطعة تصل رؤوس المضلع الخارجي ذي ألـ n ضلعًا مع الداخلي. يظهر الشكل 9.7 (ب) مثل رسم كايلي هذا مع n=3، ويظهر الشكل 7.11 (ب) واحدًا مع $n = 4$، ويمكن أن يكون للأسهم على المضلع الخارجي ذي ألـ n ضلعًا الاتجاه نفسه (مع عقارب الساعة أو عكسها) لتلك التي على المضلع الداخلي ذي ألـ n ضلعًا، أو أن يكون لها عكس الاتجاه، ولتكن G زمرة مع مثل رسم كايلي المتجه هذا.

أ. تحت أيّ ظروف ستكون G إبداليّة؟

ب. إذا كانت G إبداليّة، ما الزمرة المألوفة التي تماثلها؟

جـ. إذا كانت G إبداليّة، تحت أيّ ظروف تكون دوريّة؟

د. إذا كانت G غير إبداليّة، ما الزمرة التي تماثلها مما ناقشنا من الزمر؟

مفاهيم

32. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_______ أ. إذا كانت G_1 و G_2 أيّ زمرتين، فإنّ $G_1\times G_2$ دائمًا تماثل $G_2\times G_1$.

_______ ب. الحساب في الضرب المباشر الخارجي للزمر سهل إذا عرفت كيفية الحساب في كل مركّبة.

_______ جـ. الزمر ذات الرتب المنتهية يجب أن تستخدم في تشكيل ضرب مباشر خارجي.

______ د. الزمرة ذات الرتبة الأوّليّة لا يمكن أن تكون ضربًا مباشرًا داخليًّا لزمرتين جزئيّتين فعليتين غير تافهتين.

______ هـ. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ تماثل $\mathbb{Z}_8$.

______ و. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ تماثل S_8.

______ ز. $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_8$ تماثل S_4.

______ ح. كل عنصر من $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8$ له الرتبة 8.

______ ط. رتبة $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{15}$ هي 60.

______ ي. $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ فيها mn عنصرًا سواء كان m و n أوّليّين نسبيًّا أم لا.

33. أعطِ مثالاً يوضّح أنه ليس كل زمرة إبداليّة غير تافهة هي ضرب مباشر داخلي لزمرتين جزئيّتين فعليتين غير تافِهتين.

34. أ. ما عدد الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6$ التي تماثل $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6$؟

ب. ما عدد الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ التي تماثل $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$؟

35. أعطِ مثالًا على زمرة غير تافهة ليست من رتبة أوّليّة، وليست ضربًا مباشرًا داخليًّا لزمرتين جزئيّتين غير تافهتين.

36. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. كل زمرة إبداليّة رتبتها أوّليّة دوريّة.

______ ب. كل زمرة إبداليّة رتبتها قوة لعدد أوّليّ دوريّة.

______ جـ. $\mathbb{Z}_8$ مولّدة بـ $\{4, 6\}$.

______ د. $\mathbb{Z}_8$ مولّدة بـ $\{4, 5, 6\}$.

______ هـ. تصنّف الزمر الإبداليّة المنتهية جميعها وفق التماثل من خلال المبرهنة 12.11.

______ و. أيّ زمرتين إبداليّتين منتهيتي التولّد لهما عدد بيتي نفسه، هما متماثلتان.

______ ز. كل زمرة إبداليّة رتبتها تقبل القسمة على 5 تحوي زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة 5.

______ ح. كل زمرة إبداليّة رتبتها تقبل القسمة على 4 تحوي زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة 4.

______ ط. كل زمرة إبداليّة رتبتها تقبل القسمة على 6 تحوي زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة 6.

______ ي. عدد بيتي لأيّ زمرة إبداليّة منتهية هو 0.

37. ليكن p و q عددين أوّليّين مختلفين. كيف يقارن عدد (وفق التماثل) الزمر الإبداليّة من الرتبة p^r مع عدد (وفق التماثل) الزمر الإبداليّة من الرتبة q^r؟

38. لتكن G زمرة إبداليّة رتبتها 72.

أ. هل يمكنك أن تحدّد عدد الزمر الجزئيّة من G من الرتبة 8؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

ب. هل يمكنك أن تحدّد عدد الزمر الجزئيّة من G من الرتبة 4؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

39. لتكن G زمرة إبداليّة. أثبت أنّ العناصر ذات الرتبة المنتهية من G تشكل زمرة جزئيّة. تُسمَّى هذه الزمرة الجزئيّة **زمرة الالتواء الجزئيّة** (***torsion subgroup***) من G.

تتعامل التمارين من 40 إلى 43 مع مفهوم زمرة الالتواء الجزئيّة المعرّف توًّا.

40. أوجد رتبة زمرة الالتواء الجزئيّة من $\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_3$ ؛ من $\mathbb{Z}_{12}\times \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$.

41. أوجد زمرة الالتواء الجزئيّة من زمرة الضرب $\mathbb{R}^*$ للأعداد الحقيقية غير الصفريّة.

42. أوجد زمرة الالتواء الجزئيّة T من زمرة الضرب $\mathbb{C}^*$ للأعداد المركبة غير الصفريّة.

43. الزمرة الإبداليّة **عديمة الالتواء (torsion free)** إذا كان e هو العنصر الوحيد من رتبة منتهية. استخدم المبرهنة 12.11 في إثبات أنّ أيّ زمرة إبداليّة منتهية التولّد، هي الضرب المباشر الداخلي لزمرة الالتواء الجزئيّة لها ولزمرةٍ جزئيّة عديمة الالتواء. (لاحظ أنّ $\{e\}$ يمكن أن تكون زمرة الالتواء الجزئيّة، وهي كذلك عديمة الالتواء).

44. الجزء من تفريق G في المبرهنة 12.11 المقابل للزمر الجزئيّة التي رتبها قوًى لأعداد أوّليّة يمكن أن يُكتب كذلك بالصيغة $\mathbb{Z}_{m_1}\times\mathbb{Z}_{m_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{m_r}$ ، حيث m_i تقسم m_{i+1} لِـ $i = 1, 2, \cdots, r-1$. يمكن إثبات أنّ الأعداد m_i وحيدة، وهي **معاملات الالتواء (torsion coefficients)** لِـ G.

أ. أوجد معاملات الالتواء لِـ $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9$.

ب. أوجد معاملات الالتواء لِـ $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{20}$.

جـ. صِف خوارزميةً لإيجاد معاملات الالتواء للضرب المباشر لزمر دوريّة.

براهين مختصرة

45. أعطِ اختصارًا من جملتين لإثبات المبرهنة 5.11.

براهين

46. برهن على أنّ الضرب المباشر لزمر إبداليّة هو إبداليّ.

47. لتكن G زمرة إبداليّة، ولتكن H المجموعة الجزئية من G المؤلفة من المحايد e إضافةً إلى عناصر G جميعها ذات الرتبة 2. أثبت أنّ H زمرة جزئيّة من G.

48. باتباع فكرة التمرين 47، حدّد ما إذا كانت H دائمًا زمرة جزئيّة لكل زمرة إبداليّة G، إذا تألفت H من المحايد e إضافة إلى عناصر G جميعها ذات الرتبة 3؛ ذات الرتبة 4. لأيّ عدد صحيح موجب n ستكون H دائمًا زمرة جزئيّة لكل زمرة إبداليّة G، إذا تألفت H من المحايد e إضافة إلى عناصر G جميعها ذات الرتبة n؟ قارن بالتمرين 48 من الفصل 5.

49. أوجد مثالًا مناقضًا للتمرين 47 مع حذف الفرض بأنّ G إبداليّة.

لتكن H وK زمرًا جزئيّة من زمرة G. يطلب منك التمرينان 50 و 51 أن تؤسس معيارًا ضروريًّا وكافيًا لِـ G؛ كي تظهر على صورة ضرب مباشر داخلي لِـ H و K.

50. لتكن H و K زمرتين، ولتكن $G = H \times K$. تذكر أنّ كلا H و K تظهر بوصفها زمرة جزئيّة من G بصورة طبيعية. أثبت

أنّ هاتين الزمرتين H (في الواقع $H \times \{e\}$) و K (في الواقع $\{e\} \times K$) لهما الخصائص الآتية:

أ. كل عنصر من G هو بالصيغة hk لعنصرين ما $h \in H$ و $k \in K$.

ب. $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$.   جـ. $H \cap K = \{e\}$.

51. لتكن H و K زمرتين جزئيّتين من زمرة G تحقّقان الخصائص الثلاث المسرودة في التمرين السابق. أثبت أنه لكل $g \in G$، التعبير $g = hk$ لـ $h \in H$ و $k \in K$ وحيد، ثمّ ليكن كل $g \in G$ قد أُعيدت تسميته بـ (h,k)، فأثبت أنّ G – بهذه التسمية – تصبح مطابقةً تركيبيًّا (مماثلة) لـِ $H \times K$.

52 أثبت أنّ الزمرة الإبداليّة المنتهية ليست دورية، إذا وفقط إذا احتوت زمرةً جزئية تماثل $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ لعدد أوّليّ ما p.

53. برهن على أنه إذا كانت رتبة الزمرة الإبداليّة المنتهية قوةً لعددٍ أوّليّ p، فإنّ رتبة أيّ عنصر من الزمرة هي قوة لـِ p. هل يمكن إسقاط فرض الإبدال؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

54. لتكن G، H، K زمرًا إبداليّة منتهية التولّد. أثبت أنه إذا كانت $G \times K$ تماثل $H \times K$، فإنّ $G \simeq H$.

الفصل 12 تقايسات المستوى Plane Isometries [1]

افترض المستوى الإقليدي $\mathbb{R}^2$. **تقايس (isometry of)** $\mathbb{R}^2$ هو تبديل $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ يحفظ المسافة، بحيث إنّ المسافة بين النقطتين P و Q هي المسافة نفسها بين النقطتين $\phi(P)$ و $\phi(Q)$ للنقاط كلها P و Q من $\mathbb{R}^2$ ، وإذا كانت ψ أيضًا تقايسًا لـ $\mathbb{R}^2$ ، فإنّ المسافة بين $\psi(\phi(P))$ و $\psi(\phi(Q))$ يجب أن تكون المسافة نفسها بين $\phi(P)$ و $\phi(Q)$، التي هي بدورها المسافة بين P و Q، وهذا يثبت أنّ تركيب تقايسين هو تقايس كذلك، ولأنّ الدالّة المحايدة هي تقايس ومعكوس التقايس تقايس، فنرى أنّ تقايسات $\mathbb{R}^2$ تشكل زمرة جزئية من زمرة التبديلات جميعها لـ $\mathbb{R}^2$.

بأخذ أيّ مجموعة جزئيّة S من $\mathbb{R}^2$ ، تقايسات $\mathbb{R}^2$ التي تحمل S بصورة غامرة إلى نفسها تشكل زمرة جزئيّة من زمرة التقايسات، وهذه الزمرة الجزئيّة هي **زمرة تناظرات S في $\mathbb{R}^2$ (group of symmetries of S in $\mathbb{R}^2$)**. أعطينا في الفصل 8 جداول لزمرة تناظرات مثلث متساوي الأضلاع ولزمرة تناظرات مربع في $\mathbb{R}^2$.

كل ما عرفناه في الفقرتين السابقتين يمكن على حد سواء أن يعمل للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ذي الـ n بعدًا، لكننا هنا سوف نشغل أنفسنا في المقام الأول بتقايسات المستوى.

من الممكن البرهنة على أنّ أيّ تقايس للمستوى هو بالضبط واحد من أربعة أنماط (انظر Artin [5]). سوف نسرد الأنماط ونعطي – لكل نمط – شكلًا مُسمًّى يمكن حمله إلى نفسه بتقايس من ذلك النمط، في كلٍّ من الأشكال 1.12، 3.12، 3.12، و4.12، افترض أنّ الخط المبين ذا النتوءات يمتد بصورة لا نهائية إلى اليسار وإلى اليمين. سنعطي كذلك مثالًا على كل نمط بدلالة الإحداثيّات.

انسحاب τ: اسحب كل نقطة المسافة نفسها في الاتجاه نفسه. انظر الشكل 1.12.
(مثال: $\tau(x, y) = (x, y) + (2,-3) = (x + 2, y - 3)$).

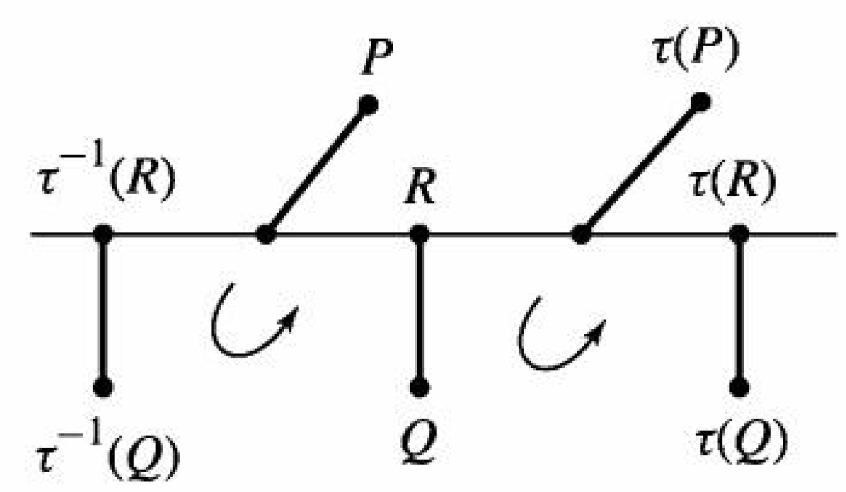
دوران ρ: دوِّر المستوى حول نقطة P بزاوية θ. انظر الشكل 2.12. (مثال: $\rho(x, y) = (-y, x)$ هو دوران بـ $90°$ عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل $(0, 0)$).

انعكاس μ: أرسل كل نقطة إلى صورتها في المرآة (μ من mirror (مرآة)) الممتدة على طول الخط L، الذي تبقى نقاطه مثبتة بـ μ. انظر الشكل 3.12. الخط L هو محور الانعكاس. (مثال: $\mu(x, y) = (y, x)$ هو انعكاس في الخط $y=x$).

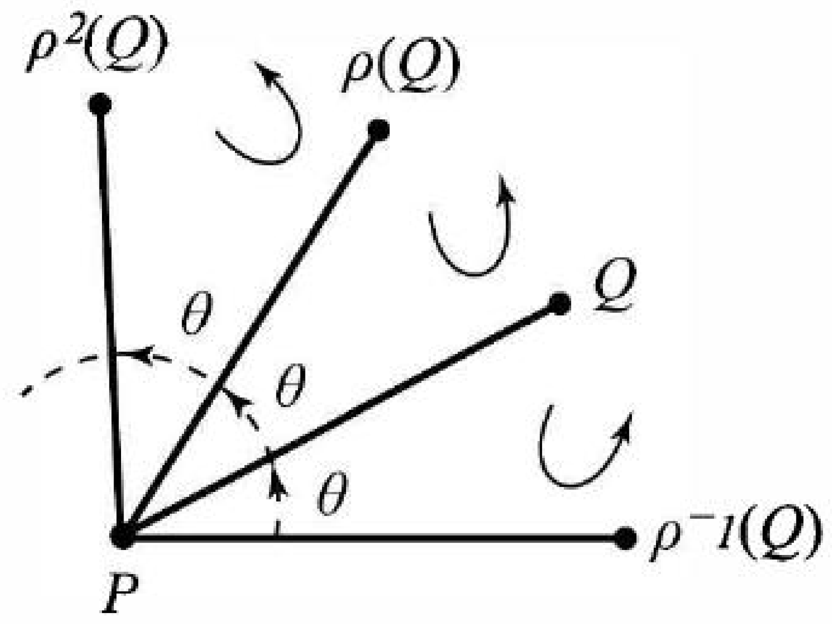
انعكاس انحداريّ γ: حاصل ضرب انسحاب وانعكاس في خطٍّ يرسله الانسحاب إلى نفسه. انظر الشكل 4.12. (مثال: $\gamma(x, y) = (x + 4, -y)$ هو انعكاس انحداري في المحور x).

1- هذا الفصل لن يستخدم فيما تبقى من الكتاب.

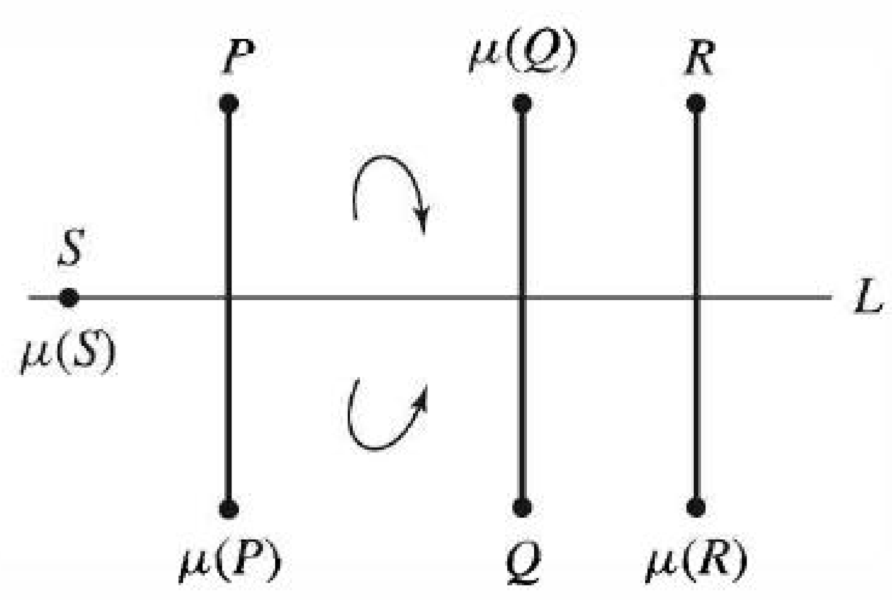
لاحظ السهم المنحني الصغير الذي حُمِلَ إلى سهم منحنٍ آخر في كلٍّ من الشكلين 1.12 و4.12. للانسحاب والدوران، الاتجاهات عكس عقارب السّاعة للأسهم المنحنية تبقى نفسها، لكن للانعكاس والانعكاس الانحداري، يرسل السهم الذي بعكس عقارب الساعة إلى سهم مع عقارب الساعة، سنقول: إنّ الانسحابات والدورانات تحفظ الاتجاه، بينما الانعكاس والانعكاس الانحداري يعكس الاتجاه. لن نصنف التقايس المحايد على أنه واحد بعينه من الأنماط الأربعة المسرودة؛ إذ يمكن أن نعدّه انسحابًا بالمتجه الصفري أو دورانًا حول أيّ نقطة بزاوية $0°$ على حدّ سواء، سنعدّ الانعكاس الانحداري دائمًا حاصل ضرب انعكاس بانسحابٍ مختلفٍ عن التقايس المحايد.



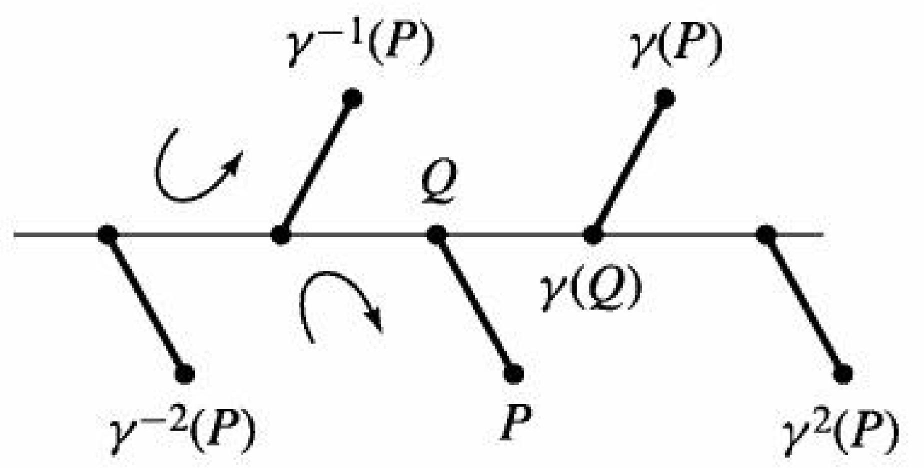
الشكل 1.12 انسحاب τ



الشكل 2.12 دوران ρ



الشكل 3.12 انعكاس μ



الشكل 4.12 انعكاس انحداريّ γ

تصف المبرهنة الآتية التراكيب الممكنة للزمر الجزئيّة المنتهية من زمرة التقايسات الكاملة.

5.12 مبرهنة كل زمرة منتهية G لتقايسات المستوى تماثل إمّا $\mathbb{Z}_n$ أو الزمرة الزوجيّة D_n لعدد صحيح موجب n.

مخطط البرهان سنثبت أولًا أنّ هناك نقطة P في المستوى تترك ثابتة بكل تقايس من G، ويمكن إنجاز ذلك بالطريقة الآتية، باستخدام الإحداثيات في المستوى، افترض أنّ $G = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m\}$، وافترض أنّ

$$(x_i , y_i) = \phi_i (0, 0)$$

عندئذٍ تكون النقطة

$$P = \left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}, \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m}\right)$$

هي المركز المتوسط (*centroid*) للمجموعة $S = \{(x_i , y_i) \mid i = 1, 2,\cdots,m\}$. تُبدِّل التقايسات من G النقاط من S فيما بينها؛ لأنه إذا كان $\phi_i\phi_j = \phi_k$، فإنّ $\varphi_i(x_j, y_j) = \varphi_i[\varphi_j(0, 0)] = \varphi_k(0, 0) = (x_k, y_k)$. يمكن إثبات أنّ المركز المتوسط لمجموعةٍ من النقاط يتحدّد بصورة وحيدة بمسافاته عن النقاط، ولأنّ كل تقايس من G يبدل فقط المجموعة S، فيجب أن يَتْرك المركز المتوسط $(\overline{x}, \overline{y})$ مثبتًا؛ لذلك تتكوّن G من المحايد، دورانات حول P، وانعكاسات في خطٍّ يمرّ بـ P.

تشكل التقايسات حافظة الاتجاه في G زمرة جزئيّة H من G، تكون إمّا جميع G أو من الرتبة $m/2$. يمكن إثبات ذلك بالطريقة نفسها التي أثبتنا بها أنّ التبديلات الزوجية زمرة جزئيّة من S_n تحوي تمامًا نصف عناصر S_n (انظر التمرين 22)، بالطبع تتألف H من المحايد والدورانات في G، وإذا اخترنا دورانًا من G يدوِّر المستوى بأصغر زاوية ممكنة $\theta > 0$، فيمكن إثبات أنها تولد الزمرة الجزئيّة H. (انظر التمرين 23)، هذا يثبت أنه إذا كان $H = G$، فإنّ G دورية من الرتبة m، وعليه، فهي تماثل $\mathbb{Z}_m$. افترض أنّ $H \neq G$، بحيث إنّ G تحوي بعض الانعكاسات. لتكن $H = \{\iota, \rho_1, \cdots, \rho_{n-1}\}$، حيث $n = m/2$.
فإذا كان μ انعكاسًا من G، فإنّ المجموعة المشاركة $H\mu$ تتكوّن من الانعاكاسات كلها من G وعددها n.

افترض الآن المضلع المنتظم ذا n ضلعًا في المستوى الذي مركزه P، ويقع أحد رؤوسه على الخط المارّ بـ P المتروك مثبتًا بـ μ. تُدوِّر عناصر H هذا المضلع ذا n ضلعًا عبر المواقع جميعها، وتعكس عناصر $H\mu$ أوّلاً في محور يمرّ برأس قالبةً المضلع ذا n ضلعًا، ثمّ تُدوِّر عبر المواقع جميعها؛ لذلك، فتأثير G على هذا المضلع ذي n ضلعًا هو تأثير D_n؛ ولذلك، G تماثل D_n.

تعطي المبرهنة السابقة قصة زمر تقايسات المستوى المنتهية كاملةً. ننتقل الآن إلى بعض الزمر غير المنتهية لتقايسات المستوى، التي تنشأ بصورة طبيعية في الزخرفة والفنّ، ومن بينها زمر النسيج المتقطّع (*discrete frieze groups*)، حيث يتألف النسيج المتقطع من نقشٍ بعرض وارتفاع منتهيين، ويُكرر بصورة لا نهائية في كلا الاتجاهين على طول خطه الأساسيّ، ليشكل شريطًا بطول غير منتهٍ لكن بارتفاع منتهٍ، فكّر فيه على أنه شريط فاصل مزخرف يمتدّ حول الغرفة بجوار السقف على ورق جدرانٍ، سنَعُدّ تلك التقايسات التي تحمل كل نقش أساسي بصورة غامرة إلى نفسه أو إلى نسخة أخرى من النقش في النسيج، حيث تُسمّى مجموعة مثل هذه التقايسات كلها "زمرة النسيج" (**frieze group**). زمر النسيج المتقطع جميعها غير منتهية ولها زمرة جزئيّة تماثل $\mathbb{Z}$، وتولَّد بالانسحاب الذي يجر النسيج طوليًّا حتى ينطبق النقش الأساسيّ على موقع النقش المجاور له مباشرة في ذلك الاتجاه، وبوصفه مثالًا بسيطًا على نسيج متقطع، افترض إشارات التكامل الموضوعة على مسافات متساوية عن بعضها والمستمرة بصورة لا نهائيّة إلى اليسار واليمين، المشار إليها تخطيطيًّا كما يأتي:

$$\ldots\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\ldots$$

لنفترض إشارات التكامل متباعدة عن بعضها وحدةً واحدة، فتولَّد زمرة التناظر لهذا النسيج بانسحاب τ يجرّ المستوى وحدة واحدة إلى اليمين، وبدوران ρ بـ $180°$ حول نقطة في مركز إشارة تكامل، إذ ليس هناك انعكاسات أفقية أو عمودية، ولا انعكاسات انحدارية، وزمرة النسيج هذه غير إبداليّة؛ فيمكننا التأكّد من أنّ $\tau\rho = \rho\tau^{-1}$، تولَّد الزمرة الزوجيّة D_n من الدرجة n بعنصرين لا يتبدلان معًا: دوران ρ_1 بزاوية $360/n°$ من الرتبة n وانعكاس μ من الرتبة 2 يحقّق $\rho_1\mu = \mu\rho_1^{-1}$ ؛ لذلك فمن الطبيعي استخدام الرمز D_∞ لزمرة النسيج غير الإبداليّة هذه، والمولّدة بـτ ذات الرتبة غير المنتهية و ρ ذات الرتبة 2.

وكمثال آخر، افترض النسيج المعطى بالسلسلة غير المنتهية من حروف D.

...DDDDDDDDDDD...

تولَّد زمرته بانسحاب τ خطوة واحدة الى اليمين وبانعكاس عموديّ μ في خط أفقي يقطع وسط حروف D كلها، يمكننا التأكد من أنّ مولّدي الزمرة هذين يبدّلان مع بعضهما هذه المرة، أي إنّ $\tau\mu = \mu\tau$؛ ولذلك، فزمرة النسيج هذه إبداليّة وتماثل $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$.

من الممكن إثبات أنه إذا صنّفنا مثل الأنسجة المتقطعة هذه فقط من خلال ما إذا كانت زمرها تحوي أم لا تحوي:

دورانًا

انعكاسًا في محور أفقي

انعكاسًا في محور عمودي

انعكاسًا انحداريًّا غير تافه

فإنه سيكون هناك ما مجموعه سبعة احتمالات، والانعكاس الانحداريّ غير التافه في زمرة تناظرات هو واحدٌ لا يساوي حاصل ضرب انسحاب في تلك الزمرة وانعكاس فيها. إنّ الزمرة لسلسلة حروف D أعلاه تحوي انعكاسًا انحداريًّا في الخط الأفقي المارّ بمراكز حروف D، لكن مركبة الانسحاب لكل انعكاس انحداريّ موجودة أيضًا في الزمرة؛ ولهذا تُعدّ جميعها انعكاسات انحدارية تافهة في تلك الزمرة. زمرة النسيج لـ

. . . D D D D D . . .

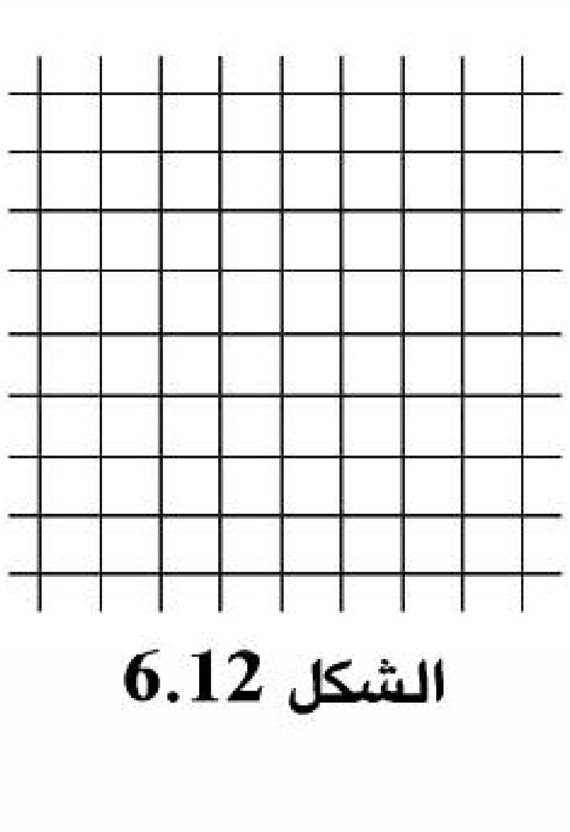
. . . D D D D D . . .

تحوي انعكاسًا انحداريًّا غير تافه، ومركّبة الانسحاب له ليست عنصرًا في الزمرة. تظهر التمارين الحالاتِ السبع الممكنة، وتسألك أن تحدّد – لكل حالة – أيًّا من الأنماط الأربعة للتقايسات المعروضة أعلاه تظهر في زمرة التناظرات، حيث لن نحصل على سبعة تركيباتِ زمرٍ مختلفة، ويمكن إثبات أنّ كلًّا من الزمر التي يُحْصَل عليها تماثل واحدةً من

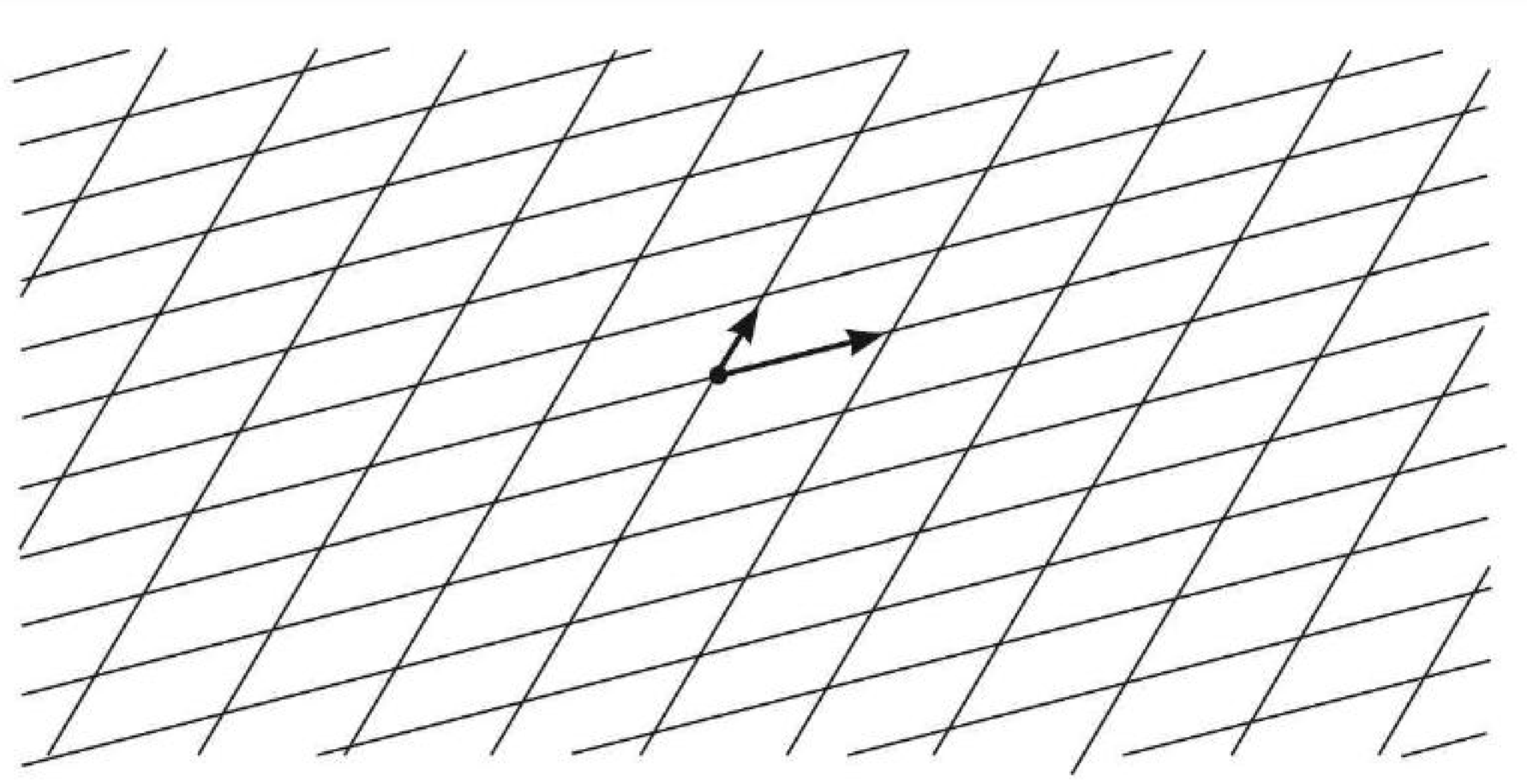
$$D_\infty \times \mathbb{Z}_2 \text{ أو } \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2\,,\ \mathbb{Z}\ ,D_\infty$$

ستكون دراسة التناظرات ممتعة بالقدر نفسه عندما يُكرَّر نقش على شكل مربع، أو متوازي أضلاع، أو معين، أو سداسيّ بانسحابات في اتجاهي متجهين غير متوازيين لملءِ المستوى كليًّا ، مثل النقوش التي تظهر على ورق الجدران، وتسمّى هذه الزمرُ زمر ورق الجدران (*wallpaper groups*) أو الزمر البلوريّة المستوية (*plane crystallographic groups*)، في حين أنّ النسيج لا يمكن حمله إلى نفسه بدوران بزاوية موجبة أقل من 180°، إلا أنه من الممكن أن يكون لبعض هذه النقوش مالئةِ المستوى دورانات بـ 60°، و90°، و120°، و180°، ويُوفِّر الشكل 6.12 توضيحًا، حيث يتألف من مربع، وسنهتم بزمرة تقايسات المستوى التي تحمل هذا المربع بصورة غامرة إلى نفسه أو إلى مربّع آخر، فتُعطى مولِّداتٌ لهذه الزمرة بانسحابين: (واحدٌ بِجَرِّ المربع إلى الجار اللاحق إلى اليمين وواحدٌ إلى اللاحق في الأعلى)، وبتدويرٍ بـ 90° حول مركز المربّع، وبانعكاس في الخط العمودي (أو الأفقي) على امتداد حافة المربع، إذ إنّ انعكاسًا واحدًا هو كل ما يلزم لـ «قلب المستوى»؛ ويمكن استخدام انعكاس قطري أيضًا، حيث يمكن استخدام الانسحابات والدورانات من جديد بعد أن يتم القلب، فضلًا عن أنّ زمرة التقايسات لهذا النقش الدوري في المستوى تحوي بالتأكيد زمرةً جزئيّة تماثل $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ تُولَّد بالانسحابين وحدةً إلى اليمين وإلى الأعلى، وزمرةً جزئيّة تماثل D_4، تُولَّد بتلك التقايسات التي تحمل مربّعًا (يمكن أن يكون أيّ مربع) إلى نفسه.

إذا افترضنا أنّ المستوى مُلِئ بمتوازيات أضلاع، كما في الشكل 7.12، فلن نحصل على أنماط التقايسات جميعها التي حصلنا عليها للشكل 6.12، زمرة التناظر هذه المرة مُوَلَّدةٌ بالانسحابات المشار إليها بالأسهم والدوران بـ 180° حول أيّ رأسٍ لمتوازي أضلاع.



الشكل 6.12



الشكل 7.12

من الممكن إثبات أنّ هناك 17 نمطًا مختلفًا من نقوش ورق الجدران عند تصنيفها بحسب أنماط الدورانات، والانعكاسات، والانعكاسات الانحداريّة غير التافهة التي تتمع بها، ارجع إلى (Gallian [8]) للاطلاع على صور لهذه الاحتمالات ألـ 17 والاطلاع على مخطّط يُسهِّل التعرّف عليها، حيث ستوضح التمارين بعضًا منها. الوضع في الفضاء أكثر تعقيدًا؛ فيمكن إثبات أنّ هناك 230 زمرةً بلوريّةً ثلاثيّةَ الأبعاد. يشتمل التمرين الأخير الذي سنعطيه على دوراناتٍ في الفضاء.

وقد اشتمل عمل الفنان إشَر (M. C. Escher 1898–1973) على نقوشٍ مالِئةٍ للمستوى، حيث تشتمل التمارين على إعادة إنتاج أربعةٍ من أعماله من هذا النمط.

تمارين 12

1. يبين هذا التمرين أنّ زمرة التناظرات لنوعٍ معيّنٍ من الأشكال الهندسية ربّما يعتمد على بعد الفضاء الذي نعُدّ الشكل واقعًا فيه.

أ. صِف التناظرات كلها لنقطةٍ من خط الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ؛ أي، صِفْ تقايسات $\mathbb{R}$ كلها التي تترك نقطةً واحدة مثبتة.

ب. صِف التناظرات (الانسحابات، الانعكاسات،... إلخ) كلها لنقطة في المستوى $\mathbb{R}^2$.

جـ. صِف التناظرات كلها لقطعة مستقيمة من $\mathbb{R}$.

د. صِف التناظرات كلها لقطعة مستقيمة من $\mathbb{R}^2$.

هـ. صِف بعض التناظرات لقطعة مستقيمة من $\mathbb{R}^3$.

2. لِتُشِرْ P إلى تقايُسِ مستوًى حافظٍ للاتجاه، ولتُشر R إلى واحدٍ عاكسٍ للاتجاه. املأ الجدول بـ P أو R للإشارة إلى صفة حفظ أو عكس الاتجاه لحاصل الضرب.

	P	R
P		
R		

3. املأ الجدول لإعطاء جميع الأنماط المحتملة لتقايسات المستوى المعطاة بحاصل ضرب نمطين، فمثلًا: حاصل ضرب دورانين يمكن أن يكون دورانًا، أو يمكن أن يكون نمطًا آخر. املأ المربع الذي يخصّ $\rho\rho$ بكلا الحرفين، واستخدم إجابتك في حل التمرين 2 في حذف بعض الأنماط، وأخرج المحايد من الحساب.

	τ	ρ	μ	γ
τ				
ρ				
μ				
γ				

4. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من عنصر واحد هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

5. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من عنصرين هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

6. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من ثلاثة عناصر هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

7. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من أربعة عناصر مماثلة لـ $\mathbb{Z}_4$، هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

8. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من أربعة عناصر مماثلة لزمرة كلاين الرباعية V ، هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

9. أعطِ احتمالات رتبة تقايس لكلٍّ من الأنماط الأربعة لتقايسات المستوى (غير المحايد)، في زمرة تناظراتٍ في المستوى.

10. لتقايس المستوى ϕ نقطة ثابتة (*fixed point*) ، إذا وجدت نقطة P في المستوى على أن يكون $\phi(P) = P$. أيّ من الأنماط الأربعة لتقايسات المستوى (غير المحايد) يمكن أن يكون له نقطة ثابتة؟

11. بالرجوع إلى التمرين 10، أيّ أنماطِ تقايسات المستوى – إن وُجِد – له نقطة ثابتة واحدة بالضبط؟

12. بالرجوع إلى التمرين 10، أيّ أنماطِ تقايسات المستوى – إن وُجِد – له نقطتان ثابتتان بالضبط؟

13. بالرجوع إلى التمرين 10، أيُّ أنماط تقايسات المستوى– إن وُجِد – له عدد غير منتهٍ من النقاط الثابتة؟

14. برهن هندسيًّا على أنّ تقايس المستوى الذي يترك ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ثابتةٍ، يجب أن يكون الدالّة المحايدة.

15. باستخدام التمرين 14، أثبت جبريًّا أنه إذا توافق تقايسا المستوى ϕ و ψ عند ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، أي إذا كان $\phi(P_i) = \psi(P_i)$ لنقاطٍ ليست على استقامة واحدة P_1، P_2، و P_3، فإنّ ϕ و ψ هما الدالّة نفسها.

16. هل تشكل الدورانات – إضافة إلى الدالّة المحايدة – زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

17. هل تشكل الانسحابات – إضافة إلى الدالّة المحايدة – زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

18. هل تشكل الدورانات حول نقطة مخصوصة P – إضافة إلى الدالّة المحايدة– زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

19. هل يشكل الانعكاس حول خط مخصوص L – إضافة إلى الدالّة المحايدة – زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

20. هل تشكل الانعكاسات الانحداريّة – إضافة إلى الدالّة المحايدة– زمرةً جزئية من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

21. أيٌّ من الأنماط الأربعة لتقايسات المستوى يمكن أن تكون عناصر في زمرة جزئيّة منتهية من زمرة تقايسات المستوى؟

22. لإكمال تفصيلٍ في إثبات المبرهنة 5.12، لتكن G زمرةَ تقايساتِ مستوًى منتهية. أثبت أنّ الدورانات في G – إضافة إلى التقايس المحايد – تشكل زمرة جزئيّة H من G، وأنه إمّا $H=G$ أو $|G| = 2|H|$. [مساعدة: استخدم الطريقة نفسها التي استخدمناها في إثبات أنّ $|S_n| = 2|A_n|$].

23. لإكمال تفصيلٍ في إثبات المبرهنة 5.12، لتكن G زمرة منتهية مؤلفة من التقايس المحايد والدورانات حول نقطة واحدة P في المستوى. أثبت أنّ G دوريّة، وتُولَّد بالدوران من G الذي يُحرِّكُ المستوى عكس عقارب الساعة حول P بالزاوية الأصغر $\theta > 0$. [مساعدة: اتبع فكرة برهان أنّ الزمرة الجزئيّة من زمرة دوريّة هي دوريّةٌ].

في التمارين من 24 إلى 30، وضِّح الأنماط السبعة المختلفة للأنسجة، حين تُصنَّفُ بحسب تناظراتها. تخيّل الشكل المبيَّن يتواصل بصورة لا نهائية إلى اليمين واليسار، تحوي زمرة التناظر للنسيج انسحاباتٍ دائمًا. أجب عن الأسئلة الآتية حول زمرة التناظرات للنسيج لكل واحد من هذه التمارين:

أ. هل تحوي الزمرة دورانًا؟

ب. هل تحوي الزمرة انعكاسًا في خط أفقي؟

جـ. هل تحوي الزمرة انعكاسًا في خط عمودي؟

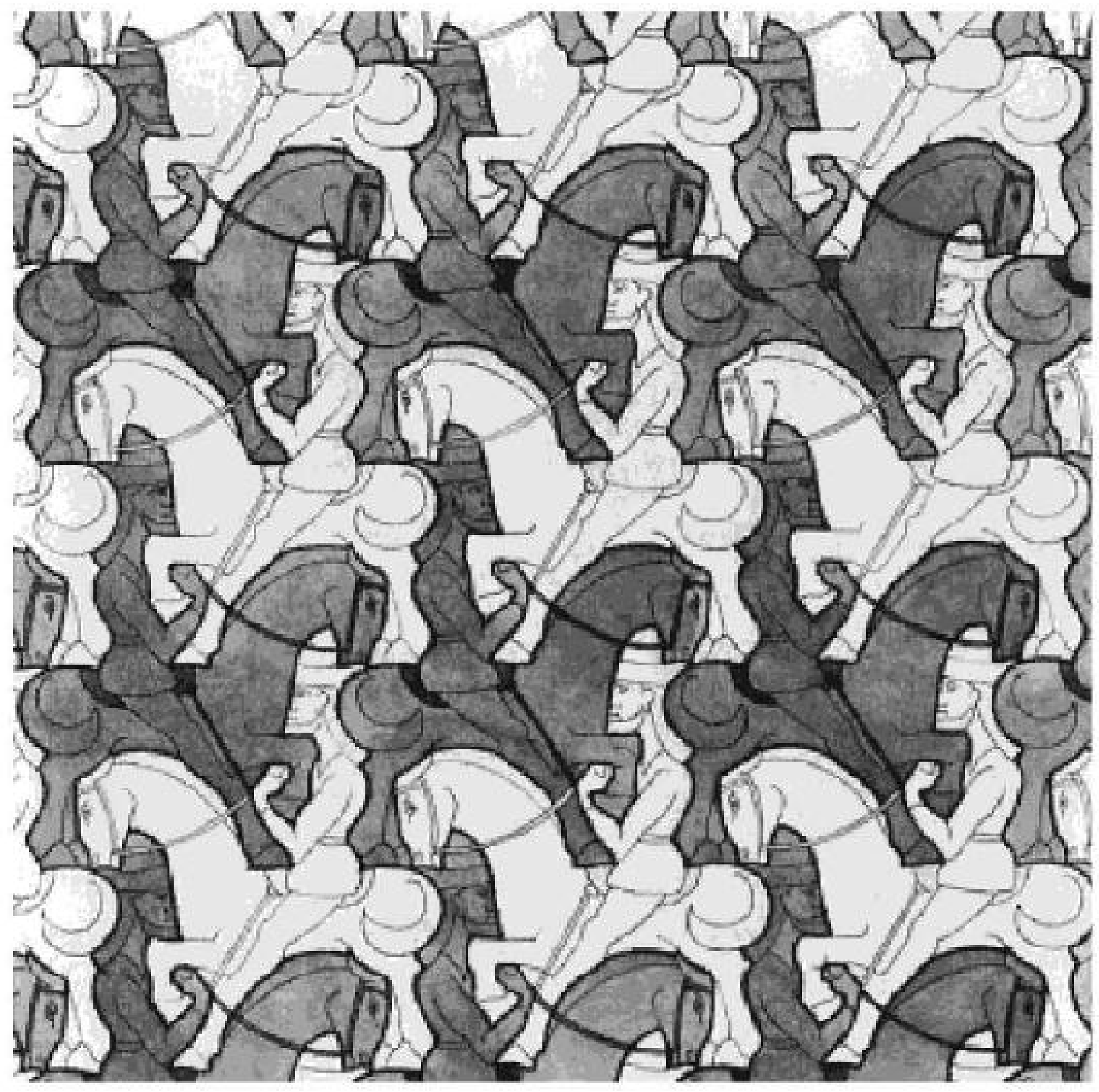
د. هل تحوي الزمرة انعكاسًا انحداريًّا غير تافه؟

هـ. أيّ من الزمر الممكنة $\mathbb{Z}, D_\infty, \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ أو $D_\infty\times\mathbb{Z}_2$ تماثل زمرة التناظر للنسيج؟

24. F F F F F F F F F F F F F F F

25. T T T T T T T T T T

26. E E E E E E E E E E E E



الشكل 8.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بفرسان (© 1946م مؤسسة إِشر – بارن – هولندا (M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).

27. Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z

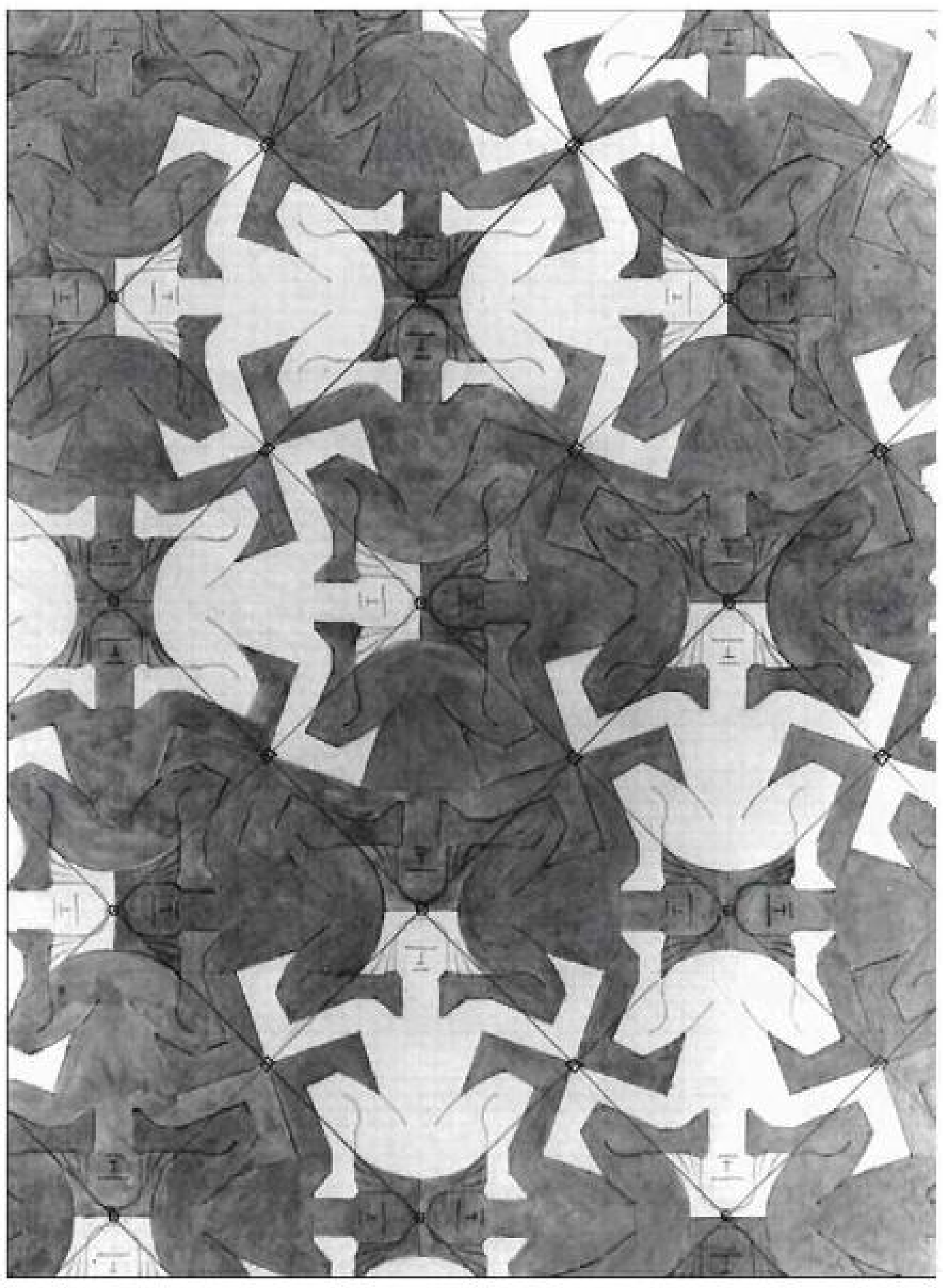
28. H H H H H H H H H H

29. ⌉ ⌋ ⌉ ⌋ ⌉ ⌋ ⌉ ⌋ ⌉ ⌋

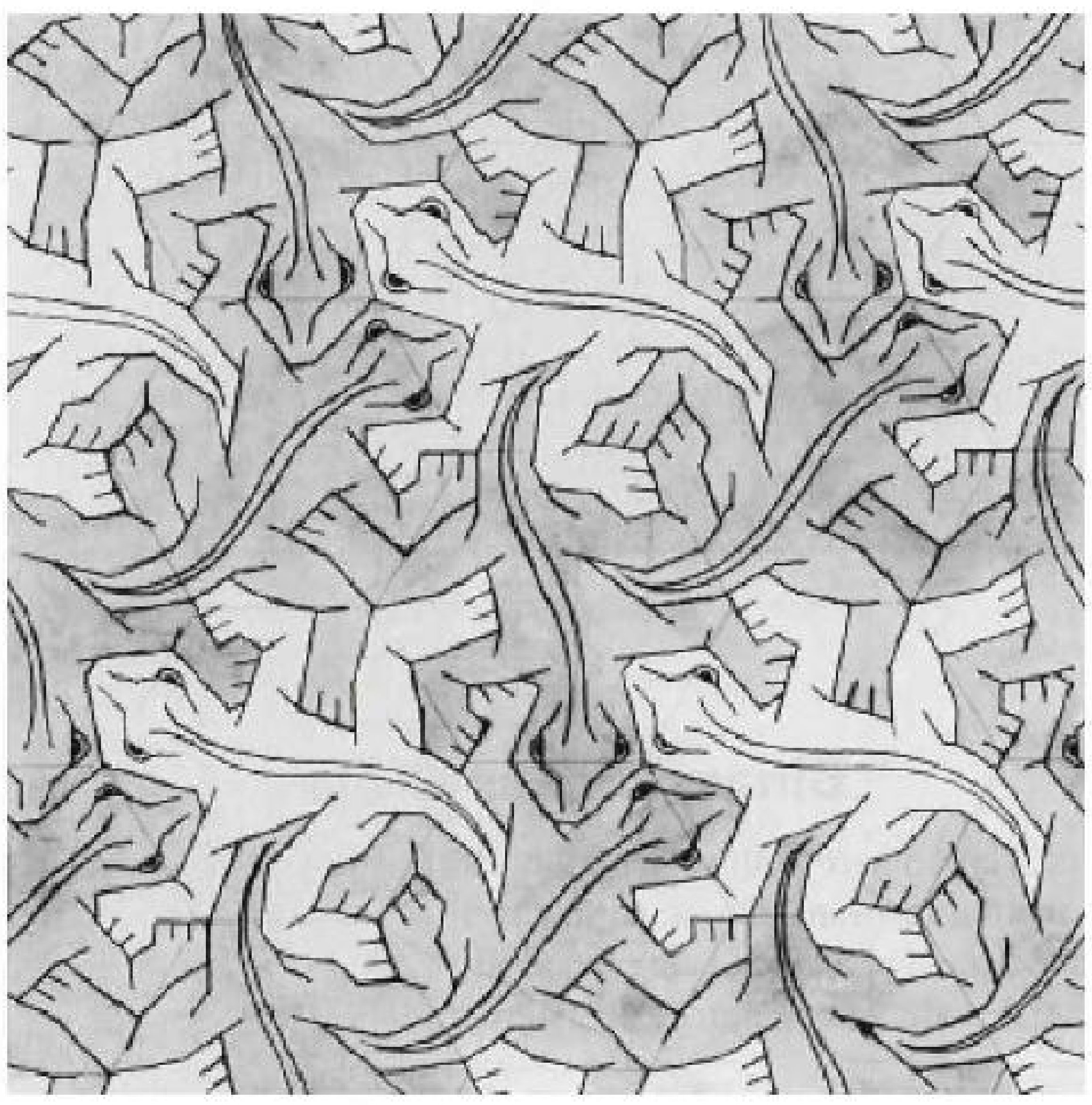
30. ∪ ∩ ∪ ∩ ∪ ∩ ∪ ∩

تصف التمارين من 31 إلى 37 نقشًا يستخدم في ملء المستوى بالانسحاب في الاتجاهين المعطيين في المتجهين المحدَّدين. أجب عن هذه الأسئلة في كل حالة.

أ. هل تحوي زمرة التناظرات أيّ دورانات؟ إذا حوَت، فبأيّ زاوية ممكنة θ حيث $0 < \theta \leq 180°$؟



الشكل 9.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسانٍ تخيلية (© 1936م مؤسسة إِشر – بارن – هولندا (M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).



الشكل 10.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بزواحف (© 1939م مؤسسة إِشر – بارن – هولندا (M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).

ب. هل تحوي زمرةُ التناظرات أيّ انعكاسات؟

جـ. هل تحوي زمرة التناظرات أيّ انعكاسات انحدارية غير تافهة؟

31. مربعٌ بحوافٍّ أفقية وعمودية باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيَيْن في المتجهين $(0 ,1)$ و $(1 ,0)$.

32. مربعٌ كالذي في التمرين 31 باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيَيْن في المتجهين $(1/2 ,1)$ و $(1 ,0)$.

33. مربعٌ كالذي في التمرين 31 مع الحرف L في مركزه باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و (0, 1).

34. مربع كالذي في التمرين 31 مع الحرف E في مركزه باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و (0, 1).

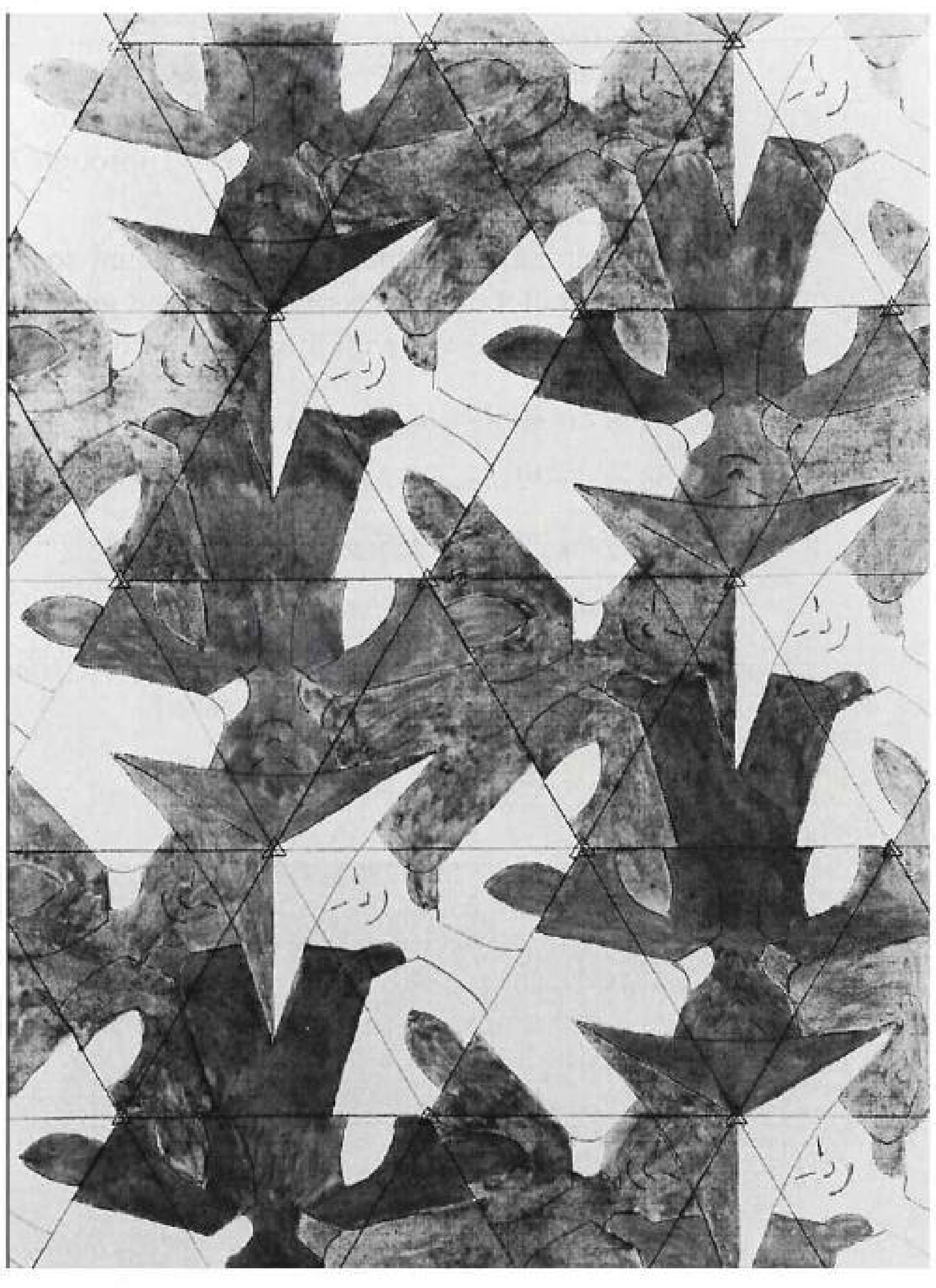
35. مربعٌ كالذي في التمرين 31 مع الحرف H في مركزه باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و (0, 1).

36. سداسي منتظم برأسٍ في الأعلى باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

37. سداسي منتظم برأسٍ في الأعلى يحوي مثلثًا متساوي الأضلاع برأس في الأعلى ومركّزٍ في مركز السداسي، باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

تتعلق التمارين من 38 إلى 41 بالأعمال الفنية لإشر (M.C. Escher). أهمل التظليل في الأشكال، وافترض أنّ العلامات في كل صورة إنسان، أو زاحف، أو فارس هي نفسها، ولو أنها محجوبة بسبب التظليل. أجب عن الأسئلة (أ)، و(ب)، و(جـ) نفسها، التي سُئلت للتمارين من 31 إلى 36، وأجب كذلك عن هذا الفرع (د).

د. بفرض محاورٍ إحداثية أفقية وعمودية بتدريجٍ متساوٍ كالمعتاد، أعطِ متجهاتٍ في الاتجاهين غير المتوازيين لمتجهين تولّد زمرة الانسحابات. لا تشغل نفسك بطول هذه المتجهات.



الشكل 11.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسان (© 1936م مؤسسة إشر – بارن – هولندا (M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).

38. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بفرسان في الشكل 8.12.

39. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسان تخيلية في الشكل 9.12.

40. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بزواحف في الشكل 10.12.

41. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسان في الشكل 11.12.

42. أثبت أنّ دورانات المكعب في الفضاء تشكل زمرةً تماثل S_4. [مساعدة: دوران المكعب يُبدِّل الأقطار المارة بمركز المكعب].

الوحدة الثالثة

التشاكلات وزمر العامل
Homomorphisms and Factor Groups

1– الفصل 16 متطلب سابق للفصلين 17 و 36 فقط.

2– الفصل 17 ليس متطلبًا سابقًا لما بقي من الكتاب.

التشاكلات Homomorphisms

دوال ربط البنية

لتكن G و G' زمرتين، سوف نهتم بالدوال من G إلى G' التي تربط بنية الزمرة G ببنية الزمرة G'، فدالة كهذه تعطينا عادة معلومات عن إحدى الزمرتين من خلال معرفة خصائص بنيوية للأخرى، وتماثل $\phi: G \to G'$ – إن وجد – هو مثال على دالة ربط البنية، فإذا علمنا كل شيء عن الزمرة G، وعلمنا إنّ ϕ تماثل، فإننا نعلم بصورة مباشرة كل شيء عن بنية الزمرة G'؛ لأنها من ناحية بنائية نسخة عن G. سنناقش الآن دوال ربط البنية بصورة أكثر تعميمًا، بإضعاف بعض من شروط التماثل، بعدم اشتراط أن تكون الدوال أحادية وغامرة، فالشروط هي الجزء البحت لمبرهنة المجموعات في تعريفنا للتماثل، ولا تمت بصلة للعمليات الثنائية على G وG'، فالعمليات الثنائية تعطينا الجبر، وهي بؤرة دراستنا في هذا الكتاب، وسنبقي في تعريفنا خاصية واحدة فقط من خصائص التماثل، وهي التشاكل؛ لارتباطها بالعمليات الثنائية.

1.13 تعريف الدالة ϕ من الزمرة G إلى الزمرة G' هي **تشاكل (homomorphism)**، إذا تحققت خاصية التشاكل

$$\phi(a\,b) = \phi(a)\,\phi(b) \tag{1}$$

لكل $a, b \in G$. ■

لنفحص الفكرة وراء المطلوب (**1**) للتشاكل $\phi: G \to G'$. في المعادلة (1) يحدث الضرب ab في الطرف الأيسر في G، بينما يحدث الضرب $\phi(a)\,\phi(b)$ في الطرف الأيمن في G'؛ ولهذا تعطي المعادلة (1) علاقة بين هاتين العمليتين الثنائيتين، وعليه، بين بنيتي الزمرتين.

لأي زمرتين G و G' يوجد تشاكل واحد على الأقل $\phi: G \to G'$، يسمّى **التشاكل التافه (trivial homomorphism)**، والمعرف بـ $\phi(g) = e'$ لكل $g \in G$، حيث إنّ e' هو العنصر المحايد في G'، وتؤول المعادلة (1) إلى المعادلة الصحيحة $e' = e'e'$، وباستخدام هذا التشاكل التافه، فلا توجد معلومات عن بنية G أو G' يمكن الحصول عليها من الزمرة الأخرى، والمثال الآتي يبيّن كيف إنّ تشاكل ϕ يرسل G بصورة غامرة إلى G'، يمكن أن يعطي معلومات عن بنية G'.

2.13 مثال ليكن $\phi : G \to G'$ تشاكلًا غامرًا من الزمرة G إلى G'، سنبرهن أنه إذا كانت G إبدالية، فإن G' إبدالية. ليكن $a', b' \in G'$ يجب أن نثبت إنّ $a'b' = b'a'$؛ لإنّ ϕ غامر لـ G'، يوجد $a,b \in G$، حيث إنّ: $\phi(a) = a'$ و $\phi(b) = b'$؛ ولإنّ G إبدالية، نحصل على $ab = ba$، وباستخدام الخاصية (1) نحصل على

$a'b' = \phi(a)\,\phi(b) = \phi(ab) = \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) = b'a'$، وعليه، فإنّ G' إبدالية. ▲

سوف يبين المثال 16.13 كيف إنّ معلومات عن G' يمكن أن تعطي معلومات عن G وذلك من خلال تشاكل $\phi: G \to G'$. وفيما يأتي أمثلة على تشاكلات لبعض الزمر:

مثال 3.13 لتكن S_n زمرة التناظر على n حرف، وليكن $\phi: S_n \to \mathbb{Z}_2$ معرّف بـ:

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } \sigma \text{ تبديلًا زوجيًا} \\ 1 & \text{إذا كان } \sigma \text{ تبديلًا فرديًا} \end{cases}$$

أثبت إنّ ϕ تشاكل.

الحلّ يجب أن نثبت أنّ $\phi(\sigma\mu) = \phi(\sigma) + \phi(\mu)$ لكل $\sigma,\mu \in S_n$، لاحظ إنّ العملية في الجهة اليمنى من هذه المعادلة كتبت بالجمع؛ لأنها تحدث في الزمرة $\mathbb{Z}_2$. يمكن إثبات صحة هذه المعادلة بفحص أربع حالاتٍ فقط، هي:

σ فردي و μ فردي .

σ فردي و μ زوجي .

σ زوجي و μ فردي .

σ زوجي و μ زوجي .

بفحص الحالة الأولى، إذا كان بالإمكان كتابة كل من σ و μ بصورة ضرب عدد فردي من المناقلات، فيمكن كتابة $\sigma\mu$ بصورة ضرب عدد زوجي من المناقلات، وعليه، $\phi(\sigma\mu) = 0$ و $\phi(\sigma) + \phi(\mu) = 1+1 = 0$ في $\mathbb{Z}_2$.

باقي الحالات يمكن فحصها بصورة مشابهة. ▲

مثال 4.13 (**تشاكل التعويض**): لتكن F زمرة الجمع لكل الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن c أي عدد حقيقي، ليكن $\phi_c: F \to \mathbb{R}$ تشاكل التعويض **(evaluation homomorphism)** المعرّف بـ $\phi_c(f) = f(c)$ لـ $f \in F$، تذكر– من التعريف – إنّ جمع دالتين f و g هو الدالة $f + g$، التي قيمتها عند x هي $f(x) + g(x)$ وعليه، لدينا

$$\phi_c(f+g) = (f+g)(c) = f(c) + g(c) = \phi_c(f) + \phi_c(g),$$

وتحققت المعادلة (1)، وهكذا، فإنّ لدينا تشاكلًا. ▲

مثال 5.13 لتكن $\mathbb{R}^n$ زمرة الجمع لمتجهات عمودٍ من الرتبة n بإحداثيات حقيقية، (هذه الزمرة تماثل بالتأكيد الضرب المباشر لـ $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع مع نفسها لـ n عامل). لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ لأعداد حقيقية، ولتكن $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ معرّفة بـ $\phi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ لكل متجه عمود $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$، عندئذ تكون ϕ تشاكلًا؛ لأن لـ $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$، يبين جبر المصفوفات إنّ $\phi(v+w) = A(v+w) = Av + Aw = \phi(v) + \phi(w)$ في الجبر الخطي – دالة كهذه حُسبت بوصفها ضرب متجه عمود من اليسار بمصفوفة A – تعرف بوصفها **تحويلًا خطيًا (linear transformation)**. ▲

مثال 6.13 لتكن $GL(n,\mathbb{R})$ زمرة الضرب لكل المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$، تذكر إنّ المصفوفة A ذات معكوس إذا وفقط إذا كانت محددتها – $det(A)$ – ليست صفرًا، وتذكر أيضًا إنّ لمصفوفتين $A,B \in GL(n,\mathbb{R})$ لدينا

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

وهذه تعني إنّ المحددة هي تشاكل يرسل $GL(n,\mathbb{R})$ إلى زمرة الضرب $\mathbb{R}^*$ للأعداد الحقيقية غير الصفرية. ▲

التشاكلات من الزمرة G إلى نفسها عادة تكون مفيدة في دراسة بنية G، ومثالنا الآتي يعطي مثالاً غير تافهٍ لتشاكل من زمرة إلى نفسها.

مثال 7.13 ليكن $r \in \mathbb{Z}$، وليكن $\phi_r: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ معرّف بـِ $\phi_r(n) = rn$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. لكل $m,n \in \mathbb{Z}$ لدينا $\phi_r(m+n) = r(m+n) = rm + rn = \phi_r(m) + \phi_r(n)$ وعليه فإن ϕ_r تشاكل. لاحظ إنّ ϕ_0 هو التشاكل التافه، و ϕ_1 هو الدالة المحايدة، و ϕ_{-1} يرسل $\mathbb{Z}$ بصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}$، ولكل r أخرى من $\mathbb{Z}$، الدالة ϕ_r ليست غامرة لـِ $\mathbb{Z}$. ▲

مثال 8.13 لتكن $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times G_n$ ضربيًا مباشرًا لزمر، **دالة الإسقاط (projection map)** $\pi_i: G \to G_i$ بحيث إنّ $\pi_i(g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots, g_n) = g_i$ هي تشاكل لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. وهي تَنْتُج مباشرة من حقيقة إنّ العملية الثنائية على G تتطابق في المركبة ذات الترتيب i مع العملية الثنائية على G_i. ▲

مثال 9.13 لتكن F زمرة الجمع للدوال المتصلة على المجال $[0,1]$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية. الدالة $\sigma: F \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ $\sigma(f) = \int_0^1 f(x)dx$ لكل $f \in F$ هي تشاكل؛ لإنّ:

$$\sigma(f+g) = \int_0^1 (f+g)(x)dx = \int_0^1 [f(x)+g(x)]dx$$
$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \sigma(f) + \sigma(g)$$

لكل $f,g \in F$ ▲

مثال 10.13 **(الاختصار مقياس n)**: لتكن γ الدالة الطبيعية من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_n$ المعطاة بـ $\gamma(m) = r$، حيث r هو الباقي المعطى من خلال خوارزمية القسمة عند قسمة m على n. أثبت إنَّ γ تشاكل.

الحل نحتاج إلى أن نثبت إنّ:

$$\gamma(s+t) = \gamma(s) + \gamma(t)$$

لكل $s,t \in \mathbb{Z}$. باستخدام خوارزمية القسمة، ليكن:

$$s = q_1 n + r_1 \tag{2}$$

و

$$t = q_2 n + r_2 \tag{3}$$

حيث $0 \le r_i < n$ لـِ $i = 1,2$. إذا كان
$$r_1 + r_2 = q_3 n + r_3 \tag{4}$$
لـِ $0 \le r_3 < n$، فبجمع المعادلتين (2) و (3) نرى إنّ:

$$s + t = (q_1 + q_2 + q_3)n + r_3,$$

وهكذا $\gamma(s+t)=r_3$

ونرى من المعادلتين (2) و (3) أن $\gamma(s)=r_1$ و $\gamma(t)=r_2$، أمّا المعادلة (4) فتبيّن إنّ المجموع r_1+r_2 في $\mathbb{Z}_n$ يساوي r_3 أيضًا.

بناءً على ذلك، فإنّ $\gamma(s+t)=\gamma(s)+\gamma(t)$ وهكذا فإنّ لدينا تشاكلًا. ▲

كلٌّ من التشاكلات في الأمثلة الثلاثة السابقة هي دوال متعدد – لواحد، أي إنّ نقاطًا مختلفة في مجال الدالة يمكن أن ترسل إلى النقطة نفسها، وللتوضيح، ليكن التشاكل $\pi_1: \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2$ المعرّف في المثال 8.13، فلدينا:

$$\pi_1(0,0)=\pi_1(0,1)=\pi_1(0,2)=\pi_1(0,3)=0$$

وعليه، فإن أربعة عناصر في $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ أرسلت إلى 0 في $\mathbb{Z}_2$ من خلال π_1.

تركيب تشاكلات الزمر هو أيضًا تشاكل زمر، أي إنه إذا كان $\phi: G\to G'$ و $\gamma: G'\to G''$ كلاهما تشاكل زمر، فإنّ تركيبهما- $(\gamma\circ\phi): G\to G''$ حيث $(\gamma\circ\phi)(g)=\gamma(\phi(g))$ لـِ $g\in G$، هو تشاكل أيضًا. (انظر التمرين 49).

خصائص التشاكلات

ننتقل إلى بعض المزايا البنائية لـِ G و G' المحفوظة من خلال التشاكل $\phi: G\to G'$، ونراجع أولاً تعريفات مبرهنة المجموعات، لاحظ استخدام الأقواس المربعة عند تطبيق دالة على مجموعة جزئية من مجالها.

11.13 تعريف لتكن ϕ دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y، ولتكن $A\subseteq X$ و $B\subseteq Y$، **الصورة** $\phi[A]$ **لـِ** A **في** Y **بالنسبة إلى** ϕ **(image $\phi[A]$ of A in Y under ϕ)** هي $\{\phi(a)\mid a\in A\}$، والمجموعة $\phi[X]$ **هي المدى (range)** لـِ ϕ، **ومعكوس الصورة** $\phi^{-1}[B]$ لـِ B **في** X **(inverse image)** هو $\{x\in X\mid \phi(x)\in B\}$ ■

الخصائص الثلاثة الأولى للتشاكل التي ستذكر في المبرهنة الآتية قابلت مصادفة الحالات الخاصة للتماثل المذكورة في: المبرهنة 14.3، والتمرين 28 للفصل 4 والتمرين 41 للفصل 5، كانت الخصائص في هذه الحالات الخاصة حقيقة واضحة؛ لإنّ بنيتي G و G' متطابقتان، سوف نرى إنّ هذه الشروط تتحقق لدوال ربط البنية للزمر، حتى إن كانت الدوال ليست أحادية وغامرة، لم نناقش هذه الشروط على نحوٍ واضح في هذا السياق الجديد.

12.13 مبرهنة ليكن ϕ تشاكلاً من الزمرة G إلى الزمرة G':

1. إذا كان e هو العنصر المحايد في G، فإنّ $\phi(e)$ هو العنصر المحايد e' في G'.

2. إذا كان $a\in G$، فإنّ $\phi(a^{-1})=\phi(a)^{-1}$.

3. إذا كانت H زمرة جزئية من G، فإنّ $\phi[H]$ زمرة جزئية من G'.

4. إذا كانت K' زمرة جزئية من G'، فإنّ $\phi^{-1}[K']$ زمرة جزئية من G.

بعبارة مختصرة، ϕ تحفظ العنصر المحايد، المعكوسات والزمر الجزئية.

البرهان ليكن ϕ تشاكلاً من G إلى G'، عندئذٍ:

$$\phi(a) = \phi(ae) = \phi(a)\phi(e)$$

بضرب الطرف الأيسر بـ $\phi(a)^{-1}$ نرى أن $e' = \phi(e)$، وعليه، $\phi(e)$ يجب أن يكون العنصر المحايد e' في G'. تبين المعادلة:

$$e' = \phi(e) = \phi(aa^{-1}) = \phi(a)\,\phi(a^{-1})$$

إنّ $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$

بالانتقال إلى العبارة (3)، لتكن H زمرة جزئية من G، وليكن $\phi(a)$ و $\phi(b)$ أي عنصرين في $\phi[H]$، فإنّ $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$، وهكذا نرى أن $\phi(a)\phi(b) \in \phi\,[H]$؛ إذن، $\phi[H]$ مغلقة بالنسبة إلى العملية على G'، والحقيقة $e' = \phi(e)$ و $\phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1})$ تكمل برهان إنّ $\phi[H]$ زمرة جزئية من G'.

وأما الاتجاه الآخر –أي العبارة (4) – فلتكن K' زمرة جزئية من G'، افترض إنّ a و b في $\phi^{-1}\,[K']$، عندئذ $\phi(a)\phi(b) \in K'$؛ لأن K' زمرة جزئية، تبين المعادلة: $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ إنّ $ab \in \phi^{-1}[K']$، وعليه، $\phi^{-1}[K']$ مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائية على G، يجب أن تحوي K' أيضًا العنصر المحايد، $e' = \phi(e)$ وعليه، $e \in \phi^{-1}[K']$، وإذا كان $a \in \phi^{-1}[K']$، فإنّ $\phi(a) \in K'$، وعليه، $\phi(a)^{-1} \in K'$ ، لكن $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$؛ لذا، يجب أن نحصل على $a^{-1} \in \phi^{-1}[K']$ ومن ثم $\phi^{-1}[K']$ زمرة جزئية من G. ♦

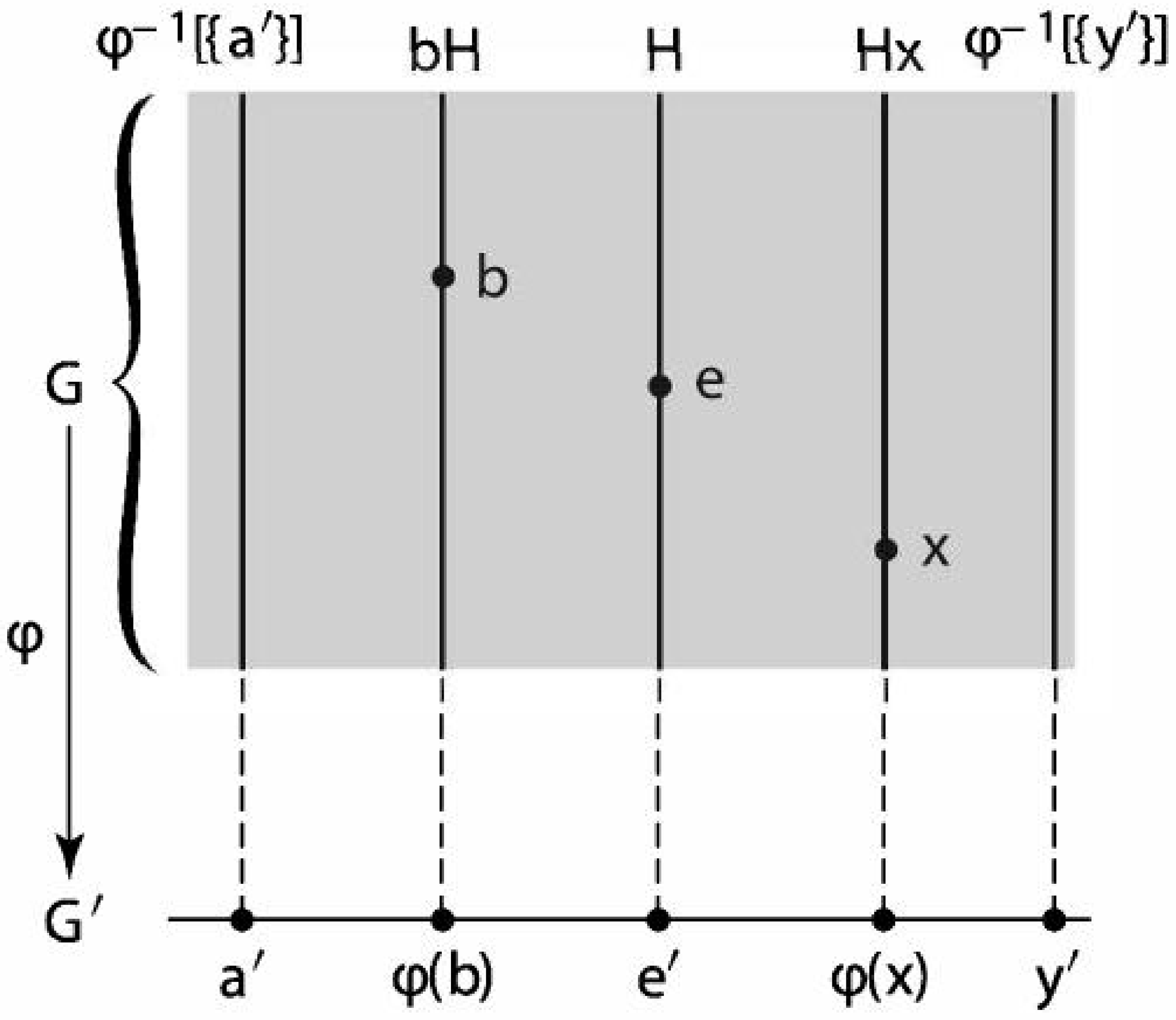
ليكن $\phi\colon G \to G'$ تشاكل زمر، وليكن e' هو العنصر المحايد في G'، الآن $\{e'\}$ زمرة جزئية من G'، إذن $\phi^{-1}\,[\{e'\}]$ زمرة جزئية H من G من خلال العبارة (4) في المبرهنة (12.13)، الزمرة الجزئية هذه حاسمة في دراسة التشاكلات.

13.13 تعريف ليكن $\phi\colon G \to G'$ تشاكل زمر، الزمرة الجزئية $\phi^{-1}[\{e'\}] = \{x \in G \mid \phi(x) = e'\}$ هي **النواة** لـ f **(Kernel of)**، ويرمز لها بـ $Ker\ (\phi)$. ■

ناقش المثال 5.13 التشاكل $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ المعطى بـ $\phi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$، حيث إنّ A مصفوفة من الدرجة $m \times n$، يسمى $Ker\ (\phi)$ في هذا السياق الفضاء الصفري لـ A؛ لأنه يتألف من كل $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$، حيث إنّ $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$، المتجه الصفري.

لتكن $H = Ker\ (\phi)$ لتشاكل $\phi\colon G \to G'$، ونفكر في ϕ "بوصفه طَيًّا (Collapsing) لـ H بصورة غامرة إلى e'، تبين المبرهنة 15.13 الآتية إنّ مجموعتي المشاركة gH و Hg لـ $g \in G$، هما الشيء نفسه، وقد طويتا بصورة غامرة إلى العنصر الوحيد $\phi(g)$ من خلال ϕ، أي إنّ $\phi^{-1}\,[\{\phi(g)\}] = gH = Hg$، (تأكد من أنك تفهم سبب استخدام ()، [ ] و { } في $(\phi^{-1}\,[\{\phi(g)\}])$)، وقد حاولنا أن نرمز لهذا الطي في الشكل 14.13، حيث إنّ المستطيل المظلل يمثل G، وتمثل القطع المستقيمة العمودية غير المقطعة مجموعات المشاركة لـ $H = Ker\ (\phi)$، أمّا الخط الأفقي في الأسفل فيمثل G'، ننظر إلى ϕ بوصفه إسقاطًا لعناصر G –التي هي في

المستطيل المظلل – مباشرة إلى الأسفل وبصورة غامرة لعناصر G'، والتي هي على القطعة المستقيمة الأفقية في الأسفل، لاحظ السهم المتجه إلى الأسفل المُرَمَّز بـ ϕ من اليسار، والمبتدئ بـ G والمنتهي بـ G'؛ إذن، تقع عناصر $H = Ker\ (\phi)$ على القطعة المستقيمة العمودية غير المقطعة في الصندوق المظلل الواقعة إلى الأعلى من e'، مثلما رمز لها في أعلى الشكل.



الشكل 14.13 مجموعات المشاركة لـ H طويت بـ ϕ

15.13 مبرهنة ليكن $\phi{:}G \to G'$ تشاكل زمر، ولتكن $H = Ker\ (\phi)$، وليكن $a \in G$، عندئذٍ المجموعة

$$\phi^{-1}[\{\phi(a)\}] = \{x \in G|\ \phi(x) = \phi(a)\}$$

هي مجموعة المشاركة اليسرى aH لـ H، وهي أيضًا مجموعة المشاركة اليمنى Ha لـ H، بناءً على ذلك، تكون التجزئتان لـ G إلى مجموعات مشاركة يسرى ومجموعات مشاركة يمنى لـ H، هما الشيء نفسه.

البرهان نريد إثبات إنّ:

$$\{x \in G|\ \phi(x) = \phi(a)\} = aH$$

توجد طريقة قياسية لإثبات إنّ مجموعتين متساويتان؛ أثبت إنّ كلًّا منهما مجموعة جزئية من الأخرى.

افترض إنّ $\phi(x) = \phi(a)$، عندئذٍ:

$$\phi(a)^{-1}\ \phi(x) = e'$$

حيث إنّ e' هو العنصر المحايد في G'، نعرف من خلال المبرهنة 12.13 إنّ $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$، وهكذا لدينا

$$\phi(a^{-1})\phi(x) = e'.$$

لإنّ ϕ تشاكلاً، ولدينا:

$\phi(a^{-1})\phi(x) = \phi(a^{-1}x)$. فإن $\phi(a^{-1}x) = e'$.

لكنها تبين إنّ $a^{-1}x$ في $H = Ker\ (\phi)$، وهكذا $a^{-1}x = h$ لعنصر ما $h \in H$ و $x = ah \in aH$

وهذه تبين إنّ:

$$\{x \in G |\ \phi(x)= \phi(a)\} \subseteq aH.$$

لإثبات الاحتواء في الاتجاه الآخر، لتكن $y \in aH$ وعليه $y = ah$ لعنصرٍ ما $h \in H$، عندئذٍ:

$$\phi(y) = \phi(ah) = \phi(a)\ \phi(h) = \phi(a)e' = \phi(a),$$

إذن ، $y \in \{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\}$ ..

تركنا البرهان المشابه لـِ $\{x \in G |\ \phi(x) = \phi(a)\} = Ha$ للتمرين (52). ♦

16.13 مثال تبين المعادلة الخامسة من الفصل الأول إنّ: $|z_1\ z_2| = |\ z_1||z_2|$ للعددين المركبين z_1 و z_2، وهذا يعني إنّ دالة القيمة المطلقة $|\ |$ تشاكل من الزمرة $\mathbb{C}^*$ – للأعداد المركبة غير الصفرية بالنسبة إلى الضرب – وبصورة غامرة إلى الزمرة $\mathbb{R}^+$ – للأعداد الحقيقية الموجبة بالنسبة إلى الضرب؛ لإنّ $\{1\}$ زمرة جزئية من $\mathbb{R}^+$، تبين المبرهنة 12.13 – مرة أخرى – إنّ الأعداد المركبة بالمقدار 1 تمثل زمرة جزئية U من $\mathbb{C}^*$، تذكر إنّ الأعداد المركبة يمكن أن ينظر إليها بوصفها مالئة للمستوى الديكارتي، وإنّ مقدار العدد المركب هو المسافة بينه وبين نقطة الأصل، بناءً على ذلك، فإن مجموعات المشاركة لـِ U هي دوائر مركزها نقطة الأصل، ومن خلال هذا التشاكل، فإنّ كل دائرة طويت وبصورة غامرة لنقطة تقاطعها مع محور السينات الموجب. ▲

فيما يأتي توضيح للمبرهنة 15.13 من التفاضل:

17.13 مثال لتكن D زمرة الجمع للدوال القابلة للاشتقاق التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن F زمرة الجمع للدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. عندئذ، يعطينا الاشتقاق دالة $\phi\!: D \to F$ حيث $\phi(f\,) = f\,'$ لـِ $f \in F$. نرى بسهولة إنّ ϕ تشاكلٌ؛ لإنّ $\phi(f + g) = (f + g)' = f\,' + g' = \phi(f\,) + \phi(g)$ مشتقة الجمع هي جمع المشتقات.

الآن $Ker\ (\phi)$ يتألف من الدوال f جميعها، حيث إنّ $f\,' = 0$ –الدالة الثابتة الصفرية–، وعليه فإن $Ker\ (\phi)$ يتألف من الدوال الثابتة جميعها، التي تشكل زمرة جزئية C من F، لنجد الدوال جميعها في D، التي يرسلها ϕ إلى x^2، أي الدوال جميعها التي مشتقتها هي x^2، نعرف الآن إنّ $x^3/3$ هي إحدى هذه الدوال، ومن خلال المبرهنة 15.13 الدوال جميعها في هذه الحالة تشكل مجموعة المشاركة $x^3/3 + C$. هل تبدو هذه مألوفة؟ ▲

سنستخدم عادة النتيجة الآتية من المبرهنة 15.13:

18.13 نتيجة تشاكل الزمر $\phi: G \to G'$ هو دالة أحادية إذا وفقط إذا كان $Ker\ (\phi) = \{e\}$.

البرهان إذا كان $Ker\ (\phi) = \{e\}$، فإنّ العناصر المرسلة إلى $\phi(a)$ لأي $a \in G$، هي بالضبط عناصر مجموعة المشاركة اليسرى $a\{e\} = \{a\}$، التي تُبَيِّن إنّ ϕ أُحادي.

في المقابل، افترض إنّ ϕ أحادي، نعلم من خلال المبرهنة 12.13 إنّ $e' = \phi(e)$– العنصر المحايد في G'. لإنّ ϕ أحادي، نرى إنّ e هو العنصر الوحيد المرسل إلى e' من خلال ϕ، وعليه $Ker(\phi) = \{e\}$. ♦

بالنظر إلى النتيجة 18.13 عُدِّل المخطط التمهيدي المعطى قبل المثال 8.3 لإثبات إنّ دالة ϕ تماثل بنَى ثنائية، وذلك عندما تكون البنَى زمرتين G و G'.

لإثبات إنّ $\phi: G \to G'$ تماثل
الخطوة 1. أثبت إنّ ϕ تشاكل.
الخطوة 2. أثبت إنّ $Ker\ (\phi) = \{e\}$.
الخطوة 3. أثبت إنّ ϕترسل G بصورة غامرة إلى G'.

بيّنت المبرهنة 15.13 إنّ نواة تشاكل الزمر $\phi: G \to G'$ هي زمرة جزئية H من G، التي مجموعات مشاركتها اليسرى واليمنى متطابقة، وعليه، $gH = Hg$ لكل $g \in G$. سنرى في الفصل 14 أنه عندما تتطابق مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى، فيمكننا تشكيل زمرة مجموعات مشاركة، كما نوقشت بصورة بدهية في الفصل 10، إضافة إلى ذلك، سنرى إنّ H ستظهر وبطريقة طبيعية بوصفها نواة تشاكل لـ G وبصورة غامرة لهذه الزمرة من مجموعات المشاركة، وتعدّ مثل تلك الزمرة الجزئية H، التي تتطابق مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لها، مفيدة جدًا في دراسة الزمر، وَسَتُعْطى اسمًا خاصًا، وسوف نتعامل معها كثيرًا في الفصل 14.

■ نبذة تاريخية

قُدِّمت الزمر الجزئية الناظمية من قبل إيفرست جالوا **(Evariste Galois)** عام 1831م بوصفها وسيلة للحكم فيما إذا كانت معادلة كثيرة حدود قابلة للحل عن طريق الجذور، فقد لاحظ جالوا إنّ الزمرة الجزئية H لزمرة تباديل G، أحدثت تحليلين لـ G، وهما ما نسميهما مجموعات المشاركة اليسرى ومجموعات المشاركة اليمنى، فإذا تطابق التحليلان – أي إنّ مجموعات المشاركة اليسرى هي مجموعات المشاركة اليمنى نفسها – فيسمي جالوا التحليل فعليًا، وعليه، فإنّ الزمرة الجزئية التي تعطي تحليلاً فعليًا هي التي نطلق عليها الزمرة الجزئية الناظمية، وقد ذكر جالوا، أنه إذا كانت زمرة تباديل الجذور لمعادلة لها تحليل فعلي، فيمكننا حلّ المعادلة المعطاة إذا استطعنا أولاً حل معادلة تقابل الزمرة الجزئية H، ثمَّ معادلة تقابل مجموعات المشاركة.

توسع كامايل جوردن **(Camille Jordan)** في هذه الأفكار إلى حدٍّ بعيد في تعليقاته على عمل جالوا عامي 1865م و 1869م، فقد عَرَّف هو أيضًا الزمر الجزئية الناظمية، على الرغم من عدم استخدامه للمصطلح بصورة أساسية مثلما هو في هذه الصفحة، وأعطى بطريقة مماثلة أول تعريف للزمرة البسيطة (صفحة 149).

19.13 تعريف الزمرة الجزئية H من زمرة G **ناظمية (normal)**، إذا كانت مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى متطابقة، أي إنّ $gH = Hg$ لكل $g \in G$. ■

لاحظ إنّ الزمر الجزئية للزمر الإبدالية جميعها ناظمية.

20.13 نتيجة إذا كان $\phi\colon G \rightarrow G'$ تشاكل زمر، فإنّ $Ker\ (\phi)$ زمرة جزئية ناظمية من G.

البرهان هذه تنتج مباشرة من الجملة الأخيرة في نصّ المبرهنة 15.13 ومن التعريف 19.13. ♦

لأي تشاكل زمرٍ $\phi\colon G \rightarrow G'$، شيئان لهما أهمية أولية، هما: نواة ϕ، والصورة $\phi[G]$ لـِ G في G'، وقد أظهرنا أهمية $Ker\ (\phi)$، وسوف يشير الفصل 14 إلى أهمية الصورة $\phi[G]$، حيث يطلب التمرين 44 إثبات أنه إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ $|\phi[G]|$ منتهٍ وقاسم لـِ $|G|$.

■ تمارين 13

حسابات

في التمارين من 1 إلى 15، حدد فيما إذا كانت الدالة المعطاة ϕ تشاكلًا، (مساعدة: الطريق المباشر للاستمرار هو بفحص فيما إذا كان $\phi(ab) = \phi(a)\ \phi(b)$ لكل a و b في مجال ϕ، على أي حال، إن حصل ولاحظنا إنّ الزمرة الجزئية $\phi^{-1}\ [\{e'\}]$ لا تتطابق فيها مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى، أو إنّ ϕ لا تحقق الخصائص المعطاة في التمرين (44 أو 45) للزمر المنتهية، فإنه يمكننا أن نقول مباشرة إنّ ϕ ليست تشاكلًا).

1. ليكن $\phi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع معطًى بـِ $\phi(n) = n$.

2. ليكن $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع معطًى بـِ $\phi(x) =$ أكبر عدد صحيح $\leq x$

3. ليكن $\phi\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب معطًى بـِ $\phi(x) = |x|$.

4. ليكن $\phi\colon \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ معطًى بـِ $\phi(x) =$ باقي قسمة x على 2، مثلما في خوارزمية القسمة.

5. ليكن $\phi\colon \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ معطًى بـِ $\phi(x) =$ باقي قسمة x على 2، مثلما في خوارزمية القسمة.

6. ليكن $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ حيث إنّ $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع و $\mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب معطًى بـِ $\phi(x) = 2^x$.

7. ليكن $\phi_i\colon G_i \longrightarrow G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_i \times \ldots \times G_r$ معطًى بـِ $\phi_i(g_i) = (e_1, e_2, \ldots, g_i, \ldots, e_r)$، حيث إنّ $g_i \in G_i$ و e_j هو العنصر المحايد في G_j، هذه هي دالة أحادية **(injection map)**، قارن بمثال (8.13).

8. لتكن G أي زمرة، وليكن $\phi\colon G \rightarrow G$ معطًى بـِ $\phi(g) = g^{-1}$، لـِ $g \in G$.

9. لتكن F زمرة الجمع للدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، والتي لها مشتقات من الرتب كلها، وليكن $\phi\colon F \rightarrow F$ معطًى بـِ $\phi(f) = f''$ – المشتقة الثانية لـِ f.

10. لتكن F زمرة الجمع لجميع الدوال المتصلة التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن $\phi\colon F \rightarrow \mathbb{R}$ معطًى بـِ

$$\phi(f) = \int_0^4 f(x)\,dx.$$

11. لتكن F زمرة الجمع لجميع الدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، وليكن $\phi\colon F \rightarrow F$ معطًى بـِ $\phi(f) = 3f$.

12. لتكن M_n زمرة الجمع للمصفوفات من الدرجة $n \times n$ بمدخلات حقيقية، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن $\phi(A) = det\,(A)$، محددة A لـ $A \in M_n$.

13. لتكن M_n و $\mathbb{R}$ مثلما في التمرين 12، وليكن $\phi(A) = \mathrm{tr}\,(A)$ لـ $A \in M_n$، حيث إنّ الأثر **(trace)** $\mathrm{tr}(A)$، هو مجموع العناصر على القطر الرئيس لـ A، من أعلى اليسار إلى زاوية أسفل اليمين.

14. لتكن $GL\,(n, \mathbb{R})$ زمرة الضرب للمصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن $\phi\colon GL\,(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ معطًى بـ $\phi(A) = \mathrm{tr}\,(A)$، حيث عُرِّفَ $\mathrm{tr}\,(A)$ في التمرين 13.

15. لتكن F زمرة الضرب للدوال المتصلة كلها التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، والتي لا تكون صفرًا عند أي $x \in \mathbb{R}$، ولتكن $\mathbb{R}^*$ زمرة الضرب للأعداد الحقيقية غير الصفرية، وليكن $\phi\colon F \to \mathbb{R}^*$ معطًى بـ $\phi(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

في التمارين من 16 إلى 24، احسب الكميات المحددة للتشاكل المعطى ϕ. (انظر التمرين 46).

16. $Ker\,(\phi)$ لـ $\phi\colon S_3 \to \mathbb{Z}_2$ في المثال 3.13.

17. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(25)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$ حيث إنّ $\phi(1) = 4$.

18. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(18)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ حيث إنّ $\phi(1) = 6$.

19. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(20)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z} \to S_8$ حيث إنّ $\phi(1) = (1,4,2,6)(2,5,7)$.

20. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(3)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{20}$ حيث إنّ $\phi(1) = 8$.

21. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(14)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_8$ حيث إنّ $\phi(1) = (2,5)(1,4,6,7)$.

22. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(-3,2)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث إنّ $\phi(1,0) = 3$ و $\phi(0,1) = -5$.

23. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(4,6)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حيث إنّ $\phi(1,0) = (2,-3)$ و $\phi(0,1) = (-1,5)$.

24. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(3,10)$ لـ $\phi\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to S_{10}$، حيث إنّ $\phi(1,0) = (3,5)(2,4)$ و $\phi(0,1) = (1,7)(6, 10, 8, 9)$.

25. كم تشاكلًا يوجد من $\mathbb{Z}$ وبصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}$؟

26. كم تشاكلًا يوجد من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$؟

27. كم تشاكلًا يوجد من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_2$؟

28. لتكن G زمرة، وليكن $g \in G$، وليكن $\phi_g\colon G \to G$ معرفًا بـ $\phi_g(x) = gx$ لـ $x \in G$ لأي $g \in G$، ϕ_g تشاكل؟

29. لتكن G زمرة، وليكن $g \in G$، وليكن $\phi_g\colon G \to G$ معرفًا بـ $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ لـ $x \in G$ لأي $g \in G$، ϕ_g تشاكل؟

مفاهيم

في التمرينين 30 و31 صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب- هذا إن كانت هناك حاجة إلى التصحيح - بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

30. *التشاكل* هو دالة، حيث إنّ $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

31. ليكن $\phi\colon G \to G'$ تشاكلاً لزمر. *النواة* لـ ϕ هي $\{x \in G \mid \phi(x) = e'\}$، حيث إنّ e' هو المحايد

في G'.

32. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. A_n زمرة جزئية ناظمية من S_n.

________ ب. لأي زمرتين G و G' يوجد تشاكل من G إلى G'.

________ جـ. كل تشاكل هو أحادي.

________ د. التشاكل هو أحادي إذا وفقط إذا كانت نواته تتألف فقط من العنصر المحايد.

________ هـ. الصورة لزمرة من 6 عناصر بالنسبة إلى تشاكل ما يمكن أن تتألف من 4 عناصر. (انظر التمرين 44).

________ و. الصورة لزمرة من 6 عناصر بالنسبة إلى تشاكل ما يمكن أن تتألف من 12 عنصرًا.

________ ز. يوجد تشاكل لزمرة ما من 6 عناصر إلى زمرة ما من 12 عنصرًا.

________ ح. يوجد تشاكل لزمرة ما من 6 عناصر إلى زمرة ما من 10 عناصر.

________ ط. يمكن أن تكون نواة التشاكل فارغة.

________ ي. من غير الممكن أن يكون لدينا تشاكل غير تافه لزمرة ما منتهية إلى زمرة ما غير منتهية.

في التمارين من 33 إلى 43، أعطِ مثالًا لتشاكلٍ غير تافه ϕ للزمر المعطاة، إذا توافر مثالٌ . إذا لم يتوافر تشاكل كهذا، ففسّر سبب ذلك، يمكنك استخدام التمرينين 44 و 45.

33. $\phi: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$

34. $\phi: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$

35. $\phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$

36. $\phi: \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}$

37. $\phi: \mathbb{Z}_3 \longrightarrow S_3$

38. $\phi: \mathbb{Z} \longrightarrow S_3$

39. $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$

40. $\phi: 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

41. $\phi: D_4 \longrightarrow S_3$

42. $\phi: S_3 \longrightarrow S_4$

43. $\phi: S_4 \longrightarrow S_3$

براهين

44. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمرٍ. أثبت أنه إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ $|\phi[G]|$ منتهٍ وقاسم لـِ $|G|$.

45. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر. أثبت أنه إذا كان $|G'|$ منتهيًا، فإن $|\phi[G]|$ منتهٍ وقاسم لـِ $|G'|$.

46. لتكن الزمرة G متولدة من $\{a_i \mid i \in I\}$، حيث I هي مجموعة دليلٍ ما و $a_i \in G$ لكل $i \in I$ وليكن $\phi: G \to G'$ و $\mu: G \longrightarrow G'$ تشاكلين من G إلى زمرة G'، حيث إنّ $\phi(a_i) = \mu(a_i)$ لكل $i \in I$. أثبت إنّ $\phi = \mu$. [مثلاً: التشاكل لزمرة دورية يحدد بصورة كاملة من خلال قيمه على مولد للزمرة.]، [مساعدة: استخدم المبرهنة 6.7، وبالطبع التعريف 1.13].

47. أثبت إنّ أي تشاكل زمر $\phi: G \to G'$، بحيث إنّ $|G|$ أولي، إما أن يكون تشاكلًا تافهًا أو دالة أحادية.

48. **الإشارة لتبديل زوجي (sign of an even permutation) هي $+1$، والإشارة لتبديل فردي (sign of an odd permutation) هي -1.** لاحظ إنّ الدالة $sgn_n: S_n \longrightarrow \{1, -1\}$ المعرفة بـِ

$$sgn_n(\sigma) = \sigma \text{ إشارة}$$

هي تشاكل من S_n وبصورة غامرة إلى زمرة الضرب $\{1 , -1\}$. ما النواة؟ قارن بالمثال (3.13).

49. أثبت أنه إذا كانت G، و G' و G'' زمرًا، وإذا كان $\phi: G \to G'$ و $\gamma: G' \longrightarrow G''$ تشاكلين، فإنّ دالة التركيب $\gamma\phi: G \to G''$ هي تشاكل.

50. ليكن $\phi: G \to H$ تشاكل زمرٍ. أثبت إنّ $\phi[G]$ إبدالية إذا وفقط إذا كان لكل $x, y \in G$ لدينا $xyx^{-1}y^{-1} \in Ker(\phi)$.

51. لتكن G أي زمرة، وليكن a أي عنصر من G، وليكن $\phi: \mathbb{Z} \longrightarrow G$ معرفًا بـِ $\phi(n) = a^n$. فأثبت إنّ ϕ تشاكل، وصِف الصورة والاحتمالات الممكنة لنواة ϕ.

52. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكلاً نواته H، وليكن $a \in G$. أثبت تساوي المجموعتين $\{x \in G \mid \phi(x) = \phi(a)\} = Ha$.

53. لتكن G زمرة، وليكن $h, k \in G$. وليكن $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$ معرفًا بـِ $\phi(m,n) = h^m k^n$. أعطِ شرطًا ضروريًّا وكافيًا – يتضمن h و k – ليكون ϕ تشاكلًا، ثمّ أثبت الشرط الذي أعطيته.

54. أوجد شرطًا ضروريًّا وكافيًا على G، حيث إنّ الدالة ϕ المذكورة في التمرين السابق تشاكل لكل الاختيارات لـِ $h, k \in G$.

55. لتكن G زمرة، و h عنصرًا من G و n عددًا صحيحًا موجبًا، وليكن $\phi: \mathbb{Z}_n \to G$ معرفًا بـِ

$\phi(i) = h^i$ لـِ $0 \leq i \leq n$. أعْطِ شرطًا ضروريًّا وكافيًا (بدلالة h و n) لـِ ϕ ليكون تشاكلاً. أثبت ما أعطيته.

زمر العامل Factor Groups

لتكن H زمرة جزئية من زمرة منتهية G، افترض أننا كتبنا جدولًا لعملية الزمرة على G، بسرد عناصر رؤوس في الأعلى وعلى اليسار مثلما تظهر في مجموعات المشاركة اليسرى لـ H، وقد وضحنا ذلك في الفصل 10، فيمكن أن يُقَسَّم جسم الجدول إلى وحدات **(blocks)** تقابل مجموعات المشاركة (الجدول 5.10)، ومعطيًا عملية زمرة على مجموعات المشاركة، أو عدم تقسيمه بتلك الطريقة (الجدول 9.10). يبدأ هذا الفصل بإثبات أنه إذا كانت H نواة تشاكل زمر $\phi: G \to G'$، فإن مجموعات المشاركة لـ H، هي في الواقع عناصر زمرة عمليتها الثنائية اشتقت من عملية الزمرة G (تذكر إنّ مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى من ثم متطابقة).

زمر العامل من التشاكلات

لتكن G زمرة، ولتكن S مجموعة لها عدد عناصر G نفسه، عندئذ، يوجد تقابل أحادي $\leftrightarrow$ بين S و G، يمكننا استخدام $\leftrightarrow$ لتعريف عملية ثنائية على S، بجعل S زمرة تماثل G، وببساطة، نستخدم التقابل لإعادة تسمية كل عنصر في G باسم العنصر الذي يقابله (بالنسبة إلى $\leftrightarrow$) في S، حيث يمكننا أن نصف، وبصورة واضحة حساب xy لـ $x, y \in S$ كما يأتي:

$$\text{إذا كان } x \leftrightarrow g_1 \text{ و } y \leftrightarrow g_2 \text{ و } z \leftrightarrow g_1g_2\text{، فإنّ } xy = z \tag{1}$$

يعطينا الاتجاه $\longrightarrow$ في التقابل الأحادي $g \leftrightarrow s$ بين $s \in S$ و $g \in G$ دالة أحادية μ، ترسل S بصورة غامرة إلى G، (طبعًا، الاتجاه $\longleftarrow$ من $\leftrightarrow$ يعطينا دالة معاكسة μ^{-1})، وبالتعبير بدلالة μ، الحسابات (1) لـ xy للعنصرين $x,y \in S$ تصبح

$$\text{إذا كان } \mu(x) = g_1 \text{ و } \mu(y) = g_2 \text{ و } \mu(z) = g_1g_2\text{، فإن } xy = z \tag{2}$$

الدالة $\mu: S \to G$ تصبح الآن تماثلًا يرسل الزمرة S بصورة غامرة إلى الزمرة G، لاحظ أنه من (2) نحصل على $\mu(xy) = \mu(z) = g_1g_2 = \mu(x)\mu(y)$، خاصية التشاكل المطلوبة.

لتكن G و G' زمرتين، وليكن $\phi: G \to G'$ تشاكلًا، ولتكن $H = Ker(\phi)$، تبين المبرهنة 15.13 أنه لـ $a \in G$ لدينا $\phi^{-1}[\{\phi(a)\}] = aH = Ha$، ولدينا تقابل أحادي $aH \leftrightarrow \phi(a)$ بين مجموعات المشاركة لـ H من G، وعناصر الزمرة الجزئية $\phi[G]$ من G'، تذكر أنه إذا كان $x \in aH$، حيث إنّ $x = ah$ لعنصر ما $h \in H$، فإن:

$$\phi(x) = \phi(ah) = \phi(a)\,\phi(h) = \phi(a)e' = \phi(a)$$

وهكذا حسابات العنصر من $\phi[G]$ الذي يقابل مجموعة المشاركة $aH = xH$ هو نفسه، سواء حسبناه على النحو $\phi(a)$، أو على النحو $\phi(x)$. لنرمز لمجموعة مجموعات المشاركة لـ H بـ G/H (تُقرأ G/H على النحو "G فوق H" أو " G مقياس H"، لكن لا تقرأ على النحو "قسمة G على H").

بدأنا في الفقرة السابقة بتشاكل $\phi: G \to G'$ نواته H وانتهينا بـ G/H مجموعة مجموعات المشاركة كلها في تقابل أحادي مع عناصر الزمرة $\phi[G]$. من خلال عملنا في الأعلى

لدينا مجموعة S عناصرها في تقابل أحادي مع عناصر الزمرة G، فجعلنا S زمرة تماثل الزمرة G من خلال دالة التماثل μ، وفي ذلك البناء، يمكننا استبدال S بـ G/H واستبدال G بـ $\phi[G]$، ويمكننا أن نَعُدّ G/H تماثل الزمرة $\phi[G]$، من خلال ذلك التماثل μ، وبدلالة G/H و $\phi[G]$، تصبح الحسابات (2) للضرب $(xH)\ (yH)$ لـ $xH, yH \in G/H$ على النحو الآتي:

إذا كان $\mu(xH) = \phi(x)$ و $\mu(yH) = \phi(y)$ و $\mu(zH) = \phi(x)\ \phi(y)$ فإن:

$$(xH)\ (yH) = zH. \tag{3}$$

ولأن ϕ تشاكل، فيمكننا بسهولة إيجاد $z \in G$ بحيث إنّ $\mu(zH) = \phi(x)\ \phi(y)$، أي نأخذ $z = xy$ في G ونجد إنّ:

$$\mu(zH) = \mu(xyH) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

هذه تثبت إنّ الضرب $(xH)\ (yH)$ لمجموعتي المشاركة، هو مجموعة المشاركة $(xy)H$ التي تحوي الضرب xy لـ x و y في G، بينما يمكن أن يبدو الحساب لـ $(xH)\ (yH)$ أنه يعتمد على اختيارنا لـ x من xH و y من yH، حيث إنّ عَمَلنا في الأعلى يُظْهِرُ غير ذلك، ونظهرها بوضوح مرة أخرى؛ لأنها نقطة بالغة الأهمية، فإذا كان $h_1, h_2 \in H$، حيث إنّ xh_1 عنصر من xH و yh_2 هو عنصر من yH، فإنه يوجد $h_3 \in H$، بحيث إنّ $h_1\ y = y\ h_3$؛ لأن $Hy = yH$، من خلال المبرهنة 15.13، وعليه لدينا:

$$(xh_1)(yh_2) = x(h_1y)h_2 = x(yh_3)h_2 = (xy)(h_3h_2) \in (xy)\ H,$$

هكذا حصلنا على مجموعة المشاركة نفسها، ويتمّ حساب ضرب مجموعتي مشاركة باختيار عنصر من كل مجموعة مشاركة، وأخذ – كضرب مجموعات مشاركة – مجموعة المشاركة التي تحتوي على حاصل الضرب في G للاختيارات، أي وقت نُعَرِّفُ فيه شيئًا ما (مثل الضرب) بدلالة الاختيارات، فمن المهم إثبات أنه **حسن التعريف (well defined)** الذي يعني أنه مستقل عن الاختيارات التي حصلت، وهذا بالضبط ما فعلناه قبل قليل، وإليك تلخيص هذا العمل في مبرهنة:

1.14 مبرهنة ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر نواته H، عندئذٍ، مجموعات المشاركة لـ H **تشكِّل زمرة عامل (factor group)** – G/H – حيث $(aH)\ (bH) = (ab)H$، والدالة $\mu: G/H \to \phi[G]$ المعرفة بـ $\mu\ (aH) = \phi(a)$ هي أيضًا تماثل، كل من ضرب مجموعات المشاركة و μ حسنا التعريف، ومستقلان عن الاختيارات a و b من مجموعات المشاركة.

2.14 مثال ناقش المثال 10.13 الدالة $\gamma: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$، حيث $\gamma(m)$ تمثل باقي قسمة m على n وفقًا لخوارزمية القسمة، ونعلم إنّ γ تشاكل، وبالطبع $Ker\ (\gamma) = n\mathbb{Z}$، ومن خلال المبرهنة 1.14 نرى إنّ زمرة العامل $\mathbb{Z}/n\ \mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_n$، ومجموعات المشاركة لـ $n\mathbb{Z}$ **هي صفوف البواقي مقياس n (residue classes modulo n)** فمثلاً: بأخذ $n = 5$ نرى إنّ مجموعات المشاركة لـ $5\mathbb{Z}$، هي

$$5\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\},$$

$$1 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\},$$

$$2 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\},$$

$$3 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\},$$

$$4 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.$$

لاحظ إنّ التماثل $\mu: \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ للمبرهنة 1.14 يُعَيِّنُ لكل مجموعة مشاركة لـِ $5\mathbb{Z}$ أصغر عناصرها غير السالبة، أي إنّ $\mu(5\mathbb{Z}) = 0$ ، $\mu(1+5\mathbb{Z}) = 1$، ...إلخ. ▲

مـن المهـم جدًّا أن نكون قد تعلمنا كيف نحسب في زمرة العامـل، ويمكننا ضرب (جمع) مجموعتـي مشـاركة بـاختيـار أي عنصريـن ممثلـين، ثـم ضربهما (جمعهمـا)، وإيجـاد مجموعة المشاركة التي يقع ناتج الضرب (الجمع) فيها.

3.14 مثال لتكـن زمـرة العامـل $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ لمجموعـات المشـاركة الظاهـرة في الأعلـى، فيمكننـا جمـع $(4+5\mathbb{Z}) + (2+5\mathbb{Z})$ بـاختيـار 2 و 4، وإيجـاد $6 = 4 + 2$، وملاحظة إنّ 6 في مجموعة المشاركة $1+5\mathbb{Z}$، بإمكاننا بصورة مماثلة مقبولة جمع مجموعتي المشاركة هاتين باختيار 27 في $2+5\mathbb{Z}$ و 16- في $4+5\mathbb{Z}$؛ المجموع $27 + (-16) = 11$ أيضًا في مجموعة المشاركة $1+5\mathbb{Z}$. ▲

إنّ زمـرة العامل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ في المثـال السابق تقليدية، تَذَكَّر أننا نشير إلى مجموعات المشاركة لـ $n\ \mathbb{Z}$ على أنها صفوف بواقي مقياس n، حيث إنّ عددين صحيحين في مجموعة المشاركة نفسها، هما متطابقان مقياس n، وقد رُحِّلَت هـذه الاصطلاحات لزمر العامل الأخرى، وتسمى زمرة العامل G / H عادة **زمرة العامل لـ (factor group of)** G **مقياس (modulo)** H، أمّا العناصر في مجموعة المشاركة نفسها لـ H، فيقال عادة: إنها **متطابقة مقياس (congruent modulo)** H، وبالتساهل في استعمال الرمز، يمكننا كتابة $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ ، ونفكر في $\mathbb{Z}_n$ بوصفها زمرة جمع لصفوف البواقي لـِ $\mathbb{Z}$ مقياس $\langle n \rangle$، أو بالتساهل أكثر مقياس n.

زمر العامل من زمر جزئية ناظمية

حصلنا حتى الآن على زمر عامل فقط من تشاكلات، لتكن G زمرة، ولتكن H زمرة جزئية من G، الآن H لها مجموعات مشاركة يسرى ومجموعات مشاركة يمنى – وبوجه عام – مجموعة المشاركة اليسرى aH ليس بالضرورة أن تكون مجموعة المشاركة اليمنى Ha نفسها، افترض أننا نحاول تعريف عملية ثنائية على مجموعات المشاركة اليسرى، وذلك بتعريف

$$(aH)(bH) = (ab)H \qquad (4)$$

مثلما هو في نص المبرهنة 1.14، المعادلة (4) تحاول تعريف ضرب مجموعات مشاركة يسرى باختيار مُمَثِّلَيْن a و b من مجموعات المشاركة، فهذه المعادلة لا معنى لها إلا إذا أعطت عملية حسنة التعريف، بالاستقلالية عن العناصر الممثلة المختارة a و b من مجموعات المشاركة، تبين المبرهنة الآتية إنّ المعادلة (4) تعطي عملية ثنائية حسنة التعريف إذا وفقط إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G.

4.14 مبرهنة لتكن H زمرة جزئية من زمرة G، عندئذٍ، ضرب مجموعات المشاركة اليسرى حسن التعريف من خلال المعادلة:

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

إذا وفقط إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G.

البرهان أولاً افترض إنّ $(aH)(bH) = (ab)H$ تعطي عملية ثنائية حسنة التعريف على مجموعات المشاركة اليسرى، ليكن $a \in G$، نريد إثبات إنّ aH و Ha هما المجموعة نفسها، سنستخدم الأسلوب التقليدي في إثبات إنّ كلّ مجموعة هي مجموعة جزئية من الأخرى.

ليكن $x \in aH$، وباختيار مُمَثِّلين $x \in aH$ و $a^{-1} \in a^{-1}H$ نحصل على $(xH)(a^{-1}H) = (xa^{-1})H$، ومن الجهة الأخرى، نرى باختيار مُمَثِّلَين $a \in aH$ و $a^{-1} \in a^{-1}H$ إنّ $(aH)(a^{-1}H) = eH = H$، وباستخدام الفرضية إنّ ضرب مجموعات المشاركة اليسرى من خلال الممثلين حسن التعريف، نحصل على $xa^{-1} = h \in H$، وعليه، $x = ha$، وهكذا $x \in Ha$ و $aH \subseteq Ha$، نترك البرهان المماثل لـ $Ha \subseteq aH$ للتمرين 25.

ومن الناحية الأخرى، إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية، فإنّ ضرب مجموعات المشاركة اليسرى من خلال الممثلين حسن التعريف، وبناءً على فرضيتنا، يمكننا ببساطة قول مجموعة مشاركة بحذف عبارتي يسرى و يمنى، افترض أننا نرغب في حساب $(aH)(bH)$، فباختيار $a \in aH$ و $b \in bH$ نحصل على مجموعة المشاركة $(ab)H$، وباختيار مُمَثِّلَين مختلفين $ah_1 \in aH$ و $bh_2 \in bH$ نحصل على مجموعة المشاركة ah_1bh_2H، يجب أن نثبت أنها مجموعة المشاركة نفسها، الآن $h_1b \in Hb = bH$ وهكذا $h_1b = bh_3$ لعنصر ما $h_3 \in H$، وعليه:

$$(ah_1)(bh_2) = a(h_1b)h_2 = a(bh_3)h_2 = (ah)(h_3h_2)$$

و $(ab)(h_3h_2) \in (ab)H$؛ لذلك ah_1bh_2 في $(ab)H$ ♦

تبين المبرهنة 4.14، أنه إذا تطابقت مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لـ H، فإن المعادلة (4) تعطي عملية ثنائية حسنة التعريف على مجموعات المشاركة، نتساءل فيما إذا كانت مجموعات المشاركة تُشكِّلُ زمرة مع مثل هذا الضرب لمجموعات المشاركة. والجواب أن ذلك صحيح بالفعل.

5.14 نتيجة لتكن H زمرة جزئية ناظمية من G، عندئذٍ، مجموعات المشاركة لـ H تشكل زمرة G/H بالنسبة إلى العملية الثنائية $(aH)(bH) = (ab)H$. ▲

البرهان بحساب، $(aH)[(bH)(cH)] = (aH)[(bc)H] = [a(bc)]H$، وبالمثل لدينا $[(aH)(bH)](cH) = [(ab)c]H$ وعليه، التجميعية في G/H تنتج من التجميعية في G. لإنّ $(aH)(eH) = (ae)H = aH = (ea)H = (eH)(aH)$، نرى إنّ $eH = H$ هو العنصر المحايد في G/H، وأخيرًا $(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = (aa^{-1})H = (aH)(a^{-1}H)$ تُبَيِّن إنّ $a^{-1}H = (aH)^{-1}$.
♦

6.14 تعريف الزمرة G/H في النتيجة السابقة هي زمرة العامل **(factor group)** (أو زمرة خارج القسمة **(quotient group)**) لـ G من خلال H. ■

7.14 مثال لإنّ $\mathbb{Z}$ زمرة إبدالية و $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية ناظمية، فالنتيجة 5.14 تمكننا من بناء زمرة العامل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ دون الرجوع إلى التشاكل، مثلما لاحظنا في المثال 2.14، $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_n$.

8.14 مثال لتكن $\mathbb{R}$ الزمرة الإبدالية بالنسبة إلى الجمع، ولتكن $c \in \mathbb{R}^+$. الزمرة الجزئية الدورية $\langle c\rangle$ من $\mathbb{R}$، تحوي عناصر مثل:

$$\cdots -3c, -2c, -c, 0, c, 2c, 3c, \cdots.$$

كلّ مجموعة مشاركة لـ $\langle c\rangle$ تحتوي فقط على عنصر واحد x، بحيث إنّ $0 \leq x < c$، وإذا اخترنا عند الحساب في $\mathbb{R}/\langle c\rangle$ هذه العناصر بوصفها ممثلة لمجموعات المشاركة، سنجد أننا نحسب نواتج جمعها مقياس c، كما نوقشت للحسابات في $\mathbb{R}_c$ في الفصل 1، على سبيل المثال: إذا كانت $c = 5.37$، فإن جمع مجموعتي المشاركة $\langle 5.37\rangle + 4.65$ و $\langle 5.37\rangle + 3.42$ هو مجموعة المشاركة $\langle 5.37\rangle+8.07$، التي تحوي $8.07 - 5.37 = 2.7$، التي هي $3.42 +_{5.37} 4.65$ وبالعمل مع هذه العناصر x لمجموعات المشاركة، حيث $0 \leq x < c$ نرى إنّ الزمرة $\mathbb{R}_c$ في المثال 4.2 تماثل $\mathbb{R}/\langle c\rangle$ بالنسبة إلى التماثل ψ، حيث $\psi(x) = x + \langle c\rangle$ لكل $x \in \mathbb{R}_c$، وبالتأكيد، $\mathbb{R}/\langle c\rangle$ هي أيضًا تُماثل زمرة الدائرة U للأعداد المركبة بمقدار 1 بالنسبة إلى الضرب. ▲

رأينا إنّ الزمرة $\mathbb{Z}/\langle n\rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_n$ (وكمجموعة $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,3,4,\ldots,n-1\}$ أي هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة الأقل من n)، بيّن المثال 8.14 إنّ الزمرة $\mathbb{R}/\langle c\rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{R}_c$، وقد اخترنا في الفصل 1 الرمز $\mathbb{R}_c$ بدلًا من المعروف $[0,c]$ للفترة نصف المفتوحة للأعداد الحقيقية غير السالبة الأقل من c. فعلنا ذلك لنوضح الآن المقارنة بين زمر العامل من $\mathbb{Z}$ وزمر العامل من $\mathbb{R}$.

مبرهنة التشاكل الأساسية

رأينا إنّ كل تشاكل $\phi: G \to G'$ يكون باعثاً لزمرة عامل طبيعية (المبرهنة 1.14) تسمى $G/Ker(\phi)$، وسنثبت الآن إنّ كل زمرة عامل G/H ستكون باعثةً لتشاكل طبيعي نواته H.

9.14 مبرهنة لتكن H زمرة جزئية ناظمية من G، عندئذٍ: $\gamma: G \to G/H$ المعطى بـِ $\gamma(x) = xH$ هو تشاكل نواته H.

البرهان ليكن $x,y \in G$، عندئذٍ:

$$\gamma(xy) = (xy)H = (xH)(yH) = \gamma(x)\gamma(y),$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \phi[G] \\
& G/H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

الشكل 10.14

وعليه، فإنّ γ تشاكل؛ لإنّ $xH = H$ إذا وفقط إذا كان $x \in H$، نرى إنّ نواة γ هي في الواقع H.

♦

وجدنا في المبرهنة 1.14 أنه إذا كان $\phi: G \to G'$ تشاكلاً نواته H، فإنّ $\mu: G/H \to \phi[G]$

حيث إنّ $\mu(gH) = \phi(g)$ تشاكل، وتبين المبرهنة 9.14 إنّ التشاكل $\gamma: G \to G / H$ المعرف بـِ $\gamma (g) = gH$ هو تشاكل، حيث يبين الشكل 10.14 هذه الزمر والدوال، نرى إنّ التشاكل ϕ يمكن تحليله **(factored)** $\phi = \mu.\gamma$، حيث إنّ γ تشاكل، و μ تماثل لـِ G/H مع $\phi[G]$. نذكر هذه على شكل مبرهنة.

11.14 مبرهنة (مبرهنة التشاكل الأساسية) **(The Fundamental Homomorphism Theorem)**:
ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر نواته H، عندئذٍ: $\phi[G]$ زمرة، و $\mu: G/H \to \phi[G]$ المعطى بـ $\mu(gH) = \phi(g)$ هو تماثل، فإذا كان $\gamma: G \to G / H$ هو التماثل المعطى بـِ $\gamma(g) = gH$، فإنّ $\phi (g) =\mu \gamma (g)$ لكل $g \in G$.

يُشار إلى التماثل μ في المبرهنة 11.14 بوصفه تماثلًا طبيعيًا أو قانونيًا **(natural or canonical)**، والأوصاف نفسها استخدمت لوصف التشاكل γ، ومن الممكن أن يكون هناك تشاكلات وتماثلات أخرى للزمر نفسها، لكن الدوال μ و γ لها وضع خاص مع ϕ، وحُددت بصورة وحيدة من خلال المبرهنة 11.14.

يمكن تلخيص ما سبق بالآتي: يكون كل تشاكل مجاله G باعثًا لزمرة عامل G/H، وتكون كل زمرة عامل G/H باعثة لتشاكل يرسل G إلى G / H، والتشاكلات وزمر العامل مرتبطة ببعضها إلى حدٍّ بعيد، والمثال الآتي يبين إلى أي حدٍّ يمكن أن تكون هذه العلاقة مفيدة.

12.14 مثال صنّف الزمرة $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/(\{0\} \times \mathbb{Z}_2)$ وفقًا للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (المبرهنة 12.11).

الحل دالة الإسقاط $\pi_1: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$، والمعطاة بـِ $\pi_1 (x,y) = x$ هي تشاكل من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$، وبصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}_4$ نواتها $\{0\} \times \mathbb{Z}_2$، نعلم من خلال المبرهنة 11.14 إنّ زمرة العامل المعطاة تماثل $\mathbb{Z}_4$. ▲

الزمر الجزئية الناظمية والتماثلات الذاتية الداخلية

نشتق بعض التصنيفات البديلة للزمر الجزئية الناظمية، التي تزوّدنا عادة بطريقة أسهل لاختبار الناظمية، بدل إيجاد كلا التحليلين لمجموعات المشاركة اليسرى واليمنى.

افترض إنّ H هي زمرة جزئية من G، بحيث إنّ $ghg^{-1} \in H$ لكل $g \in G$ ولكل $h \in H$، عندئذٍ: $g H g^{-1} = \{g h g^{-1} \mid h \in H \} \subseteq H$ لكل $g \in G$، حيث ندعي حقيقة إنّ $g H g^{-1} = H$؛ لذا، يجب أن نثبت إنّ $H \subseteq g H g^{-1}$ لكل $g \in G$، ليكن $h \in H$، وباستبدال g بـ g^{-1} في العلاقة $g h g^{-1} \in H$ نحصل على $g^{-1}h (g^{-1})^{-1} = g^{-1} hg = h_1$، حيث $h_1 \in H$، بناءً على ذلك، $h = g h_1 g^{-1} \in g H g^{-1}$، أنجز المطلوب.

افترض إنّ $g H = H g$ لكل $g \in G$، عندئذٍ: $gh = h_1 g$، وهكذا $g h g^{-1} \in H$ لكل $g \in G$ ولكل $h \in H$. من خلال الفقرة السابقة، هذا يعني إنّ $g H g^{-1} = H$ لكل $g \in G$، في

المقابل، إذا كان $g\,H\,g^{-1} = H$ لكل $g \in G$، فإنّ $g\,h\,g^{-1} = h_1$، إذن، $gh = h_1 g \in Hg$ و $gH \subseteq Hg$. لكن $g^{-1}\,Hg = H$ تعطي أيضًا $g^{-1}hg = h_2$، وهكذا $hg = gh_2$ و $Hg \subseteq gH$.

نلخص عملنا في المبرهنة الآتية:

13.14 مبرهنة فيما يأتي ثلاثة شروط متكافئة لتكون زمرة جزئية H من زمرة G، زمرة جزئية ناظمية من G.

1. $ghg^{-1} \in H$ لكل $g \in G$ و $h \in H$.

2. $g\,Hg^{-1} = H$ لكل $g \in G$.

3. $g\,H = Hg$ لكل $g \in G$.

يؤخذ الشرط (2) في المبرهنة 13.14 عادة بوصفه تعريفًا للزمرة الناظمية H من زمرة G.

14.14 مثال كل زمرة جزئية H من زمرة إبدالية G ناظمية، ونحتاج فقط إلى ملاحظة إنّ $gh = hg$ لكل $h \in H$ ولكل $g \in G$، وعليه، – حقًّا – $gh\,g^{-1} = h \in H$ لكل $g \in G$ ولكل $h \in H$. ▲

يبين التمرين 29 للفصل 13 إنّ $i_g: G \to G$ المعرفة بـ $i_g\,(x) = gxg^{-1}$ دالة تشاكل من G إلى نفسها، ونرى إنّ $gag^{-1} = gbg^{-1}$ إذا وفقط إذا كان $a = b$، إذن، i_g أحادي؛ لأن $g\,(g^{-1}y\,g)g^{-1} = y$، نرى إنّ i_g غامر لـ G، وهكذا هو تماثل لـ G مع نفسها.

15.14 تعريف التماثل $\phi: G \to G$ لزمرة G مع نفسها يسمى **تماثل ذاتي (automorphism)** لـ G. والتماثل $i_g: G \to G$، حيث $i_g\,(x) = gxg^{-1}$ لكل $x \in G$ هو **التماثل الذاتي الداخلي لـ G (inner automorphism of)** من خلال g، ويسمى تنفيذ i_g على x **المرافق لـ x (conjugation of)** من خلال g. ■

يبين التكافؤ للشرطين (1) و (2) في المبرهنة 13.14 إنّ $gH = Hg$ لكل $g \in G$ إذا وفقط إذا كان $i_g[H] = H$ لكل $g \in G$، أي إذا وفقط إذا كانت H **غير متغيرة (invariant)** بالنسبة إلى التماثلات الذاتية الداخلية لـ G جميعها، ومن المهم أن نفهم بوضوح إنّ $i_g\,[H] = H$ هي معادلة مجموعات، وليس بالضرورة أن نحصل على $i_g(h) = h$ لكل $h \in H$، أي إنّ i_g يمكن أن يمثل تبديلاً غير تافه للمجموعة H، ونرى إنّ الزمر الجزئية الناظمية للزمرة G هي بالضبط تلك غير المتغيرة بالنسبة إلى التماثلات الذاتية الداخلية كلها، وزمرة جزئية K من G هي زمرة جزئية **مرافقة (a conjugate subgroup)** لـ H، إذا كان $K = i_g\,[H]$ لعنصر ما $g \in G$.

■ تمارين 14

حسابات

أوجد رتبة زمرة العامل المعطاة في التمارين من 1 إلى 8:

1. $\mathbb{Z}_6/\langle 3\rangle$

2. $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12})/(\langle 2\rangle\times\langle 2\rangle)$

3. $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2)/\langle(2,1)\rangle$

4. $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5)/(\{0\}\times\mathbb{Z}_5)$

5. $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4)/\langle(1,1)\rangle$

6. $(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{18})/\langle(4,3)\rangle$

7. $(\mathbb{Z}_2\times S_3)/\langle(1,\rho_1)\rangle$

8. $(\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{15})/\langle(1,1)\rangle$

أوجد رتبة العنصر في زمرة العامل في التمارين من 9 إلى 15:

9. $5+\langle 4\rangle$ في $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle$

10. $26+\langle 12\rangle$ في $\mathbb{Z}_{60}/\langle 12\rangle$

11. $(2,1)+\langle(1,1)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6)/\langle(1,1)\rangle$

12. $(3,1)+\langle(1,1)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)/\langle(1,1)\rangle$

13. $(3,1)+\langle(0,2)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8)/\langle(0,2)\rangle$

14. $(3,3)+\langle(1,2)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8)/\langle(1,2)\rangle$

15. $(2,0)+\langle(4,4)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_8)/\langle(4,4)\rangle$

16. احسب $i_{\rho_1}[H]$ للزمرة الجزئية $H=\{\rho_0,\mu_1\}$ من الزمرة S_3 للمثال 7.8 .

مفاهيم

في التمارين من 17 إلى 19 صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة إلى التصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

17. *الزمرة الجزئية الناظمية* H من G، هي التي تحقق $hG=Gh$ لكل $h\in H$.

18. *الزمرة الجزئية الناظمية* H من G، هي التي تحقق $g^{-1}hg\in H$ لكل $h\in H$ ولكل $g\in G$.

19. *التماثل الذاتي* لزمرة G، هو تشاكل يرسل G إلى G.

20. ما أهمية الزمرة الجزئية *الناظمية* من زمرة G؟

يكتب الطلاب عادة بصورة غير منطقية عند بداية إثباتهم لمبرهنات عن زمر العامل، وقد صُمّم التمرينان الآتيان للفت الانتباه إلى نوع واحد أساسي من الأخطاء.

21. سُئل طالب ليبرهن أنه إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من زمرة إبدالية G، فإنّ G/H إبدالية، وقد بدأ برهان الطالب كما يأتي:

يجب أن نثبت إنّ G / H إبدالية، ليكن a و b عنصرين من G/H.

أ. لماذا قراءة المحاضر لهذا البرهان تجعله يتوقع بعدها وجود أشياء غير منطقية في ورقة الطالب؟

ب. ماذا كان يجب على الطالب أن يكتب؟

جـ. أكمل البرهان.

22. زمرة الالتواء **(torsion group)** هي زمرة عناصرها جميعها لها رتب منتهية، والزمرة تكون عديمة الالتواء **(torsion free)** إذا كان العنصر المحايد فيها هو الوحيد ذو الرتبة المنتهية، سُئل طالب أن يبرهن أنه إذا كانت G زمرة ملتوية، فكذلك G / H للزمر الجزئية الناظمية جميعها H من G، فكَتَبَ الطالب: يجب أن نثبت إنّ كل عنصر في G / H رتبته منتهية، وليكن $x \in G / H$. أجب عن أسئلة التمرين 21 نفسها .

23. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. من المنطقي الحديث عن زمرة العامل G / N، إذا وفقط إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G.

______ ب. كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية G، هي زمرة جزئية ناظمية من G.

______ جـ. التماثل الذاتي الداخلي لزمرة إبدالية، يجب أن يكون فقط الدالة المحايدة.

______ د. كل زمرة عامل لزمرة منتهية، هي من جديد ذات رتبة منتهية.

______ هـ. كل زمرة عامل لزمرة التواء هي زمرة التواء. (انظر التمرين 22).

______ و. كل زمرة عامل لزمرة عديمة الالتواء، هي زمرة عديمة الالتواء. (انظر التمرين 22).

______ ز. كل زمرة عامل لزمرة إبدالية، هي زمرة إبدالية.

______ ح. كل زمرة عامل لزمرة غير إبدالية، هي زمرة غير إبدالية.

______ ط. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ دورية رتبتها n.

______ ي. $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ دورية رتبتها n، حيث $n\mathbb{R} = \{nr \mid r \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع.

براهين

24. أثبت إنّ A_n زمرة جزئية ناظمية من S_n، واحسب S_n/A_n، أي، أوجد زمرة معروفة، حيث S_n/A_n تماثلها.

25. أكمل برهـان المبرهنـة 4.14، بـإثبـات أنـه إذا كـانت H زمرة جزئيـة من زمرة G، وإذا كـان ضرب مجموعـات المشاركة اليسرى $(aH)(bH) = (ab)H$ حسن التعريف، فإنّ $Ha \subseteq aH$.

26. أثبت إنّ زمرة الالتواء الجزئية T من زمرة إبدالية G، هـي زمرة جزئية نـاظمية من G و G/T عديمة الالتواء. (انظر التمرين 22).

27. تكون الزمرة الجزئية H **مرافقة لزمرة جزئية (conjugate to a subgroup)** K من زمرة G، إذا وجد تماثل ذاتي داخلي i_g لـ G، حيث إن $i_g\,[H] = K$، أثبت إنّ الترافق هو علاقة تكافؤ على مجموعة الزمر الجزئية من G.

28. صَنِّف الزمر الجزئية النـاظمية من زمرة G، بدلالة الخلايا التي تظهر في التجزئة النـاتجة عن علاقة الترافق في التمرين السابق.

29. بـالرجوع إلى التمرين 27، أوجد الزمر الجزئية جميعها من S_3 (مثال 7.8) التي ترافق $\{\rho_0, \mu_2\}$.

30. لتكن H زمرة جزئية نـاظمية من زمرة G، وليكن $m = (G: H)$. فـأثبت إنّ $a^m \in H$ لكل $a \in G$.

31. أثبت إنّ تقـاطع زمر جزئية نـاظمية من زمرة G، هـو من جديد زمرة جزئية نـاظمية من G.

32. أُعطينا أي مجموعة جزئية S من زمرة G، أثبت أنه من المنطقي الحديث عن أصغر زمرة جزئية نـاظمية تحوي S. [مساعدة: استخدم التمرين 31].

33. لتكن G زمرة، والعنصر في G الذي يمكن أن يعبر عنه بـالصورة $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ لعنصرين $a, b \in G$ هو **مُبَدِّل (commutator)** في G، بيّن التمرين السابق وجود زمرة جزئية نـاظمية صغرى C من الزمرة G تحتوي على كل المُبَدِّلات في G، والزمرة الجزئية C هـي **زمرة المُبَدِّلات الجزئية (commutator subgroup)** من G. أثبت إنّ G/C زمرة إبدالية.

34. أثبت أنـه إذا كـانت G زمرة منتهية لها بـالضبط زمرة جزئية واحدة H ذات رتبة معطاة، فإنّ H زمرة جزئية نـاظمية من G.

35. أثبت أنـه إذا كـانت H و N زمرتين جزئيتين من زمرة G و N نـاظمية في G، فإنّ $H \cap N$ نـاظمية في H، وأثبت بمثـال إنّ $H \cap N$ ليست بـالضرورة نـاظمية في G.

36. لتكن G زمرة تحتوي على الأقل زمرة جزئية واحدة ذات رتبة منتهية ثـابتة s، فـأثبت إنّ تقـاطع الزمر الجزئية كلها من G ذات الرتبة s، هو زمرة جزئية نـاظمية من G. [مساعدة: استخدم الحقيقة أنه إذا كانت H رتبتها s، فكذلك $x^{-1}Hx$ لكل $x \in G$].

37. أ. أثبت إنّ التمـاثلات الذاتية كلها لزمرة G تُشَكِّل زمرة بـالنسبة إلى تركيب الدوال.

ب. أثبت إنّ التمـاثلات الذاتية الداخلية لزمرة G تشكّل زمرة جزئية نـاظمية من زمرة كل التمـاثلات الذاتية لـ G بـالنسبة إلى تركيب الدوال. [*تحذير:* تـأكد من إثبـات إنّ التمـاثلات الذاتية الداخلية تشكل زمرة جزئية].

38. أثبت إنّ مجموعة كل $g \in G$، بحيث إنّ $i_g: G \to G$ هو التمـاثل الذاتي الداخلي المحـايد i_e، هـي زمرة جزئية نـاظمية من الزمرة G.

39. لتكن G و G' زمرتين، ولتكن H و H' زمرتين جزئيتين نـاظميتين من G و G' على الترتيب،

وليكن ϕ تشاكلًا من G إلى G'، فأثبت أنه إذا كان $\phi[H] \subseteq H'$، فإنّ ϕ يُحْدِثُ تشاكلًا طبيعيًا $\phi_* : (G/H) \to (G'/H')$. (استخدمت هذه الحقيقة باستمرار في التبولوجيا الجبرية).

40. استخدم الخصائص $\det(I_n) = 1$ و $\det(AB) = \det(A).\ \det(B)$ للمصفوفات من الدرجة $n \times n$ في إثبات ما يأتي:

أ. المصفوفات من الدرجة $n \times n$ بمحددة 1 تشكل زمرة جزئية ناظمية من $GL(n, \mathbb{R})$.

ب. المصفوفات من الدرجة $n \times n$ بمحددة ± 1 تشكل زمرة جزئية ناظمية من $GL(n, \mathbb{R})$.

41. لتكن G زمرة، ولتكن $\mathscr{P}(G)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من G. فلأي $A, B \in \mathscr{P}(G)$ لنعرف ضرب المجموعات الجزئية $AB = \{a\,b \mid a \in A\,,\ b \in B\}$

أ. أثبت إنّ الضرب للمجموعات الجزئية تجميعي، وله عنصر محايد، لكن $\mathscr{P}(G)$ ليست زمرة بالنسبة إلى هذه العملية.

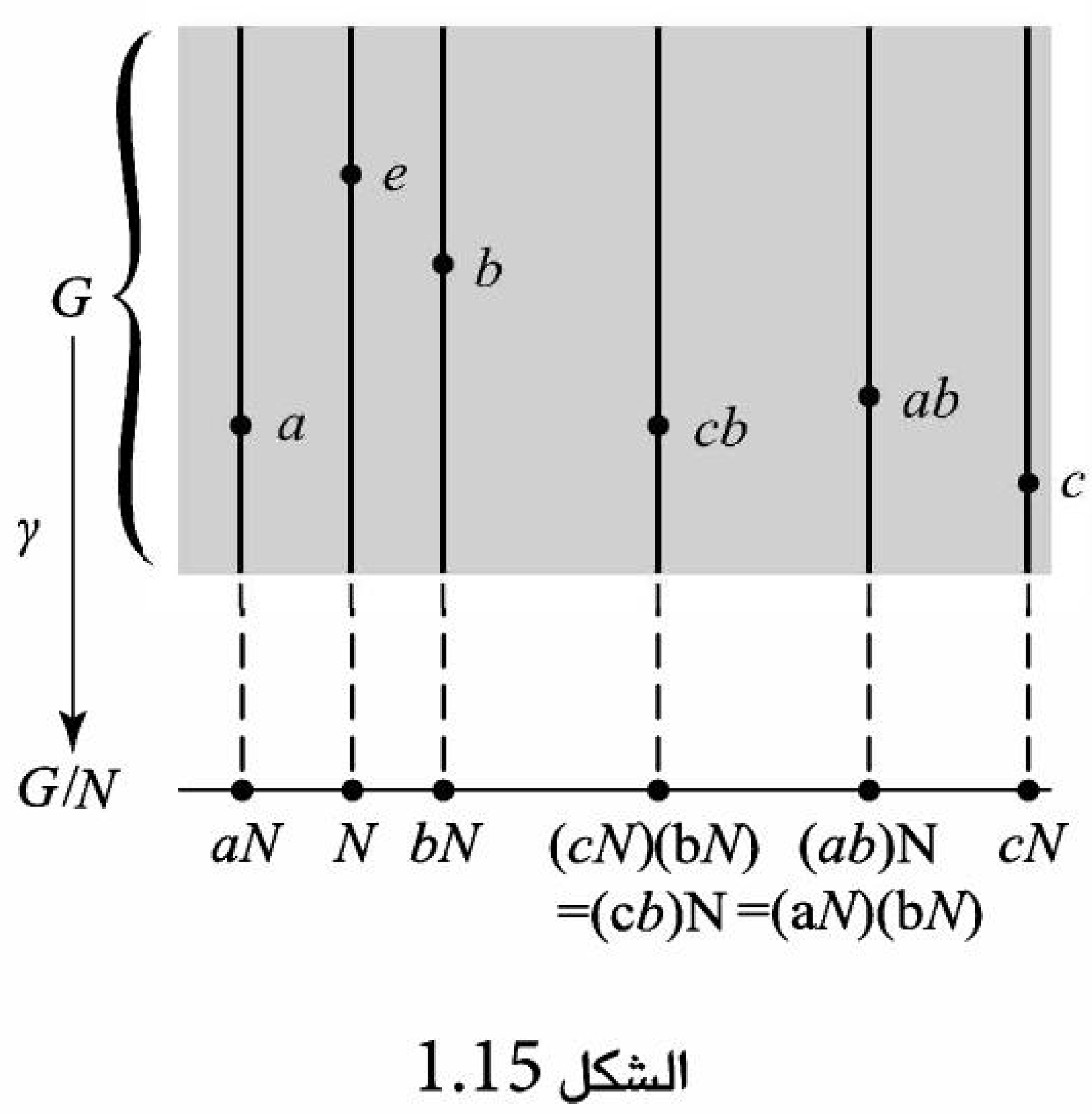
ب. أثبت أنه إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، فإنّ مجموعة مجموعات المشاركة لـ N مغلقة على $\mathscr{P}(G)$ بالنسبة إلى العملية في الأعلى، وإنّ هذه العملية تتفق مع الضرب المعطى من خلال الصيغة في النتيجة 5.14.

جـ. أثبت (دون استخدام النتيجة 5.14) إنّ مجموعات المشاركة لـ N في G تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية في الأعلى، هل عنصرها المحايد هو العنصر المحايد نفسه لـ $\mathscr{P}(G)$؟

حسابات زمر العامل والزمر البسيطة
Factor Group Computations and Simple Groups

يمكن أن تكون زمر العامل موضوعًا صعب الفهم عند الطلاب، فلا شيء مثل القليل من الحسابات لتقوية الفهم في الرياضيات؛ لذا، نبدأ بمحاولة تحسين بَدهيتنا فيما يتعلق بزمر العامل؛ لأننا سنتعامل خلال هذا الفصل مع الزمر الجزئية الناظمية، وسنرمز للزمرة الجزئية من G بـ N بدلاً من H.

لتكن N زمرة جزئية ناظمية من G، حيث تعمل الزمرة الجزئية N في زمرة العامل G/N، بوصفها عنصرًا محايدًا، ويمكننا النظر إلى N على أنها طويت إلى عنصر وحيد – إما إلى 0 في تمثيل الجمع، أو إلى e في تمثيل الضرب – هذا الطي لـ N إضافة إلى البنية الجبرية لـ G يتطلب أيضًا أن تطوى المجموعات الجزئية من G – المسماة مجموعات المشاركة لـ N – إلى عنصر وحيد في زمرة العامل، وقد أُعطي تمثيل لهذا الطي في الشكل 1.15، تذكر من المبرهنة 9.14 إنّ $\gamma\colon G \to G/N$ المعرَّف بـ $\gamma(a) = aN$ لـ $a \in G$ هو تشاكل من G وبصورة غامرة إلى G/N، الشكل 1.15 يشبه كثيرًا الشكل 14.13، إلّا إنّ زمرة الصور بالنسبة إلى التشاكل في الشكل 1.15، هي في الحقيقة مُشَكَّلَةٌ من G، ويمكننا أن ننظر إلى "الخط" في أسفل الشكل على أنه تمَّ الحصول عليه بالطي لنقطة كلّ مجموعة مشاركة لـ N في نسخة أخرى لـ G، هكذا تقابل كلّ نقطة في G/N قطعة مستقيمة عمودية كاملة في الجزء المظلل، وتُمَثِّلُ مجموعةَ مشاركة لـ N في G، والأمر الحاسم أن نتذكر إنّ ضرب مجموعات المشاركة في G/N، يمكن أن يحسب بالضرب في G، باستخدام أي عناصر ممثلة لمجموعات المشاركة، مثلما هو مُبَيَّن في الشكل:



الشكل 1.15

بالنسبة إلى الجمع، فإنّ عنصرين من G يطويان إلى العنصر نفسه من G/N، إذا كان الفرق بينهما عنصرًا من N، وبالنسبة إلى الضرب، فإنّ a و b يطويان معًا، إذا كان ab^{-1} في N، ومن الممكن أن تتفاوت درجة الطي من عدم وجودها إلى وجودها بدرجة هائلة، وإليك توضيح الحالتين المتطرفتين بالأمثلة:

مثال 2.15 الزمرة الجزئية التافهة $N = \{0\}$ من $\mathbb{Z}$، هي بالطبع زمرة جزئية ناظمية. احسب $\mathbb{Z}/\{0\}$.

الحل لإنّ $N=\{0\}$ فيها عنصر واحد فقط، فإنّ كل مجموعة مشاركة لـ N فيها أيضًا عنصر واحد فقط، أي إنّ مجموعات المشاركة هي على الصورة $\{m\}$ لـِ $m \in \mathbb{Z}$، ولا يوجد طي نهائيًا؛ ولذلك $\mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$. كل $m \in \mathbb{Z}$ ببساطة يعاد تسميتها $\{m\}$ في $\mathbb{Z}/\{0\}$ ▲

مثال 3.15 ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا، والمجموعة $n\mathbb{R} = \{nr \mid r \in \mathbb{R}\}$ زمرة جزئية من $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع، وهي ناظمية؛ لأن $\mathbb{R}$ إبدالية. احسب $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$.

الحل في الحقيقة، يبين قليل من التفكير إنَّ $n\mathbb{R} = \mathbb{R}$؛ لأن كل $x \in \mathbb{R}$ هي على الصورة $n(x/n)$ و $x/n \in \mathbb{R}$، وهكذا $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ فيها عنصر واحد فقط، والزمرة الجزئية $n\mathbb{R}$، زمرة تافهة متكونة من العنصر المحايد فقط. ▲

قد وضِّح في المثالين 2.15 و 3.15، أنه لأي زمرة G لدينا $G/\{e\} \simeq G$ و $G/G \simeq \{e\}$ حيث $\{e\}$ هي الزمرة التافهة المتكونة فقط من العنصر المحايد e، وهاتان الحالتان المتطرفتان لزمر العامل لهما أهمية قليلة، إذ نريد معلومات عن زمرة العامل G/N لإعطاء بعض المعلومات عن بنية G، فإذا كانت $N = \{e\}$، فإن زمرة العامل لها بنية G نفسها، ومن المفضل أن نحاول دراسة G مباشرة، فإذا كانت $N = G$، فإن زمرة العامل ليس لها بنية ذات معنى لتزودنا بمعلومات عن G، أمّا إذا كانت G زمرة منتهية و $N \neq \{e\}$ هي زمرة جزئية ناظمية من G، فإنّ G/N زمرة أصغر من G؛ ولذلك، فإن بنيتها يمكن أن تكون أكثر بساطة من تلك التي لـِ G، وأمّا ضرب مجموعات المشاركة في G/N، فيعكس الضرب في G؛ لأن ضرب مجموعات المشاركة يمكن أن يحسب بالضرب في G للعناصر الممثلة لمجموعات المشاركة.

والمثالان الآتيان يبينان أنه حتى إن كانت G/N رتبتها 2، فمن الممكن استنتاج بعض النتائج المفيدة. إذا كانت G زمرة منتهية، و G/N لها عنصران فقط، فيجب أن نحصل على $|G|=2|N|$، لاحظ إنّ كل زمرة جزئية H تتضمن نصف عناصر زمرة منتهية G، يجب أن تكون زمرة جزئية ناظمية؛ لأن لكل عنصر a في G وليس في H، كلتا مجموعتي المشاركة اليسرى aH واليمنى Ha يجب أن تتكونا من جميع العناصر في G التي ليست في H، وهكذا تتطابق مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لـِ H، و H هي زمرة جزئية ناظمية من G.

مثال 4.15 لإنّ $|S_n| = 2|A_n|$، نرى إنّ A_n زمرة جزئية ناظمية من S_n و S_n/A_n رتبتها 2. لتكن σ تبديلًا فرديًّا في S_n، وعليه، $S_n/A_n = \{A_n, \sigma A_n\}$، وبإعادة تسمية العنصر A_n "زوجي" والعنصر σA_n "فردي"، الضرب في S_n/A_n المُبَيَّن في الجدول 5.15 يصبح:

	A_n	σA_n
A_n	A_n	σA_n
σA_n	σA_n	A_n

(زوجي) (زوجي) = (زوجي)   (فردي) (زوجي) = فردي

(زوجي) (فردي) = فردي   (فردي) (فردي) = زوجي

الجدول 5.15

وهكذا تعكس زمرة العامل هذه الخصائص الضربية للتباديل كلها في S_n. ▲

يوضح المثال 4.15 أنه على الرغم من إنّ ضرب مجموعتي مشاركة في G / N لا يخبرنا عن ماهية الضرب لعنصرين في G، فمن الممكن أن يخبرنا إنّ الضرب في G لنوعين من العناصر هو نفسه ذو نوع محدد.

6.15 مثال (خطأ عكس مبرهنة لاجرانج): تنص مبرهنة لاجرانج **(Lagrange Theorem)** على أنه إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G، فإنّ رتبة H تقسم رتبة G، ونبرهن إنّ من الخطأ القول: إنه إذا كانت d تقسم رتبة G، فيجب أن توجد زمرة جزئية H من G رتبتها d، أي إننا سنبرهن إنّ A_4 – التي رتبتها 12 – لا تحتوي زمرة جزئية رتبتها 6 .

افترض إنّ H زمرة جزئية من A_4 رتبتها 6، كما لوحظ سابقًا في المثال 4.15 فيجب أن ينتج أن H زمرة جزئية ناظمية من A_4، عندئذ، يجب أن يكون في A_4 / H عنصران فقط، H و σH لعنصرٍ ما $\sigma \in A_4$ ليس في H؛ لإنّ في زمرةٍ رتبتها 2، مربع كل عنصر هو العنصر المحايد، فيجب أن يكون لدينا $HH = H$ و $(\sigma H)(\sigma H) = H$، الحساب في زمر العامل الآن، يمكن أن يُنْجَز بالحساب للمُمَثِّلين في الزمرة الأصلية، وهكذا بالحساب في A_4، وجدنا أنه يجب أن يكون لدينا $\alpha^2 \in H$ لكل $\alpha \in H$، ويجب أن يكون لدينا $\beta^2 \in H$ لكل $\beta \in \sigma H$، أي إنّ مربع كل عنصر في A_4 يجب أن يكون في H، لكن في A_4 لدينا:

$$(1,3,2)^2 = (1,2,3) \text{ و } (1,2,3)^2 = (1,3,2)$$

لذا، $(1,2,3)$ و $(1,3,2)$ في H. حساب مشابه يُبَيِّنُ إنّ $(1,2,4)$، $(1,4,2)$، $(1,3,4)$، $(1,4,3)$، $(2,3,4)$ و $(2,4,3)$ جميعها في H، وهذه تبين أنه يجب أن يكون لدينا على الأقل 8 عناصر في H، مناقضة للحقيقة بإنّ H افترضت رتبتها 6 . ▲

نتجه الآن إلى أمثلة عدة تَحْسبُ زمر العامل، فإذا كانت الزمرة التي نبدأ بها منتهية التَوَلُّد وإبدالية، فإنّ زمرة عاملها ستكون كذلك، إذ إنّ حساب مثل زمرة العامل هذه يعني تصنيفها وفقًا للمبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11).

7.15 مثال لنحسب زمرة العمل $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/\langle(0,1)\rangle$. هنا $\langle(0,1)\rangle$ هي الزمرة الجزئية الدورية H من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ المتولدة من $(0,1)$. وهكذا:

$$H = \{(0,0)\,,\,(0,1)\,,\,(0,2)\,,\,(0,3)\,,\,(0,4)\,,\,(0,5)\}.$$

لإنّ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ فيها (24) عنصرًا و H فيها (6) عناصر، فإنّ مجموعات المشاركة لـِ H جميعها يجب أن يكون فيها (6) عناصر، و $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/H$ يجب أن تكون رتبتها (4)؛ ولأن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ إبدالية، فكذلك $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/H$ (تذكر، نحسب في زمرة العامل من خلال الممثلين في الزمرة الأصلية)، مجموعات المشاركة في تمثيل الجمع، هي:

$$H = (0,0) + H،\ (1,0) + H،\ (2,0) + H،\ (3,0) + H.$$

ولأنه يمكننا أن نحسب باختيار الممثلين $(0,0)$، $(1,0)$، $(2,0)$ و $(3,0)$، فمن الواضح إنّ $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/H$ تماثل $\mathbb{Z}_4$، لاحظ إنّ هذا ما كنا نتوقعه؛ لأن في زمرة العامل مقياس H، كل شيء في H يصبح العنصر المحايد؛ أي إننا نضع وبصورة أساسية كل شيءٍ في H مساويًا للصفر، وعليه العامل الثاني $\mathbb{Z}_6$ في الضرب المباشر $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ بأكمله قد طُوِيَ تاركًا فقط العامل الأول $\mathbb{Z}_4$. ▲

المثال 7.15 حالة خاصة من مبرهنة عامة سنذكرها ونبرهنها، ويجب أن نكون قد اكتسبنا شعورًا حدسيًا لهذه المبرهنة من ناحية طي أحد *العوامل إلى العنصر المحايد*.

8.15 مبرهنة لتكن $G = H \times K$ الضرب المباشر للزمر H و K، عندئذٍ، $\overline{H} = \{(h,e)\,|\,h \in H\}$ زمرة جزئية ناظمية من G، أيضًا $G/\overline{H}$ تماثل K بطريقة طبيعية، بصورة مشابهة $G/\overline{K} \simeq H$ بطريقة طبيعية.

البرهان ليكن التشاكل $\pi_2 : H \times K \to K$، حيث $\pi_2(h,k) = k$. (انظر المثال 8.13)؛ ولأن $\mathrm{Ker}(\pi_2)=\overline{H}$ نرى إنّ $\overline{H}$ زمرة جزئية ناظمية من $H \times K$؛ ولأن π_2 غامر لـِ K، تخبرنا المبرهنة 11.14 إنّ $(H\times K)/\overline{H} \simeq K$. ♦

نستمر بحسابات إضافية لزمر العامل الإبدالية، ولِنُبَيِّنَ كم هو سهل الحساب في زمر العامل، إذا استطعنا الحساب في الزمرة الكاملة، نبرهن المبرهنة الآتية:

9.15 مبرهنة زمرة العامل لزمرة دورية هي دورية.

البرهان لتكن G زمرة دورية مُوَلِّدُها a، ولتكن N زمرة جزئية ناظمية من G، نَدَّعي إنّ مجموعة المشاركة aN تُوَلِّد G/N، يجب أن نحسب قوى aN جميعها، لكن هذا يعادل – في G – حساب قوى الممثل a جميعها، إذ إنّ هذه القوى جميعها تعطي العناصر جميعها في G؛ إذن، قوى aN جميعها تعطي بالتأكيد مجموعات المشاركة لـِ N جميعها، وهكذا G/N دورية. ♦

مثال 10.15 لنحسب زمرة العامل $\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6\right)/\langle(0,2)\rangle$، حيث يُوَلِّد $(0,2)$ الزمرة الجزئية:

$$H = \{(0,0)\,,\,(0,2)\,,\,(0,4)\}$$

من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ ورتبتها 3، وهنا يترك العامل الأول $\mathbb{Z}_4$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ وحده، ومن جهة أخرى، العامل $\mathbb{Z}_6$ يطوي بصورة أساسية من خلال زمرة جزئية رتبتها 3، معطيًا زمرة عامل في العامل الثاني رتبتها 2، التي يجب أن تماثل $\mathbb{Z}_2$، وعليه، $\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6\right)/\langle(0,2)\rangle$ تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ▲

مثال 11.15 لنحسب زمرة العامل $\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6\right)/\langle(2,3)\rangle$ كن حذرًا! إذ يوجد إغراء كبير بالقول: إننا وضعنا العنصرين 2 من $\mathbb{Z}_4$ و 3 من $\mathbb{Z}_6$ كليهما يساوي صفرًا، وعليه، $\mathbb{Z}_4$ تطوى لزمرة عامل تماثلُ $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_6$ لواحدة تماثل $\mathbb{Z}_3$، وتعطيان زمرة عامل كاملة تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$، فهذا خطأ، لاحظ إنّ:

$$H = \langle(2,3)\rangle = \{(0,0),(2,3)\}$$

رتبتها 2، وهكذا فإنّ $\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6\right)/\langle(2,3)\rangle$ رتبتها 12 وليس 6، وبوضع $(2,3)$ يساوي صفرًا فلا يجعل $(2,0)$ و $(0,3)$ يساويان صفرًا بصورة منفصلة، وهكذا، فإنّ العوامل لا تطوى بصورة منفصلة.

الزمر الإبدالية المحتملة من الرتبة 12، هي: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$، ويجب أن نقرر لأي منهما زمرة العامل خاصتنا تماثل، وقد تمّ تمييز هاتين الزمرتين بسهولة؛ لإنّ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ فيها عنصر رتبته 4، و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ لا تحتوي على عنصر له مثل هذه الرتبة، حيث ندعي إنّ مجموعة المشاركة $(1,0) + H$ رتبتها 4 في زمرة العامل $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$، ولإيجاد أصغر قوة لمجموعة مشاركة لتعطي العنصر المحايد في زمرة عامل مقياس H، يجب علينا – باختيار ممثلين – إيجاد القوة الأصغر لممثل في الزمرة الجزئية H، الآن:

$$4(1,0) = (1,0) + (1,0) + (1,0) + (1,0) = (0,0)$$

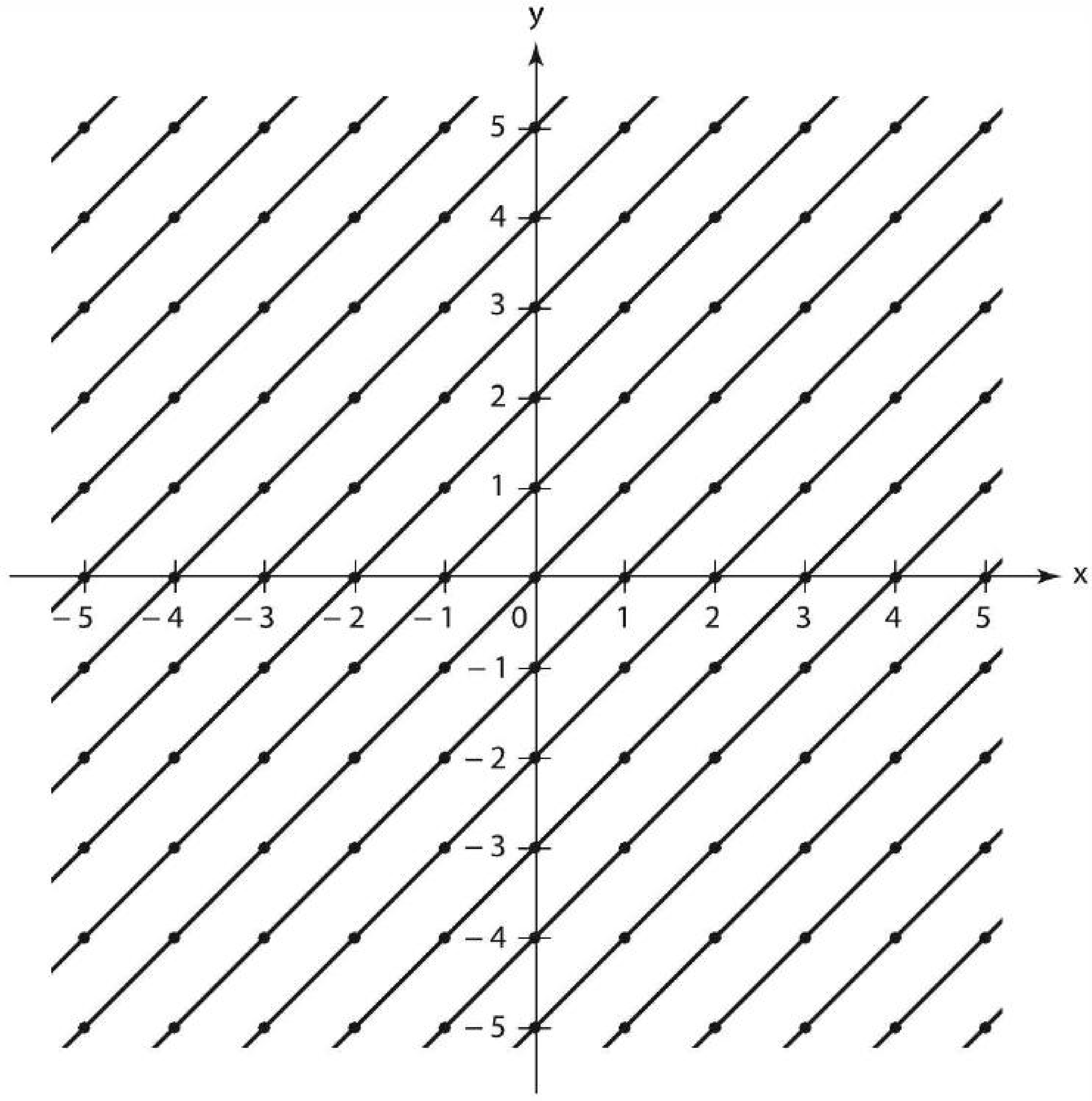
المرة الأولى التي أضيف فيها $(1,0)$ لنفسه ليعطي عنصرًا في H، وهكذا، فإنّ $\left(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6\right)/\langle(2,3)\rangle$ فيها عنصر رتبته (4)، وهي تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ أو $\mathbb{Z}_{12}$. ▲

مثال 12.15 لنحسب (نصنف كما في المبرهنة 12.11) الزمرة $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle$، يمكننا أن نتخيل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ كالنقاط في المستوى التي كلا إحداثييها أعداد صحيحة، كما أشير بالنقاط في الشكل 13.15، وتتألف الزمرة الجزئية $\langle(1,1)\rangle$ من تلك النقاط التي تقع على الخط $45°$ المار بنقطة الأصل، وقد تمّت الإشارة لها في الشكل، أمّا مجموعة المشاركة $(1,0) + \langle(1,1)\rangle$، فتتألف من تلك النقاط على الخط $45°$ عبر النقطة $(1,0)$، التي تظهر أيضًا في الشكل، وبالاستمرار، نرى إنّ كل مجموعة مشاركة تتألف من تلك النقاط الواقعة على أحد الخطوط $45°$ في الشكل، لنحسب في زمرة العامل إذ يمكننا اختيار الممثلين:

$$\ldots, (-3,0), (-2,0), (-1,0), (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), \ldots$$

لمجموعات المشاركة هذه؛ لأن هؤلاء الممثلين يقابلون بالضبط النقاط لـِ $\mathbb{Z}$ على محور السينات،

نرى إنّ زمرة العامل $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle$ تماثل $\mathbb{Z}$. ▲



الشكل 13.15

الزمر البسيطة

كما ذكرنا في الفصل السابق، إحدى ميزات زمرة العامل أنها تعطي معلومات صريحة عن بنية الزمرة الكلية، وبالتأكيد، فمن الممكن – أحيانًا – ألا توجد زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة، فمثلاً: تبين المبرهنة 10.10 أن زمرة رتبتها أولية، لا يمكن أن يكون لها أي زمرة جزئية فعلية غير تافهة من أي نوع.

14.15 تعريف تكون الزمرة **بسيطة (Simple)** إذا كانت غير تافهة، وليس لها زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة.

15.15 مبرهنة A_n الزمرة الزوجية من الرتبة n هي زمرة بسيطة لـ $n \geq 5$.

البرهان انظر التمرين 39. ♦

يوجد كثير من الزمر البسيطة المختلفة عن تلك المعطاة في الأعلى، فعلى سبيل المثال: A_5 رتبتها 60، و A_6 رتبتها 360، وتوجد زمرة بسيطة رتبتها غير أولية – أي 168 – بين هاتين الرتبتين.

التحديد الكامل وتصنيف الزمر البسيطة المنتهية جميعها اكتمل حديثًا، فقد عمل

المئات من الرياضيين على هذه المهمة منذ عام 1950م إلى عام 1980م، يمكن أن يُثْبَت إنّ الزمرة المنتهية لها نوع من التحليل عوامله زمر بسيطة، حيث إنّ هذه العوامل وحيدة وفقًا للترتيب، والوضع مشابه لتحليل الأعداد الصحيحة الموجبة إلى أعداد أولية، ويمكن الآن أن تُستخدم المعرفة الجديدة للزمر البسيطة المنتهية جميعها في حل بعض مسائل مبرهنة الزمر المنتهية.

رأينا في هذا الكتاب إنّ الزمرة الإبدالية البسيطة المنتهية تماثل $\mathbb{Z}_p$ لعدد أولي ما p، وقد نشر ثومبسون وفيتْ **(Thompson and Fiet)** [21] عام 1963م برهانهما لحدسية قديمة العهد بيرنسايد **(Burnside)**، بإثبات إنّ كل زمرة بسيطة منتهية غير إبدالية رتبها زوجية، وأُنجز مزيد من الإسهام العظيم في اتجاه التصنيف الكامل من قبل أشباخر **(Aschbacher)** في عقد السبعينيات، وقد أعلن جريس **(Griess)** عام 1980م، أنه بنى زمرة بسيطة "ضخمة" متوقعة رتبتها:

$$808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000$$

وأضاف أشباخر التفاصيل النهائية للتصنيف في آب عام 1980م، إذ ملأت الأوراق البحثية التي أسهمت في التصنيف الكامل 5000 صفحة تقريبًا من صفحات المجلات العلمية.

وبالعودة إلى وصفٍ لتلك الزمر الجزئية الناظمية N من G، بحيث إنّ G/N زمرة بسيطة، بداية نذكر خصائص لتشاكل الزمر إضافة لتلك الواردة في المبرهنة 12.13، حيث ترك برهان هذه الخصائص للتمرينين 35 و 36.

16.15 مبرهنة ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر، إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، فإن $\phi[N]$ زمرة جزئية ناظمية من $\phi[G]$، أيضًا إذا كانت N' زمرة جزئية ناظمية من $\phi[G]$، فإن $\phi^{-1}[N']$ زمرة جزئية ناظمية من G.

يمكن أن يُنظر إلى المبرهنة 16.15 بالقول: إنّ تشاكل $\phi: G \to G'$ يحفظ الزمر الجزئية الناظمية بين G و $\phi[G]$ ومن المهم ملاحظة إنّ $\phi[N]$ يمكن ألّا تكون ناظمية في G'، حتى إن كانت N ناظمية في G، فمثلاً، في التشاكل $\phi: \mathbb{Z}_2 \to S_3$، حيث $\phi(0) = \rho_0$ و $\phi(1) = \mu_1$ لدينا $\mathbb{Z}_2$ زمرة جزئية ناظمية من نفسها، لكن $\{\rho_0, \mu_1\}$ ليست زمرة جزئية ناظمية من S_3، يمكننا الآن أن نَصِفَ متى تكون G/N زمرة بسيطة.

17.15 تعريف الزمرة الجزئية الناظمية الأعظمية من زمرة **(maximal normal subgroup of a group)** G، هي زمرة جزئية ناظمية M لا تساوي G، حيث إنه لا يوجد زمرة جزئية ناظمية فعلية N من G تحوي M فعليًا. ■

18.15 مبرهنة M زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G، إذا وفقط إذا كانت G/M بسيطة.

البرهان لتكن M زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G، وليكن التشاكل القانوني $\gamma\ :G \to G/M$ المعطى في المبرهنة 9.14. الآن، γ^{-1} لأي زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة من G/M هي زمرة جزئية ناظمية فعلية من G تحتوي فعليًا على M؛ لكن M أعظمية، وعليه، هذا لا يمكن أن يحدث، إذن G/M بسيطة.

في المقابل، تبين المبرهنة 16.15 أنه إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G تحتوي فعليًا على M، فإنّ $\gamma\,[N]$ ناظمية في G/M، أيضًا، إذا كان $N \neq G$، فإنّ:

$$\gamma\,[N] \neq \{M\} \text{ و } \gamma\,[N] \neq G/M$$

وعليه، إذا كانت G/M بسيطة، بحيث لا يمكن أن توجد $\gamma\,[N]$ كهذه، فلا يمكن أن توجد N كهذه، وهكذا M أعظمية. ♦

مركز الزمر الجزئية وزمر المُبَدِّلات الجزئية

كل زمرة G غير إبدالية لها زمرتان جزئيتان ناظميتان مهمتان، المركز $Z\,(G)$ لـ G وزمرة المُبَدِّلات الجزئية C من G. (الحرف Z من الكلمة الألمانية (zentrum) ويعني المركز). عُرِّفَ المركز $Z\,(G)$ بـ:

$$Z\,(G) = \{\, z \in G \mid zg = gz \text{ لكل } g \in G\}$$

بَيَّن التمرين 52 من الفصل 5 إنّ $Z\,(G)$ زمرة جزئية إبدالية من G؛ ولإنّ لكل $g \in G$ و $z \in Z(G)$ لدينا $gzg^{-1} = zgg^{-1} = ze = z$، فنرى في الحال إنّ $Z\,(G)$ زمرة جزئية ناظمة من G، وإذا كانت G إبدالية، فإنّ $Z(G) = G$؛ في هذه الحالة المركز غير مفيد.

19.15 مثال المركز لزمرة G دائمًا يتضمن العنصر المحايد e، ومن الممكن أن يكون $Z\,(G) = \{e\}$، في هذه الحالة نقول: إنّ **المركز لـ G (the center of) تافهٌ (trivial)**، فمثلاً تَفَحُّصُ الجدول 8.8 للزمرة S_3 يُبَيِّنُ لنا إنّ $Z\,(S_3) = \{\rho_0\}$، وهكذا المركز لـ S_3 تافه، (هذه حالة خاصة للتمرين 38، تُبَيِّنُ إنّ المركز للزمر غير الإبدالية جميعها ذوات الرتبة pq لأعداد أولية p و q هو تافه)، وبناءً على ذلك، فالمركز لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_5$ يجب أن يكون $\{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_5$، والذي يماثل $\mathbb{Z}_5$. ▲

بالعودة إلى زمرة المُبَدِّلات الجزئية، تذكر أنه بتكوين زمرة العامل لـ G مقياس زمرة جزئية ناظمية N، إذ نضع بصورة أساسية العناصر جميعها في G، التي في N على أنها تساوي e؛ لإنّ N تمثل محايدنا الجديد في زمرة العامل، حيث تشير هذه إلى استخدام آخر لزمر العامل، لنفترض – على سبيل المثال – أننا ندرس البنية لزمرة غير إبدالية G، ولأن المبرهنة 12.11 تعطي معلومات كاملة عن البنية لكل الزمر الإبدالية الصغيرة صغرًا كافيًا، فمن الممكن أن يكون مشوقًا أن نحاول تكوين زمرة إبدالية تشبه G قدر الإمكان – نسخة إبدالية لـ G – بالبدء بـ G، ثمَّ اشتراط إنّ $ab = ba$ لكل a و b في بنية زمرتنا الجديدة، ولاشتراط إنّ $ab = ba$ نقول إنّ: $ab\,a^{-1}\,b^{-1} = e$ في زمرتنا الجديدة، فالعنصر $aba^{-1}b^{-1}$ في زمرة هو **مُبَدِّل في الزمرة (commutator of the group)**. وعليه، نرغب في المحاولة بتكوين نسخة إبدالية لـ G باستبدال كل مُبَدِّل في الزمرة بـ e، ومن الملاحظة الأولى لهذه الفقرة، علينا محاولة تكوين زمرة العامل لـ G مقياس الزمرة الجزئية الناظمية الصغرى، حيث يمكننا أن نجد أنها

تحوي المُبَدِّلات كلها التي في G.

20.15 مبرهنة لتكن G زمرة، ومجموعة المُبَدِّلات $aba^{-1}b^{-1}$ لـ $a,b \in G$ كلها تُوَلِّدُ زمرة جزئية C **(زمرة المُبَدِّلات الجزئية) (the commutator subgroup)** من G، فالزمرة الجزئية C زمرة جزئية ناظمية من G، علاوة على ذلك، إذا كانت N زمرة ناظمية من G، فإنّ G/N إبدالية، إذا وفقط إذا كان $C \leq N$.

البرهان بالتأكيد المُبَدِّلات تولِّد زمرة جزيئة C، ويجب أن نثبت أنها ناظمية في G، لاحظ إنّ المعكوس $(aba^{-1}b^{-1})^{-1}$ لمُبدِّل هو من جديد مُبَدِّل – أي $bab^{-1}a^{-1}$ – و $e = eee^{-1}e^{-1}$ أيضًا مُبَدِّل، وعليه، تُبَيِّن المبرهنة 6.7 إنّ C تتألف بالضبط من حواصل الضرب المنتهية من مُبَدِّلات. يجب أن نثبت لـ $x \in C$، إنّ $g^{-1}xg \in C$ لكل $g \in G$، أو أنه إذا كانت x ضرب مُبَدِّلات، فكذلك $g^{-1}xg$ لكل $g \in G$، وبإدخال $e = gg^{-1}$ بين كل ضرب للمُبَدِّلات يظهر في x، نرى أنه يكفي أن نثبت لكل مُبَدِّل $cdc^{-1}d^{-1}$ أن $g^{-1}(cdc^{-1}d^{-1})g$ في C؛ لكن:

$$\begin{aligned} g^{-1}(cdc^{-1}d^{-1})g &= (g^{-1}cdc^{-1})(e)(d^{-1}g) \\ &= (g^{-1}cdc^{-1})(gd^{-1}dg^{-1})(d^{-1}g) \\ &= [(g^{-1}c)d(g^{-1}c)^{-1}d^{-1}][dg^{-1}d^{-1}g], \end{aligned}$$

الذي هو في C، إذن، C ناظمية في G.

ما بقي من المبرهنة واضح، إذا ما كنا قد اكتسبنا الإحساس المناسب بزمر العامل، فلا يمكن أن نتخيل بهذه الطريقة، لكن استنتاج إنّ G/C إبدالية يأتي من:

$$\begin{aligned} (aC)(bC) &= abC = ab(b^{-1}a^{-1}ba)C \\ &= (abb^{-1}a^{-1})baC = baC = (bC)(aC). \end{aligned}$$

علاوة على ذلك، إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، و G/N إبدالية، فإنّ $(a^{-1}N)(b^{-1}N) = (b^{-1}N)(a^{-1}N)$، أي إنّ: $aba^{-1}b^{-1}N = N$،
وهكذا $aba^{-1}b^{-1} \in N$ و $C \leq N$، أخيرًا، إذا كانت $C \leq N$، فإنّ:

$$\begin{aligned} (aN)(bN) &= abN = ab(b^{-1}a^{-1}ba)N \\ &= (abb^{-1}a^{-1})baN = baN = (bN)(aN). \end{aligned}$$

♦

21.15 مثال وجدنا إنّ أحد المُبَدِّلات للزمرة S_3 في الجدول 8.8 هو $\rho_1\mu_1\rho_1^{-1}\mu_1^{-1} = \rho_1\mu_1\rho_2\mu_1 = \mu_3\mu_2 = \rho_2$ وبصورة مشابهة نجد إنّ $\rho_2\mu_1\rho_2^{-1}\mu_1^{-1} = \rho_2\mu_1\rho_1\mu_1 = \mu_2\mu_3 = \rho_1$. وعليه، زمرة المُبَدِّلات الجزئية C من S_3 تحوي A_3؛ لأنّ A_3 زمرة جزئية ناظمية من S_3 و S_3/A_3 إبدالية، فإنّ المبرهنة 20.15 تبين إنّ $C = A_3$.

▲

■ تمارين 15

حسابات

صَنِّف الزمرة المعطاة في التمارين من 1 إلى 12 وفقًا للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولُّد:

1. $(\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_4)/\langle(0,1)\rangle$

2. $(\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_4)/\langle(0,2)\rangle$

3. $(\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_4)/\langle(1,2)\rangle$

4. $(\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_8)/\langle(1,2)\rangle$

5. $(\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_8)/\langle(1,2,4)\rangle$

6. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z})/\langle(0,1)\rangle$

7. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,2)\rangle$

8. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z})/\langle(1,1,1)\rangle$

9. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z}_4)/\langle(3,0,0)\rangle$

10. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z}_8)/\langle(0,4,0)\rangle$

11. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(2,2)\rangle$

12. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z})/\langle(3,3,3)\rangle$

13 . أوجد كلاً من المركز $Z(D_4)$ وزمرة المُبَدِّلات الجزئية C من الزمرة D_4 لتناظرات المربع في الجدول 12.8.

14. أوجد كلاً من المركز وزمرة المُبَدِّلات الجزئية لـ $\mathbb{Z}_3 \times S_3$.

15. أوجد كلاً من المركز وزمرة المُبَدِّلات الجزئية لـ $S_3 \times D_4$.

16. صف الزمر الجزئية كلها ذوات الرتب ≤ 4 من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$، وصَنِّفْ في كل حالة زمرة العامل لـ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ مقياس الزمرة الجزئية للمبرهنة 12.11، أي أن تَصِفَ الزمرة الجزئية، وتقول إنّ: زمرة العامل لـ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ مقياس الزمرة الجزئية تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$، أو أيًّا كانت الحالة. [مساعدة: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ لها ست زمر جزئية دورية مختلفة من الرتبة 4. صفها بإعطاء مُولِّد، مثل الزمرة الجزئية $\langle(1,0)\rangle$، توجد زمرة جزئية واحدة رتبتها 4 تماثل زمرة كلاين الرباعة، توجد ثلاث زمر جزئية من الرتبة 2].

مفاهيم

في التمرينين 17 و 18 صحِّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إن كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

17. المركز لزمرة G يحتوي العناصر من G كلها، التي تَتَبَدَّل مع عناصر G كلها.

18. زمرة المُبَدِّلات الجزئية من زمرة G، هي $\{a^{-1}b^{-1}ab \mid a, b \in G\}$.

19. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل زمرة عامل لزمرة دورية هي دورية.

________ ب. زمرة عامل لزمرة غير دورية، هي مرة أخرى غير دورية.

________ جـ. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع ليس لها عنصر رتبته 2.

________ د. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع فيها عناصر رتبها n لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

________ هـ. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع فيها عدد لا نهائي من عناصر رتبها 4.

________ و. إذا كانت زمرة المُبَدِّلات الجزئية C من زمرة G هي $\{e\}$، فإنّ G إبدالية.

________ ز. إذا كانت G/H إبدالية، فإنّ زمرة المُبَدِّلات الجزئية C من G تحوي H.

________ ح. زمرة المُبَدِّلات الجزئية من زمرة بسيطة G يجب أن تكون G نفسها.

________ ط. زمرة المُبَدِّلات الجزئية من زمرة بسيطة غير إبدالية G يجب أن تكون G نفسها.

________ ي. الزمر البسيطة المنتهية غير التافهة كلها لها رتب أولية.

في التمارين من 20 إلى 23، لتكن F زمرة الجمع للدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن F^* زمرة الضرب لعناصر F كلها، التي لا تأخذ القيمة 0 عند أي نقطة في $\mathbb{R}$.

20. لتكن K الزمرة الجزئية من F المتكونة من الدوال الثابتة. أوجد زمرة جزئية من F تماثل F/K.

21. لتكن K^* الزمرة الجزئية من F المتكونة من الدوال الثابتة غير الصفرية. أوجد زمرة جزئية من F^* تماثل F^*/K^*.

22. لتكن K الزمرة الجزئية للدوال المتصلة في F، فهل يمكنك إيجاد عنصر في F/K له الرتبة 2؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

23. لتكن K^* الزمرة الجزئية من F المتكونة من الدوال المتصلة في F^*، فهل يمكنك إيجاد عنصر في F^*/K^* له الرتبة 2؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

في التمارين من 24 إلى 26، لتكن U زمرة الضرب $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$:

24. ليكن $z_0 \in U$. أثبت إنّ $z_0U = \{z_0 z \mid z \in U\}$ زمرة جزئية من U، واحسب U/z_0U.

25. أي زمرة ذكرناها في الكتاب تماثل $U/\langle -1 \rangle$؟

26. ليكن $\zeta_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$، حيث $n \in \mathbb{Z}^+$. فلأي زمرة ذكرناها تماثل $U/\langle \zeta_n \rangle$؟

27. أي زمرة ذكرت في الكتاب تماثل زمرة الجمع $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$؟

28. أعط مثالًا لزمرة G ليس لها أي عنصر رتبته منتهية أكبر من 1، لكن لها زمرة عامل G/H رتب عناصرها جميعها منتهية.

29. لتكن H و K زمرتين جزئيتين ناظمتين من زمرة G. أعطِ مثالاً يُبَيِّنُ أنه يمكن أن يكون لدينا $H \simeq K$، بينما G/H لا تماثل G/K.

30. صِف المركز لكل من:

أ. زمرة إبدالية بسيطة.

ب. زمر غير إبدالية بسيطة.

31. صِفْ زمرة المُبَدِّلات الجزئية لكل من:

أ. زمرة إبدالية بسيطة.

ب. زمرة غير إبدالية بسيطة.

براهين مختصرة

32. أعطِ اختصارًا بجملة واحدة لإثبات المبرهنة 9.15.

33. أعطِ اختصارًا بجملتين على الأكثر لإثبات المبرهنة 18.15.

براهين

34. أثبت أنه إذا كانت G زمرة منتهية تحوي زمرة جزئية غير تافهة دليلها 2 في G، فإن G ليست بسيطة.

35. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر، ولتكن N زمرة جزئية ناظمية من G، فأثبت إنّ $\phi[N]$ زمرة جزئية ناظمية من $\phi[G]$.

36. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر، ولتكن N' زمرة جزئية ناظمية من G'، فأثبت إنّ $\phi^{-1}[N']$ زمرة جزئية ناظمية من G.

37. أثبت أنه إذا كانت G غير إبدالية، فإنّ زمرة العامل $G/Z(G)$ ليست دورية. [*مساعدة*: أثبت الإيجاب المعاكس المكافئ – أي إنه إذا كانت $G/Z(G)$ دورية، فإنّ G إبدالية. (ولهذا السبب $Z(G)$ $(= G$].

38. باستخدام التمرين 37، أثبت إنّ زمرة غير إبدالية G رتبتها pq، حيث p و q عددان أوليّان، لها مركز تافه.

39. أثبت إنّ A_n بسيطة لِـ $n \geq 5$ باتباع الخطوات والمساعدات المعطاة.

أ. أثبت إنّ A_n تحتوي الدورات الثلاثية كلها، إذا كان $n \geq 3$.

ب. أثبت إنّ A_n تَتَوَلَّدُ من الدورات الثلاثية لِـ $n \geq 3$.

[*مساعدة*: لاحظ إنّ $(a, b)(c, d) = (a, c, b)(a, c, d)$ و $(a,c)(a,b) = (a, b, c)$].

ج. ليكن r و s عنصرين محددين من $\{1, 2, \ldots, n\}$ لِـ $n \geq 3$. أثبت إنّ A_n مُوَلَّدَةٌ من خلال n من الدورات الثلاثية "الخاصة" على الصورة (r, s, i) لِـ $1 \leq i \leq n$.

[مساعدة: أثبت إنّ الدورات الثلاثية جميعها حاصل ضرب لدورات ثلاثية «خاصة» بحساب:

$$(r,s,i)^2 \text{، } (r,s,j)(r,s,i)^2 \text{، } (r, s, j)^2 (r,s,i)$$

و

$$(r,s,i)^2 (r,s,k)(r,s,j)^2 (r,s,i)$$

لاحظ إنّ حواصل الضرب هذه تعطي الأنواع الممكنة جميعها للدورات الثلاثية].

د. لتكن N زمرة جزئية ناظمية من A_n لـ $n \geq 3$، فأثبت أنه إذا كانت N تحتوي على دورة ثلاثية، فإنّ $N = A_n$. [*مساعدة*: أثبت إنّ $(r, s, i) \in N$ يؤدي إلى $(r, s, j) \in N$ لـ $j = 1, 2, \ldots, n$ بحساب $((r, s)(i, j))(r, s, i)^2((r, s)(i, j))^{-1}$].

هـ. لتكن N زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من A_n لـ $n \geq 5$، فأثبت إنّ واحدة من الحالات الآتية يجب أن تتحقق، واستنتج في كل حالة إنّ $N = A_n$.

حالة ***I*** N تحتوي على دورة ثلاثية.

حالة ***II*** N تحتوي على حاصل ضرب لدورات منفصلة، واحدة منها على الأقل طولها أكبر من 3. [مساعدة: افترض إنّ N تحتوي على حاصل ضرب منفصل على الصورة $\sigma = \mu(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. أثبت إنّ $\sigma^{-1}(a_1, a_2, a_3)\sigma(a_1, a_2, a_3)^{-1}$ في N، واحسبه].

حالة ***III*** N تحتوي على حاصل ضرب منفصل على الصورة $\sigma = \mu(a_4, a_5, a_6)(a_1, a_2, a_3)$.

[مساعدة: أثبت إنّ $\sigma^{-1}(a_1, a_2, a_4)\sigma(a_1, a_2, a_4)^{-1}$ في N، واحسبه].

حالة ***IV*** N تحتوي على حاصل ضرب منفصل على الصورة $\sigma = \mu(a_1, a_2, a_3)$، حيث μ حاصل ضرب مناقلات منفصلة. [مساعدة: أثبت إنّ $\sigma^2 \in N$، واحسبه].

حالة ***V*** N تحتوي على حاصل ضرب منفصل σ على الصورة $\sigma = \mu(a_3, a_4)(a_1, a_2)$، حيث μ حاصل ضرب عدد زوجي من مناقلات منفصلة. [مساعدة: أثبت إنّ $\sigma^{-1}(a_1, a_2, a_3)\sigma(a_1, a_2, a_3)^{-1}$ في N، واحسبه لتستنتج إنّ $\alpha = (a_2, a_4)(a_1, a_3)$ في N، وباستخدام $n \geq 5$ للمرة الأولى، أوجد $i \neq a_1, a_2, a_3, a_4$ في $\{1, 2, \ldots, n\}$ ثم لتكن $\beta = (a_1, a_3, i)$. أثبت إنّ $\beta^{-1}\alpha\beta\alpha \in N$، واحسبه].

40. لتكن N زمرة جزئية ناظمية من زمرة G، ولتكن H زمرة جزئية من G، وليكن $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$. فأثبت إنّ HN زمرة جزئية من G، وهي الزمر الجزئية الأصغر التي تحتوي على كل من N و H.

41. بالرجوع إلى التمرين السابق، لتكن M أيضًا زمرة جزئية ناظمية من G، فأثبت مرة أخرى إنّ NM زمرة جزئية ناظمية من G.

42. أثبت أنه إذا كانت H و K زمرتين جزئيتين ناظميتين من زمرة G، بحيث إنّ $H \cap K = \{e\}$، فإن $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$. [*مساعدة*: اعتبر المُبَدِّل

$$hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})\ ]$$

تأثير الزمرة على مجموعة[1] Group Action On a Set

رأينا أمثلة تبين كيف إنّ الزمر يمكن أن تؤثر في الأشياء، مثل زمرة التناظرات لمثلث أو لمربع، وزمرة دورانات مكعب، والزمرة الخطية العامة المؤثرة في $\mathbb{R}^n$، وهكذا، وسنقدم في هذا الفصل الفكرة العامة لتأثير الزمرة على مجموعة، حيث يقدم الفصل الآتي تطبيقًا على العدّ.

الفكرة من تأثير الزمرة

التعريف 1.2 يعرف عملية ثنائية * على مجموعة S لتكون دالة ترسل $S \times S$ إلى S، حيث تعطينا الدالة * قاعدة "لضرب" عنصر s_1 في S، وعنصر s_2 في S؛ لتنتج عنصرًا $s_1 * s_2$ في S.

بوجه عام، لأي مجموعات A و B و C يمكننا أن ننظر إلى الدالة $*: A \times B \to C$ على أنها تعرف "ضربًا"، حيث إنّ أي عنصر a في A ضرب أي عنصر b في B له كقيمة عنصر ما c في C، وبالتأكيد، نكتب $a * b = c$، أو بصورة أكثر بساطة $ab = c$، وسوف نهتم في هذا الفصل بالحالة، حيث X مجموعة، و G زمرة، ولدينا دالة $*: G \times X \to X$. يجب أن نكتب $*(g, x)$ على النحو $g * x$ أو gx.

1.16 تعريف لتكن X مجموعة، و G زمرة. **يعرف التأثير لـ G (an action of)** على X على أنه الدالة $*: G \times X \to X$ التي تحقق:

1. $e * x = x$ لكل $x \in X$.

2. لكل $g_1, g_2 \in G$ ولكل $x \in X$، $(g_1g_2)(x) = g_1(g_2x)$

تحت هذين الشرطين، X هي **مجموعة G– (G–set)**. ■

2.16 مثال لتكن X أي مجموعة، ولتكن H زمرة جزئية من الزمرة S_X المؤلفة من كل التباديل لـ X، عندئذ، X هي مجموعة–H، حيث إنّ التأثير لـ $\sigma \in H$ على X هو تأثيره بوصفه عنصرًا في S_X، بحيث إنّ $\sigma x = \sigma(x)$ لكل $x \in X$، وينتج الشرط 2 من تعريف ضرب التباديل بوصفها دالة تركيب، والشرط 1 مباشر من تعريف التبديل المحايد على أنه الدالة المحايدة، لاحظ إنّ – على وجه التخصيص – $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ هي مجموعة – S_n. ▲

ستبين المبرهنة الآتية أنه اذا كانت X مجموعة –G، وكان $g \in G$، فإنّ الدالة $\sigma_g: X \to X$ المعرفة بـ $\sigma_g(x) = gx$ هي تبديل لـ X، وأنه يوجد تشاكل $\phi: G \to S_X$، بحيث إنّ تأثير G على X هو أساسًا – المثال 2.16 – التأثير لزمرة الصور الجزئية $H = \phi[G]$ من S_X على X. تأثيرات كهذه للزمر الجزئية من S_X على X تَصِفُ تأثيرات الزمر المحتملة كلها على X، وعند دراسة المجموعة X، فإنّ التأثيرات باستخدام الزمر الجزئية من S_X تكفي، على أي حال، تستخدم أحيانًا مجموعة X لدارسة G عن طريق تأثير الزمرة G على X، إذن نحتاج إلى المفهوم الأكثر عمومًا والمعطى بالتعريف 1.16.

3.16 مبرهنة لتكن X مجموعة–G، ولكل $g \in G$ الدالة $\sigma_g: X \to X$، المعرفة بـ $\sigma_g(x) = gx$ لـ $x \in X$ هي تبديل لـ X، أيضًا، الدالة $\phi: G \to S_X$ المعرفة بـ $\phi(g) = \sigma_g$ هي تشاكل، ولها الخاصية $\phi(g)(x) = gx$.

البرهان لإثبات أن σ_g تبديل لـ X، يجب أن نثبت أنه دالة أحادية لـ X وبصورة غامرة لنفسها. افترض أنّ

---

1. هذا الفصل متطلب سابق فقط للفصلين 17 و 36.

$\sigma_g(x_1)=\sigma_g(x_2)$ لِـ $x_1, x_2 \in X$، عندئذٍ $gx_1 = gx_2$، بناءً على ذلك، $g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2)$، وباستخدام الشرط 2 من التعريف 1.16، نرى إنّ $(g^{-1}g)x_1 = (g^{-1}g)x_2$ وهكذا $ex_1 = ex_2$. وعليه، فالشرط 1 من التعريف يُنْتِج $x_1 = x_2$، وهكذا σ_g أحادي. الشرطان من التعريف يبينان إنّ لـ $x \in X$ لدينا $\sigma_g(g^{-1}x) = g(g^{-1})x = (g g^{-1})x = ex = x$، وهكذا σ_g ترسل X بصورة غامرة إلى X. وعليه، σ_g في الواقع تبديل.

لإثبات إنّ الدالة $\phi: G \to S_X$ المعرفة بـ $\phi(g) = \sigma_g$ تشاكل، يجب أن نثبت إنّ $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ لكل $g_1, g_2 \in G$، حيث نثبت المساواة لهذين التبديلين في S_X وذلك بإثبات إنّ كليهما يأخذ $x \in X$ إلى العنصر نفسه، ونحصل باستخدام الشرطين في التعريف 1.16 وقاعدة تركيب الدوال على:

$$\begin{aligned}\phi(g_1g_2)(x) &= \sigma_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)x = g_1(g_2x) = g_1\sigma_{g_2}(x) = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x))\\ &= (\sigma_{g_1}\circ\sigma_{g_2})(x) = (\sigma_{g_1}\sigma_{g_2})(x) = (\phi(g_1)\phi(g_2))(x).\end{aligned}$$

وعليه، فإنّ ϕ تشاكل، وتنتج الخاصية المذكورة لِـ ϕ مباشرة؛ لإنّ لدينا من تعاريفنا

$$\phi(g)(x) = \sigma_g(x) = gx \qquad \blacklozenge$$

ينتج من المبرهنة السابقة والمبرهنة 15.13 أنه إذا كانت X مجموعة–G، فإنّ المجموعة الجزئية من G التي تترك كل عنصر في X ثابتًا، هي زمرة جزئية ناظمية من G، ويمكننا أن نَعدّ X مثل مجموعة–G/N، حيث يعرَّف التأثير لمجموعة المشاركة gN على X بـ $(gN)x = gx$ لكل $x \in X$، وإذا كانت $N = \{e\}$، فإنّ العنصر المحايد لـ G هو العنصر الوحيد الذي يترك كل $x \in X$ ثابتاً؛ عندها نقول: إنّ لـ G تأثير أمين **(acts faithfully)** على X. زمرة G **متعدية (transitive)** على مجموعة–G، إذا كان لكل $x_1, x_2 \in X$ يوجد $g \in G$، بحيث إنّ $gx_1 = x_2$، لاحظ إنّ G متعدية على X، إذا وفقط إذا كانت الزمرة الجزئية $\phi[G]$ من S_X متعدية على X، كما عُرِّف في التمرين 49 للفصل 8.

فيما سيأتي سوف نقدم أمثلة إضافية لمجموعات–G.

4.16 مثال كل زمرة G هي نفسها مجموعة–G، حيث إنّ التأثير في $g_2 \in G$ من خلال $g_1 \in G$ أعطي بضرب من اليسار، أي إنّ $*(g_1, g_2) = g_1g_2$. إذا كانت H زمرة جزئية من G، يمكننا أيضًا أن نعدّ G بوصفها مجموعة–H، حيث $*(h,g) = hg$. ▲

5.16 مثال لتكن H زمرة جزئية من G، عندئذٍ G هي مجموعة–H بالنسبة إلى الترافق، حيث $*(h, g) = hgh^{-1}$ لِـ $g \in G$ و $h \in H$، فالشرط الأولَ واضح، ولاحظ بالنسبة إلى الشرط 2 إنّ:

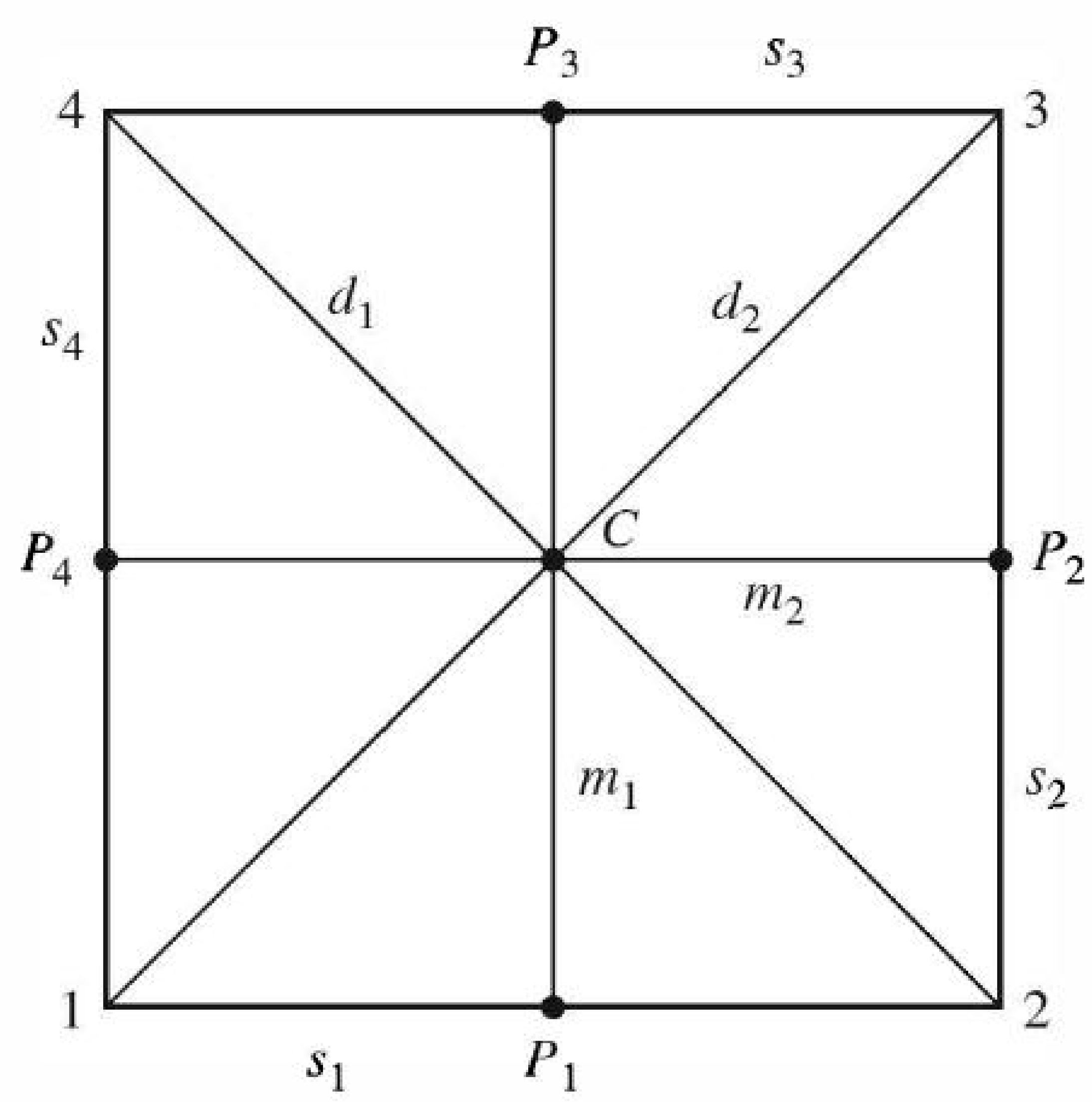
$$*(h_1h_2, g) = (h_1h_2)g(h_1h_2)^{-1} = h_1(h_2gh_2^{-1})h_1^{-1} = *(h_1, *(h_2, g)).$$

دائمًا نكتب هذا التأثير لـ H في G بالنسبة إلى الترافق على النحو: hgh^{-1}، وسوف يسبب الاختصار hg الموصوف قبل التعريف إرباكًا فظيعًا مع عملية الزمرة لِـ G. ▲

6.16 مثال للطلاب الذين درسوا فضاء المتجهات مع قياسات حقيقية (أو مركبة)، نَذْكُرُ إنّ المسلمات $(rs)\mathbf{v} = r(s\mathbf{v})$ و $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ للقياسين r و s وللمتجه $\mathbf{v}$، تُبَيِّنُ إنّ مجموعة المتجهات هي مجموعة–$\mathbb{R}^*$ (أو مجموعة–$\mathbb{C}^*$) لزمرة الضرب للقياسات غير الصفرية. ▲

مثال 7.16 لتكن H زمرة جزئية من G، ولتكن L_H مجموعة كل مجموعات المشاركة اليسرى لـ H، عندئذ: L_H مجموعة$-G$، حيث التأثير لـ $g \in G$ في مجموعة المشاركة اليسرى xH معطى بـ $g(xH) = (gx)\,H$. لاحظ أن هذا التأثير حسن التعريف: إذا كانت $yH = xH$، فإن $y = xh$ لعنصر ما $h \in H$، و $g(yH) = (gy)H = (gxh)H = (gx)(hH) = (gx)H = g(xH)$ وتبين سلسلة من التمارين إنّ كل مجموعة$-G$ تماثل واحدة يمكن أن تُشكَّل باستخدام مجموعات المشاركة اليسرى هذه بوصفها لبنات بناء. (انظر التمارين من 14 إلى 17). ▲

مثال 8.16 لتكن G الزمرة $D_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$ زمرة تناظرات المربع الموصوفة في المثال 10.8، وعرضنا في الشكل 9.16 المربع برؤوس 1، 2، 3، 4 كما في الشكل 11.8، ورمزنا أيضًا للجوانب بـ s_1، s_2، s_3، s_4 للقطرين بـ d_1 و d_2، للمحورين الأفقي والعمودي بـ m_1 و m_2، لنقطة المركز بـ C، ولنقاط منتصف الأضلاع s_i بـ P_i. تذكر إنّ P_i تناظر دوران المربع عكس عقارب الساعة بمقدار $\pi i/2$ بالتقدير الدائري، μ_i تناظر انقلابًا على المحور m_i، و δ_i تناظر انقلابًا على القطر d_i.



الشكل 9.16

الجدول 10.16

	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ρ_0	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ρ_1	2	3	4	1	s_2	s_3	s_4	s_1	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_2	P_3	P_4	P_1
ρ_2	3	4	1	2	s_3	s_4	s_1	s_2	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_3	P_4	P_1	P_2
ρ_3	4	1	2	3	s_4	s_1	s_2	s_3	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_4	P_1	P_2	P_3
μ_1	2	1	4	3	s_1	s_4	s_3	s_2	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_1	P_4	P_3	P_2
μ_2	4	3	2	1	s_3	s_2	s_1	s_4	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_3	P_2	P_1	P_4
δ_1	3	2	1	4	s_2	s_1	s_4	s_3	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_2	P_1	P_4	P_3
δ_2	1	4	3	2	s_4	s_3	s_2	s_1	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_4	P_3	P_2	P_1

لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, C, P_1, P_2, P_3, P_4\}$

عندئذ يمكن أن تُعدّ X بوصفها مجموعة$-D_4$ على نحو طبيعي، والجدول 10.16 يَصفُ بالكامل التأثير لـ D_4 على X، وقد أعطي ليزود بإيضاحات هندسية حول الأفكار التي ستُقدَم، ويجب أن نتأكد قبل الاستمرار من فهم كيفية تنظيم هذا الجدول. ▲

زمرة توحد الخصائص الجزئية

لتكن X مجموعة$-G$، وليكن $x \in X$ و $g \in G$؛ لذا، من المهم معرفة متى $gx = x$.

لتكن $X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$ و $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$

11.16 مثال لتكن X المجموعة $-D_4$ المعطاة في المثال 8.16. لدينا:

$$X_{\rho_0} = X,\ X_{\rho_1} = \{C\},\ X_{\mu_1} = \{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\}$$

أيضًا، مع $G = D_4$

$$G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}, \qquad G_{s_3} = \{\rho_0, \mu_1\}, \qquad G_{d_1} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}$$

سنترك حسابات الأخريات X_σ و G_x للتمرينين 1 و 2. ▲

لاحظ إنّ المجموعات الجزئية G_x المعطاة في المثال السابق هي - في كل حالة - زمر جزئية من G، وهذا صحيح بوجه عام.

12.16 مبرهنة لتكن X مجموعة$-G$، فإنّ G_x زمرة جزئية من G لكل $x \in X$.

البرهان ليكن $x \in X$، وليكن $g_1, g_2 \in G_x$، عندئذٍ $g_1 x = x$ و $g_2 x = x$، وبناءً على ذلك، $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x$ وهكذا $g_1 g_2 \in G_x$ و G_x مغلقة بالنسبة إلى العملية المتولدة لـ G، وطبعًا $ex = x$، وهكذا $e \in G_x$. إذا كان $g \in G_x$ فإنّ $gx = x$ وهكذا

$$x = e\,x = (g^{-1}g)\,x = g^{-1}(gx) = g^{-1}x$$

وبناءً على ذلك، $g^{-1} \in G_x$، وعليه، G_x زمرة جزئية من G. ♦

13.16 تعريف لتكن X مجموعة$-G$، وليكن $x \in X$. الزمرة الجزئية G_x **هي زمرة توحد الخصائص الجزئية لـ x (isotropy subgroup of)**. ■

مدارات

للمجموعة$-D_4$، X في المثال 8.16 مع جدول التأثير في الجدول 10.16، نُقلت العناصر في المجموعة الجزئية $\{1, 2, 3, 4\}$ إلى عناصر لهذه المجموعة الجزئية نفسها بالنسبة إلى التأثير من خلال D_4، إضافة إلى ذلك، كلّ من العناصر 1، و2، و3 و4 يحمل إلى العناصر الأخرى كلها للمجموعة الجزئية، من خلال العناصر المختلفة لـ D_4، سنتابع إثبات إنّ كل مجموعة$-G$، X يمكن تجزئتها إلى مجموعات جزئية من هذا النوع.

14.16 مبرهنة لتكن X مجموعة$-G$، ولـ $x_1, x_2 \in X$ ليكن $x_1 \backsim x_2$، إذا وفقط إذا كان يوجد $g \in G$، بحيث إنّ $gx_1 = x_2$، عندئذٍ $\sim$ علاقة تكافؤ على X.

البرهان لكل $x \in X$، لدينا $ex = x$، وهكذا $x \backsim x$ و $\sim$ منعكسة.

افترض $x_1 \backsim x_2$ وهكذا $gx_1 = x_2$ لعنصر ما $g \in G$، عندئذ
$g^{-1}x_2 = g^{-1}(gx_1) = (g^{-1}g)x_1 = ex_1 = x_1$، وعليه، $x_2 \backsim x_1$ و ~ متناظرة.

أخيرًا، إذا كان $x_1 \backsim x_2$ و $x_2 \backsim x_3$، فإنّ $g_1x_1 = x_2$ و $g_2x_2 = x_3$ لعناصر ما $g_1, g_2 \in G$. عندئذ
$(g_2 g_1)\, x_1 = g_2(g_1x_2) = g_2x_2 = x_3$ إذن، $x_1 \backsim x_3$ و~ متعدية. ♦

15.16 تعريف لتكن X مجموعة$-G$، وكل خلية في التجزئة لعلاقة التكافؤ الموصوفة في المبرهنة 14.16، هي **مدار في X (orbit in)** بالنسبة إلى **(under)** G. إذا كان $x \in X$، فإنّ الخلية التي تحتوي على x هي **المدار لـ (orbit of)** x، وقد رمزنا لهذه الخلية بـ Gx. ■

تقع العلاقة بين المدارات في X وبنية الزمرة لـ G في صميم التطبيقات التي تظهر في الفصل 17، وتقدم المبرهنة الآتية هذه العلاقة، تذكر أننا لمجموعة X استخدمنا $|X|$ ليرمز الى العدد الرئيس (عدد العناصر في) لـ X، و $(G:H)$ ليرمز الى دليل الزمرة الجزئية H من G.

16.16 مبرهنة لتكن X مجموعة$-G$، ولتكن $x \in X$، عندئذ $|Gx| = (G: G_x)$. إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ $|Gx|$ قاسم $|G|$.

البرهان نعرِّف دالة أحادية ψ من Gx وبصورة غامرة إلى عائلة مجموعات المشاركة اليسرى لـ G_x في G. ليكن $x_1 \in Gx$ عندئذ يوجد $g_1 \in G$، بحيث إنّ $g_1\, x = x_1$، ونُعَرِّفُ $\psi(x_1)$ لتكون المجموعة المشاركة اليسرى g_1G_x لـ G_x، ويجب أن نثبت إنّ هذه الدالة حسنة التعريف، مستقلة عن اختيار $g_1 \in G$، بحيث إنّ $g_1x = x_1$، افترض أيضًا إنّ $g_1'\, x = x_1$، عندئذ، $g_1x = g_1'\, x$، وهكذا $g_1^{-1}(g_1x) = g_1^{-1}(g_1'x)$، ومنها نستنتج إنّ $x = (g_1^{-1}g_1')x$، إذن $g_1^{-1} g_1' \in G_x$ ومن ثم $g'_1 \in g_1G_x$ و $g_1G_x = g'_1G_x$ وعليه، فإنّ الدالة ψ حسنة التعريف.

لإثبات إنّ الدالة ψ أحادية، افترض أنّ $x_1, x_2 \in Gx$ و $\psi(x_1) = \psi(x_2)$، عندئذ يوجد

$g_1, g_2 \in G$ بحيث إنّ $x_1 = g_1x$، $x_2 = g_2x$ و $g_2 \in g_1G_x$، وعندئذ $g_2 = g_1g$ لعنصر ما $g \in G_x$، وهكذا $x_2 = g_2\, x = g_1\, (gx) = g_1x = x_1$. إذن ψ أحادية.

أخيرًا، سنثبت إنّ كل مجموعة مشاركة يسرى لِـ G_x في G هي على الصورة $\psi\, (x_1)$ لعنصر ما $x_1 \in Gx$، لتكن g_1G_x مجموعة مشاركة يسرى، عندئذ، إذا كان $g_1\, x = x_1$، فلدينا $g_1\, G_x = \psi(x_1)$، وعليه، ψ ترسل Gx بصورة أحادية وغامرة إلى مجموعة المجموعات المشاركة اليمنى، وهكذا $|Gx| = (G: G_x)$.

إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ المعادلة $|G| = |G_x|\, (G: G_x)$ تبين إنّ $|Gx| = (G: G_x)$ قاسم لِـ $|G|$. ♦

17.16 مثال لتكن X المجموعة $-D_4$ مع جدول تأثير معطًى في الجدول 10.16، مع $G = D_4$، لدينا $G1 = \{1, 2, 3, 4\}$ و $G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}$؛ ولأن $|G| = 8$، فلدينا $|G1| = (G: G_1) = 4$. ▲

يجب ألّا نتذكر فقط معادلة عدد العناصر في المبرهنة 16.16، بل أن نتذكر أيضًا العناصر لِـ G التي تنقل x إلى g_1x، فهي بالضبط عناصر مجموعة المشاركة اليسرى g_1G_x، أي إنه إذا كان $g \in G_x$، فإنّ $(g_1g)x = g_1(gx) = g_1x$، ومن ناحية أخرى، إذا كان $g_2\, x = g_1x$، فإن

$g_1^{-1}\, (g_2x) = x$، وهكذا $(g_1^{-1}g_2)x = x$. إذن $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ و $g_2 \in g_1\, G_x$.

■ تمارين 16

حسابات

في التمارين من 1 إلى 3، لتكن:

$$X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, C, P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

المجموعة $-D_4$ للمثال 8.16 مع جدول تأثير معطى في الجدول 10.16. أوجد ما يأتي، حيث $G = D_4$:

1. المجموعات المحددة X_σ لكل $\sigma \in D_4$، أي $X_{\rho_0}, X_{\rho_1}, \ldots, X_{\delta_2}$.

2. زمر توحيد الخصائص G_x لكل $x \in X$، أي $G_1, G_2, \ldots, G_{p_3}, G_{p_4}$.

3. المدارات في X بالنسبة إلى D_4.

مفاهيم

في التمرينين 4 و 5 صحِّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

4. الزمرة G ذات تأثير أمين على X، إذا وفقط إذا كان $gx = x$ يؤدي إلى $g = e$.

5. لتكن X مجموعة $-G$. الزمرة G متعدية على X، إذا وفقط إذا كان لعنصر ما $g \in G$، gx يمكن أن يكون أي x أخرى.

6. لتكن X مجموعة$-G$، ولتكن $S \subseteq X$، إذا كانت $Gs \subseteq S$ لكل $s \in S$، فإنّ S **مجموعة** $-G-$ **جزئية**$-$ **(sub-G-set)**. صِفْ مجموعة$-G-$ جزئية من X بدلالة مدارات في X و G.

7. صِفْ مجموعة$-G$ متعدية بدلالة مداراتها.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. كل مجموعة$-G$ هي زمرة أيضًا.

______ ب. كل عنصرٍ في مجموعة$-G$ يترك ثابتًا محددًا عن طريق العنصر المحايد في G.

______ جـ. إذا كان كل عنصرٍ في مجموعة$-G$ يترك ثابتًا من خلال العنصر نفسه g في G، فإنّ g يجب أن يكون العنصر المحايد e.

______ د. لتكن X مجموعة$-G$ مع $x_1, x_2 \in X$ و $g \in G$، إذا كان $gx_1 = gx_2$، فإن $x_1 = x_2$

______ هـ. لتكن X مجموعة$-G$ مع $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$، اذا كان $g_1 x = g_2 x$، فإن $g_1 = g_2$.

______ و. لتكن X مجموعة $-G$ كل مدار في X هو مجموعة$-G-$جزئية متعدية.

______ ز. لتكن X مجموعة$-G$ و $H \le G$، عندئذٍ X يمكن أن تُعدّ وبطريقة طبيعية بوصفها مجموعة$-H$.

______ ح. بالرجوع إلى (ز)، المدارات في X بالنسبة إلى H هي نفسها كالمدارات في X بالنسبة إلى G.

______ ط. إذا كانت X مجموعة $G-$، فإن كل عنصر في G يؤثر بوصفه تبديلًا لـ X.

______ ي. لتكن X مجموعة $G-$ ولتكن $x \in X$. إذا كانت G منتهية، فإن

$|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

9. لتكن X و Y مجموعتي $G-$ مع الزمرة G نفسها، **التماثل (isomorphism)** بين X و Y هو دالة $\phi: X \rightarrow Y$ أحادية وغامرة لـ Y، ويحقق $g\phi(x) = \phi(gx)$ لكل $x \in X$ و $g \in G$. مجموعتا $G-$ **متماثلتان (isomorphic)**، إذا كان مثل هذا التماثل بينهما موجودًا، لتكن X مجموعة D_4- المعطاة في المثال 8.16، أجب عما يأتي:

أ. أوجد مدارين مختلفين لـ X يكونان مجموعتي D_4- جزيئتين متماثلتين.

ب. أثبت إنّ المدارين $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ هما مجموعتا D_4- جزئيتان غير متماثلتين. [*مساعدة*: أوجد عنصرًا في G يؤثر بنمط جوهري مختلف في كلا المدارين].

ج. هل المداران اللذان أعطيتهما في إجابتك للفرع (أ) هما مجموعتا D_4- الجزئيتان المتماثلتان الوحيدتان من X

10. لتكن X مجموعة D_4- المعطاة في المثال 8.16.

أ. هل تأثير D_4 أمين على X

ب. أوجد المدارات في X كلها التي تأثير D_4 عليها أمين بوصفها مجموعة D_4- جزئية.

براهين

11. لتكن X مجموعة $G-$، فأثبت إنّ تأثير G أمين على X، إذا وفقط إذا كان أي عنصرين مختلفين في G ليس لهما التأثير نفسه في عناصر X جميعها.

12. لتكن X مجموعة $G-$، ولتكن $Y \subseteq X$، ولتكن $G_Y = \{g \in G \mid gy = y$ لكل $y \in Y\}$، فأثبت إنّ G_Y زمرة جزئية من G، تعمم المبرهنة 12.16.

13. لتكن G زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، ليكن التأثير لـ $\theta \in G$ في المستوى الحقيقي $\mathbb{R}^2$ معطًى بتدوير المستوى عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل بمقدار θ بالتقدير الدائري، ولتكن P نقطة غير نقطة الأصل في المستوى.

أ. أثبت أن $\mathbb{R}^2$ مجموعة $G-$.

ب. صِفْ هندسيًّا المدار الذي يحوي P.

جـ. أوجد الزمرة G_P.

التمارين من 14 إلى 17 تبين كيف أن مجموعات $G-$ المحتملة جميعها، تبعاً للتماثل (انظر التمرين 9)، يمكن أن تُشَكَّلُ من الزمرة G.

14. لتكن $\{X_i \mid i \in I\}$ مجموعة مجموعات منفصلة، وهكذا $X_i \cap X_j = \emptyset$ لـ $i \neq j$، ولتكن كل X_i مجموعة $G-$ للزمرة G نفسها.

أ. أثبت إنّ $\bigcup_{i\in I} X_i$ يمكن أن ينظر إليه بطريقة طبيعية بوصفه مجموعة $G-$، **الاتحاد (union)** لمجموعات $G-$، X_i

ب. أثبت إنّ كل مجموعة $-G$ هي الاتحاد لمداراتها.

15. لتكن X مجموعة $-G$ متعدية، ولتكن $x_0 \in X$، فأثبت إنّ X تماثل L (المجموعة $-G$، انظر التمرين 9)، لكل مجموعات المشاركة اليسرى لـ G_{x_0} الموصوفة في المثال 7.16. [مساعدة: لـ $x \in X$، افترض إنّ $x = gx_0$، وعرِّف $\phi: X \to L$ بـ $\phi(x) = g\,G_{x_0}$. تأكد من إثبات إنّ ϕ حسن التعريف!].

16. لتكن X_i لـ $i \in I$ مجموعات $-G$ للزمرة G نفسها، وافترض إنّ المجموعات X_i ليس بالضرورة منفصلة. لتكن $X'_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ لكل $i \in I$، عندئذ المجموعات X'_i منفصلة، وكل منها يمكن أن يُعدّ بوصفه مجموعة $-G$ بطريقة سهلة. (العناصر في X_i ببساطة عُلِّمَت بـ i لتمييزها عن عناصر X_j لـ $i \neq j$). المجموعة $-G$ $\bigcup_{i\in I} X'_i$ هي الاتحاد المنفصل **(disjoint union)** لمجموعات $-G$، X_i. باستخدام التمرينين 14 و 15 أثبت إنّ كل مجموعة $-G$ تماثل اتحادًا منفصلاً لمجموعات $-G$ مشاركة يسرى كالموصوفة في المثال 7.16.

17. التمارين السابقة بَيَّنَت إنّ كل مجموعة $-G$، X تماثل اتحادًا منفصلاً لمجموعات $-G$ مجموعات مشاركة يسرى. السؤال الذي يطرح نفسه، إذا كانت مجموعتا $-G$ مجموعتي مشاركة يسرى لزمرتين جزئيتين مختلفتين H و K من G فهل هما متماثلتان. لاحظ إنّ الدالة المعرفة في المساعدة للتمرين 15 تعتمد على الاختيار لـ x_0 «بوصفها نقطة أساس». إذا بدلت x_0 بـ $g_0\, x_0$ وإذا كان $G_{x_0} \neq G_{g_0x_0}$، فإنّ المجموعتين L_H لمجموعات المشاركة اليسرى لـ $H = G_{x_0}$ و L_K لمجموعات المشاركة اليسرى لـ $K = G_{g_0x_0}$ تشكلان مجموعتي $-G$ مختلفتين، اللتين يجبُ أن تكونا متماثلتين؛ لأن كليهما L_H و L_K تماثلان X.

أ. لتكن X مجموعة $-G$ متعدية، ولتكن $x_0 \in X$ و $g_0 \in G$، وإذا كانت $H = G_{x_0}$،

فصِف $K = G_{g_0x_0}$ بدلالة H و g_0.

ب. بالاعتماد على فرع (أ)، خَمِّن شروطًا على الزمرتين الجزئيتين H و K من G، بحيث إنّ مجموعات $-G$ مجموعات المشاركة اليسرى لـ H و K متماثلة.

جـ. أثبت مخمنتك في الفرع (ب).

18. وفقًا للتماثل – ما العدد المتوافر لمجموعات $-\mathbb{Z}_4$، X المتعدية؟ (استخدم التمارين السابقة). أعط مثالاً لكل نوع من التماثلات، بعمل جدول تأثير لكل منها كما في الجدول 10.16. خذ أحرفًا صغيرة a, b, c، وهكذا إلى آخره بوصفها رموزًا لعناصر المجموعة X.

19. أعد التمرين 18 للزمرة $\mathbb{Z}_6$.

20. أعد التمرين 18 للزمرة S_3، واسرد العناصر لـ S_3 في الترتيب

$$\iota, (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 2)$$

تطبيقات لمجموعات $G-$ على العد[1] Applications of G-Sets to Counting

يمثل هذا الفصل تطبيقًا لعملنا مع مجموعات $G-$ على العد. مثلاً: افترض أننا نرغب في عَدِّ عدد الطرق المتمايزة لتَعْليم أوجه المكعب الستة من واحدة إلى ست نقاط لتُشَكِّل حجر نرد، إذ إنّ حجر النرد القياسي يُعَلِّمَ بحيث عندما يوضع على الطاولة، حيث 1 في الأسفل و 2 في اتجاه الأمام، 6 في الأعلى، 3 على اليسار، 4 على اليمين و 5 من الخلف، بالطبع هناك طرق أخرى مختلفة ممكنة لتَعْليم المكعب لتعطي حجر نرد متمايزًا.

لنميز بين أوجه المكعب من هذه اللحظة، ونسميها الأسفل، والأعلى، واليسار، واليمين، والأمام، والخلف، عندئذ، يمكن أن يأخذ الأسفل واحدة من ست علامات من نقطة إلى ست نقاط، والأعلى أي واحدة من العلامات الخمس الباقية، وهكذا، حيث توجد $720 = 6!$ طريقة ممكنة لتَعْلِيم أوجه المكعب بصورة كاملة. بعض التعليمات تعطي حجر النرد نفسه الذي تعطيه أخريات، ونعني بذلك إنّ إحدى التعليمات يمكن أن تحمل إلى أخرى بتدوير المكعب المعلّم، فمثلاً: إذا دُوِّرَ حجر النرد القياسي الموصوف في الأعلى $90°$ عكس عقارب الساعة، كأننا ننظر إليه من الأعلى، فإنّ 3 ستكون على الوجه الأمامي بدل 2 لكنه حجر النرد نفسه.

هناك 24 طريقة محتملة لوضع مكعب على طاولة؛ لأن أي وجه من الأوجه الستة يمكن أن يوضع للأسفل، ومن ثَمَّ أي واحدٍ من الأربعة للأمام، يعطي $24 = 6.4$ وضعًا محتملاً، فأيُّ وضع يمكن أن ينجز من أي وضع آخر بتدوير حجر النرد، حيث تشكل هذه التدويرات زمرة G، التي تماثلَ زمرة جزئية من S_8 (انظر التمرين 45 للفصل 8). اجعل X الطرق الـ 720 المحتملة لتَعليم المكعب، واجعل G تؤثر في X بتدوير المكعب، سنأخذ في الحسبان تعليمين ليعطيا حجر النرد نفسه، إذا أمكن حمل أحدهما إلى الآخر بالنسبة إلى تأثير عنصرٍ في G، أي بتدوير المكعب، بكلمات أخرى سنعدّ كل مدار في X بالنسبة إلى G يقابل حجر نرد وحيد، ومدارات مختلفة لتعطي أحجار نرد مختلفة، حيث إنّ تحديد عدد أحجار النرد المتمايزة سيؤدي إلى السؤال عن تحديد عدد المدارات بالنسبة إلى G في مجموعة $G-$ ،X.

المبرهنة الآتية تعطي أداة لتحديد عدد المدارات في مجموعة $G-$ ،X بالنسبة إلى G، تذكر أنه لكل $g \in G$ جعلنا X_g مجموعة العناصر X المتروكة ثابتة من خلال g؛ ولذلك،

$X_g = \{x \in X | \; gx = x\}$، وتذكر أيضًا أنه لكل $x \in X$ جعلنا $G_x = \{g \in G | \; gx = x\}$ و Gx هو المدار لـ x بالنسبة إلى G.

1.17 مبرهنة (صيغة بيرنسايد **(Burnside's Formula)**) لتكن G زمرة منتهية، وX مجموعة$-G$ منتهية، فإذا كان r عدد المدارات في X بالنسبة إلى G، فإنّ:

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |Xg|. \qquad (1)$$

البرهان نعُدّ الأزواج كلها (g, x)، حيث $gx = x$، وليكن N عدد هذه الأزواج. لكل $g \in G$ يوجد $|X_g|$ أزواج لها g بوصفه عضوًا أوليًّا. وعليه:

---

1 – هذا الفصل لن يستخدم في بقية الكتاب.

$$N = \sum_{g \in G} |X_g| \tag{2}$$

من ناحية أخرى، لكل $x \in X$ يوجد $|G_x|$ من أزواج لها x بوصفه عضوًا ثانيًا، وعليه، لدينا أيضًا:

$$N = \sum_{x \in X} |G_x|$$

من المبرهنة 16.16 لدينا $|Gx| = (G : G_x)$، لكننا نعلم إنّ $(G : G_x) = |G| / |G_x|$ وهكذا نحصل على $|G_x| = |G| / |Gx|$، عندئذٍ:

$$N = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \left(\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} \right). \tag{3}$$

الآن $1/|Gx|$ لها القيمة نفسها لكل x في المدار نفسه، وإذا جعلنا $\mathcal{O}$ أي مدار، فإنّ:

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} = 1. \tag{4}$$

بتعويض (4) في (3) نحصل على $N = |G|$ (عدد المدارات في X بالنسبة إلى G) $= |G|\,.\,r$ (5)

مقارنة المعادلة (2) والمعادلة (5) تعطي المعادلة (1). ♦

2.17 نتيجة إذا كانت G زمرة منتهية و X مجموعة $-G$ منتهية، فإنّ:

$$(\text{عدد المدارات في } X \text{ بالنسبة إلى } G) = \frac{1}{|G|} . \sum_{g \in G} |X_g|$$

البرهان البرهان لهذه النتيجة ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة. ♦

لنكمل حسابنا لعدد أحجار النرد المتمايزة، كمثالنا الأول.

3.17 مثال لنجعل X مجموعة ألـ 720 تَعْلِيم المختلف لأوجه المكعب باستخدام من واحدة إلى ست نقاط، لتكن G زمرة التدويرات ألـ 24 للمكعب، كما نوقشت في الأعلى، رأينا إنّ عدد الأحجار المتمايزة لنرد، هو عدد المدارات في X بالنسبة إلى G، الآن، $|G| = 24$. لـ $g \in G$ حيث $g \neq e$، لدينا $|X_g| = 0$ لأن أي تدوير غير العنصر المحايد سَيُغَيِّرُ أي واحدة من التعليمات ألـ 720 إلى واحدة مختلفة. على أي حال، $|X_e| = 720$ لأن العنصر المحايد يترك التعليمات ألـ 720 ثابتة، عندئذٍ باستخدام النتيجة 2.17:

$$(\text{عدد المدارات}) = \frac{1}{24} . 720 = 30$$

وهكذا يوجد 30 حجر نرد متمايزًا. ▲

بالطبع عدد أحجار النرد المتمايزة يمكن عَدُّها دون استخدام آلية النتيجة السابقة، وإنما باستخدام

تراكيب بسيطة كما تُدَرَّسُ في العادة في مقرر دراسي رياضيات منتهية للمبتدئين، وبتعليم مكعب لعمل حجر نرد يمكننا – بالتدوير إذا لزم – أن نفترض إنّ الوجه المُعَلَّم 1 في الأسفل. توجد خمسة اختيارات للوجه الأعلى (المعاكس)، بتدوير حجر النرد، كما ننظر إليه للأسفل، أي واحد من الأوجه الأربعة المتبقية يمكن أن يُحْضَرَ للأمام، وهكذا لا توجد اختيارات مختلفة معقدة للوجه الأمامي، لكن بالنسبة إلى العدد على الوجه الأمامي، فتوجد 3.2.1 احتمالات للأوجه الجانبية الثلاثة المتبقية، وعليه، يوجد $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$ احتمالاً للجميع.

المثالان الآتيان يَظْهران في بعض كتب الرياضيات المنتهية، ومن السهل أن يُحلا بمفاهيم بسيطة، إذ نستخدم النتيجة 2.17 حتى يكون لدينا تدريب أكثر على التفكير بدلالة المدارات.

مثال 4.17 ما عدد الطرق المتمايزة التي يمكن من خلالها لسبعة أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة، حيث لا يتوافر رأس مميز للطاولة؟ بالتأكيد توجد !7 طرق لتحديد أشخاص للمقاعد المختلفة، حيث نأخذ X لتكون !7 للتحديدات الممكنة، إذ إنّ التدوير للأشخاص يتم إنجازه بالطلب من كل شخص أن يتحرك مكانًا واحدًا إلى اليمين وبالترتيب نفسه، فتدوير كهذا يُوَلِّد زمرة G دورية رتبتها 7، التي نعدّها مؤثرة في X بطريقة واضحة. مرة أخرى، فقط العنصر المحايد e يترك أي ترتيب محددًا، ويترك الترتيبات !7 جميعها ثابتة. من خلال النتيجة 2.17

$$(\text{عدد المدارات}) = \frac{1}{7}.7! = 6! = 720$$ ▲

مثال 5.17 ما عدد القلائد (دون مشبك) المتمايزة التي يمكن عملها باستخدام سبع خرزات من الحجم نفسه وبألوان مختلفة؟ على خلاف الجدول في المثال 4.17، القلادة يمكن ان تقلب كما لو أنها دُوِّرَتْ. وعليه، نعُدّ الزمرة الزوجية D_7 الكاملة ورتبتها $2 \cdot 7 = 14$ بوصفها مؤثرة في المجموعة X ذات !7 احتمال، وعندئذٍ عدد القلائد المتمايزة، هو:

$$(\text{عدد المدارات}) = \frac{1}{14}.7! = 360.$$ ▲

باستخدام النتيجة 2.17 علينا حساب $|G|$ و $|X_g|$ لكل $g \in G$، في الأمثلة والتمارين، $|G|$ لن يكون مشكلة حقيقية، لنعطي مثالاً، حيث $|X_g|$ ليس من السهل حسابه، كما هو في الأمثلة السابقة، سوف نستمر بافتراض المعرفة بالتراكيب البسيطة جدًا.

مثال 6.17 لنجد عدد الطرق المتمايزة الممكنة لطلاء أضلاع مثلث متساوي الأضلاع، إذا توافرت أربعة ألوان طلاء مختلفة، بافتراض استخدام لون واحد فقط لكل ضلع، واللون نفسه يمكن استخدامه على أضلاع مختلفة.

بالطبع توجد $4^3 = 64$ طريقة لطلاء الأضلاع كلها؛ لأن كلاً من الأضلاع الثلاثة يمكن أن يطلى بأي لون من الألوان الأربعة، نعُدّ X مجموعة المثلثات المطلية الممكنة وعددها 64، الزمرة G المؤثرة على X، هي زمرة التناظرات للمثلث، التي تماثل S_3 والتي سنعُدّها S_3 نستخدم الرموز للعناصر في S_3 المعطاة في الفصل 8، نحتاج إلى أن نحسب $|X_g|$ لكلٍّ من العناصر الستة g في S_3.

$\left|X_{\rho_0}\right| = 64$ كل مثلث مطلي ترك مثبتًا من خلال ρ_0

$\left|X_{\rho_1}\right| = 4$ ليكن غير متغير بالنسبة إلى ρ_1، الأضلاع جميعها يجب أن يكون لها اللون نفسه، وتوجد 4 ألوان محتملة.

$\left|X_{\rho_2}\right| = 4$ السبب نفسه كما لِـ ρ_1

$\left|X_{\mu_1}\right| = 16$ الضلعان اللذان تبدلا يجب أن يكون لهما اللون نفسه (4 احتمالات) والضلع الثالث يمكن أن يكون أيًّا من الألوان (ضرب 4 احتمالات).

$\left|X_{\mu_3}\right| = \left|X_{\mu_2}\right|= 16$ السبب نفسه كما لِـ μ_1.

وعندئذٍ:

$$\sum_{g\in S_3}\left|X_g\right| = 64+4+4+16+16+16=120$$

وعليه،

$$(\text{عدد المدارات}) = \frac{1}{6}.120 = 20$$

ويوجد 20 مثلثًا مطليًّا متمايزًا . ▲

7.17 مثال نعيد المثال 6.17 مع الافتراض أنّ لونًا مختلفًا استخدم لكل ضلع، عدد الطرق المحتملة لطلاء الأضلاع هو في النهاية $2\cdot3\cdot4 = 24$، وجعلنا X مجموعة المثلثات المطلية المحتملة وعددها 24. مرة أخرى، الزمرة المؤثرة على X يمكن أن تُعدّ S_3 ولأن الأضلاع كلها ألوانها مختلفة، نرى إنّ: $|X_{\rho_0}| = 24$ بينما $|X_g| = 0$ لِـ $g \neq \rho_0$. إذن

$$(\text{عدد المدارات}) = \frac{1}{6}.24 = 4$$

وهكذا توجد أربعة مثلثات متمايزة. ▲

■ تمارين 17

حسابات

في كلٍّ من التمارين الآتية استخدم النتيجة 2.17 في حلها، حتى إن أمكن الحصول على الإجابة بطرق أكثر بساطة.

1. أوجد عدد المدارات في $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بالنسبة إلى الزمرة الجزئية الدورية $\langle(1,3,5,6)\rangle$ من S_8.

2. أوجد عدد المدارات في $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بالنسبة إلى الزمرة الجزئية من S_8 المتولدة من خلال $(1,3)$ و $(2,4,7)$.

3. أوجد عدد أحجار النرد رباعية السطوح المثلثية المتمايزة، التي يمكن عملها باستخدام نقطة، ونقطتين، وثلاث نقاط، وأربع نقاط على أوجه صورة منتظمة لرباعي السطوح المثلثية، بدل المكعب.

4. مكعبات خشبية من الحجم نفسه ستطلى بلونٍ مختلف على كل وجه لعمل مكعبات أطفال، ما عدد المكعبات المتمايزة التي يمكن عملها إذا توافرت ثمانية ألوان طلاء؟

5. أجب عن التمرين 4 إذا أمكن تكرار الألوان على أوجه مختلفة. [مساعدة: الدورانات ألـ 24 لمكعب تتألف من العنصر المحايد، 9 منها تترك زوجًا من الأوجه المتقابلة غير متغير، و 8 منها تترك زوجًا من الرؤوس المتعاكسة غير متغير، و 6 تترك زوجًا من الأضلاع المتقابلة غير متغير].

6. كلٌّ من الزوايا الثمانية لمكعب ستكسى بأحد أربعة ألوان، وكلٌّ لون منها يمكن أن يستخدم مرة على زاوية إلى ثماني مرات على الزوايا الثمانية جميعها، أوجد عدد التعليمات الممكنة المتمايزة. (انظر المساعدة في التمرين 5).

7. أوجد عدد الطرق المتمايزة التي يمكن بها طلاء الأضلاع لمربع من الورق المقوى إذا توافرت ستة ألوان، شريطة أن:

أ. لا يستخدم اللون أكثر من مرة.

ب. اللون نفسه يمكن أن يستخدم على أي عدد من الأضلاع.

8. افترض إنّ ستة أسلاك مستقيمة أطوالها متساوية، حيث لحمت أطرافها ببعضها لتشكل صورة مجسم منتظم رباعي السطوح المثلثية، وستدرج مقاومة 50 أومًا أو 100 أوم في منتصف كل سلك، افترض أنه توجد ست مقاومات على الأقل من كل نوع. فكم يبلغ العدد المحتمل لشبكات الأسلاك المختلفة؟

9. منشور مستطيلي الشكل، ارتفاعه قدمان، وقاعدته مربعة طول ضلعها قدم واحد، وكل وجهٍ من الأوجه الستة سيطلى بلونٍ من ستة ألوان محتملة. فكم يبلغ العدد المحتمل للمناشير المطلية المتمايزة:

أ. إذا لم يتكرر اللون على أوجه مختلفة؟

ب. إذا أمكن استخدام كل لونٍ على أكثر من وجه؟

الوحدة الرابعة

الحلقات والحقول
Rings and Fields

---

(1)، (2) الفصلان 24، 25 غير مطلوبين حتى نهايتهما.

الفصل 18 الحلقات والحقول: Rings and Fields

تركز عملنا السابق على المجموعات المعرّف عليها عملية ثنائية وحيدة، وقد تبين خلال سنوات من دراستنا للأعداد الصحيحة والحقيقية، أنّ دراسة المجموعات المعرّف عليها عمليتان ثنائيتان بالغتا الأهمية، وسيكون هذا النوع من البنية الجبرية محور دراستنا في هذا الفصل، الذي سيكون إلى حد ما أكثر تشويقًا من الفصول السابقة؛ لأن البنى الجبرية التي نحن بصدد دراستها ذات علاقة قريبة بالبنى الجبرية التي عملنا عليها في السنوات السابقة، وعلى الرغم من ذلك، فسوف نستمر بأسلوب المسلمات، بعبارة أخرى، تعدّ هذه الدراسة أكثر تعقيدًا من مبرهنة الزمرة؛ لأننا نتعامل مع عمليتين ثنائيتين ومسلمات أكثر.

البنية الجبرية المعرف عليها عمليتان ثنائيتان الأكثر عمومًا، التي سنقوم بدراستها تسمى حلقة (*ring*)، كما يظهر مثال 2.18 الذي يتبع تعريف 1.18، فقد تعاملنا كلنا مع الحلقات منذ الدراسة الابتدائية.

تعريفات وخصائص أساسية

1.18 تعريف الحلقة (***ring***) $\langle R, +, . \rangle$ هي مجموعة R معرّف عليها عمليتان ثنائيتان + و. التي نسميها الجمع (*addition*) والضرب (*multiplication*)، وتحقق المسلمات الآتية:

$\mathcal{R}_1$. $\langle R, + \rangle$ زمرة إبدالية.

$\mathcal{R}_2$. الضرب تجميعي.

$\mathcal{R}_3$. لكل $a,b,c \in R$ **قانون التوزيع من اليسار**.

$a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$ **(Left distributive law)** **وقانون التوزيع من اليمين**

$(a+b).c = (a.c) + (b.c)$ **(right distributive law)** متحققان. ■

2.18 مثال الكل يدرك أنّ أيّ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة، بحيث تكون زمرة مع الجمع ومغلقة مع الضرب، فإنها تحقق المسلمات $\mathcal{R}_1$ ، $\mathcal{R}_2$ و $\mathcal{R}_3$ ، ومثال على ذلك:

$\langle \mathbb{Z}, +, . \rangle$، $\langle \mathbb{Q}, +, . \rangle$، $\langle \mathbb{R}, +, . \rangle$ و $\langle \mathbb{C}, +, . \rangle$ حلقات. ▲

■ **نبذة تاريخية**

نشأت مبرهنة الحلقات من دراسة نوعين محددين من الحلقات، هما: حلقات كثيرات الحدود بـ n من المتغيّرات على مجموعة الأعداد الحقيقية أو المركبة (فصل 22)، و"الأعداد الصحيحة" لحقل الأعداد الجبرية، حيث إنّ أول من قدّم مفهوم الحلقة المرتبط بالمثال 2.18، هو ديفيد هيلبرت (David Hilbert 1862- 1943)، ولكن هذا المفهوم لم يظهر قبل العقد الثاني من القرن العشرين، عندما ظهر تعريف كامل ومجرد للحلقة، وقد بُنيت لمبرهنة الحلقات الإبدالية قاعدة ثابتة من المسلمات من قبل إيمي نوثير (Emmy Noether 1882- 1935) في بحثها الضخم "مبرهنة المثاليات في الحلقات" الذي ظهر عام 1921م، فالموضوع الرئيس في هذا البحث هو شرط السلسلة المتصاعدة من المثاليات، وقد أثبتت نوثير أنّ في الحلقة التي يكون فيها لكل سلسلة متصاعدة من المثاليات عنصر أعظم، يكون كل مثالي فيها منتهي التولد.

حصلت إيمي نوثير على درجة الدكتوراة من جامعة إيرلانجن في ألمانيا عام 1907م، ودعاها هيلبرت للعمل في جامعة جوتنجن عام 1915م، ولكن جهوده في تأمين موقع لها في الجامعة باءت بالفشل بسبب جنسها، فاشتكى هيلبرت قائلًا: "لا أرى أنّ جنس المتقدّم للوظيفة عائق للحصول عليها؛ لأننا في جامعة، ولسنا في حمام سباحة"، وعلى الرغم من ذلك، تمكنت نوثير من أن تحاضر في الجامعة باسم هيلبرت، أخيرًا حصلت إيمي على الموقع الذي تستحقه في الجامعة عام 1923م، بعد التغييرات السياسية التي تبعت نهاية الحرب العالمية الأولى التي وصلت إلى جوتنجن، وقد كانت خلال السنوات العشر اللاحقة فاعلة ومؤثرة في تطوير المفاهيم الأساسية للجبر الحديث، وعلى الرغم من ذلك، فقد أرغمت هي وبعض أعضاء الكلية من اليهود على ترك جوتنجن عام 1933م، فأمضت آخر سنتين من عمرها في كلية براين مور بالقرب من فيلادلفيا.

من الشائع أن نرمز للضرب داخل الحلقة باستخدام ab بدلاً من $a.b$ دون حدوث أيّ التباس، وسوف نلاحظ أنه دون الأقواس، فإن الضرب يسبق الجمع، وعليه، فإن قانون التوزيع من اليسار على سبيل المثال يصبح:

$$a(b+c) = ab + ac$$

دون استخدام الأقواس للجهة اليمنى من المعادلة، كذلك سنستعمل أسلوبًا مريحًا للدلالة على الحلقة $\langle R, +, . \rangle$، حيث سنسميها ببساطة R، وسنغض الطرف عن عدم دقّة هذا التعبير، تمامًا كما سمّينا الزمرة اختصارًا G بدلاً من $\langle G,* \rangle$، وذلك عندما لا يكون هناك أيّ التباس، وبوجه خاص، فإنّ $\mathbb{Z}$ تعني من الآن فصاعدًا $\langle \mathbb{Z}, +, . \rangle$ و $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ وهي الحلقات في المثال 2.18، وربما في مناسبة ما ستعني $\langle R, + \rangle$ الزمرة الجمعية للحلقة R (*additive group of the ring*).

3.18 مثال لتكن R أيّ حلقة، ولتكن $M_n(R)$ مجموعة المصفوفات من الدرجة $n \times n$ ومدخلاتها من الحلقة R، حيث إن عمليات الجمع والضرب المعرفة على R ستسمح لنا بجمع وضرب مصفوفات بالطريقة الاعتيادية، وهذا مشروح في الملحق، فيمكننا التحقق بسرعة من أنّ $\langle M_n(R), + \rangle$ زمرة إبدالية، ومن الجدير ذكره، أن تحقق قانون التجميع في ضرب المصفوفات وقانوني توزيع الضرب على الجمع في $M_n(R)$ تحتاج إلى عمل مضنٍ، ولكن الحسابات المباشرة توضح أنها تتحقق خصائص R نفسها، وسوف نفترض من الآن فصاعدًا أنه معلوم لدينا أن $M_n(R)$ حلقة، بوجه خاص $M_n(\mathbb{Z})$، $M_n(\mathbb{Q})$، $M_n(\mathbb{R})$، $M_n(\mathbb{C})$ حلقات.

(لاحظ في هذه الحلقات كلها أن الضرب ليس إبداليًّا لـ $n \geq 2$. ▲

مثال 4.18 لتكن F مجموعة الدوال كلها $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. نعلم أن $\langle F,+\rangle$ زمرة إبدالية بالنسبة إلى جمع الدوال العادي،

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

سنعرف الضرب على F بـ

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

وهذا يعني أنّ fg هي الدالة التي قيمتها عند x تكون $f(x)g(x)$، ومن الممكن التحقق شفويًّا أنّ F حلقة، وسنترك توضيح ذلك لتمرين 34، لقد استخدمنا التعبير $\sigma\mu$ ليعني الدالة المركبة $\sigma(\mu(x))$ عندما ناقشنا الضرب التبديلي، وإذا استخدمنا ضرب الدوال وتركيبها في F، فسنستخدم التعبير $f \circ g$ للدالة المركبة، وعلى الرغم من ذلك، فإن استخدامنا لتركيب الدوال سيكون حصريًّا من التشاكلات التي سوف نرمز لها بالحروف اليونانية، ولن يؤدي هذا إلى أيّ تشويش مع الضرب المعرّف في هذا المثال، وخصوصًا عند ضرب كثيرات حدود $f(x)g(x)$. ▲

مثال 5.18 تذكر من مبرهنة الزمرة، أنّ $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية دورية من $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع، وتتكوّن من مضاعفات الأعداد الصحيحة جميعها للعدد الصحيح n؛ لأن

$(nr)\,(ns) = n(nrs)$ فإن $n\mathbb{Z}$ مغلقة على الضرب، ولأن قانون التجميع وقانوني التوزيع متحققان في $\mathbb{Z}$ وهذا يؤكد لنا أنّ $\langle n\mathbb{Z}\ , + , .\ \rangle$ حلقة، ومن الآن فصاعدًا سنعدّ $n\mathbb{Z}$ هي هذه الحلقة في هذا الكتاب. ▲

مثال 6.18 لتكن الزمرة الدورية $\langle \mathbb{Z}_n , + \rangle$، فإذا عرّفنا لـ $a,b \in \mathbb{Z}_n$ الضرب ab على أنه باقي قسمة ناتج ضرب الأعداد الصحيحة على n، فيمكننا إثبات أنّ $\langle \mathbb{Z}_n\ +,.\ \rangle$حلقة، ويمكنك استخدام هذه الحقيقة، فعلى سبيل المثال في: $\mathbb{Z}_{10}$، $(3)\,(7) = 1$، وتسمى هذه العملية على $\mathbb{Z}_n$ **بالضرب مقياس** n (**multiplication modulo**)، ولن نتحقق هنا من مسلمات هذه الحلقة؛ لأننا سنرى أنّ المسلمات متحققة من الفصل 26 من خلال مبرهنة طُوّرت هناك، ومن الآن فصاعدًا، فإنّ $\mathbb{Z}_n$ تعني الحلقة $\langle \mathbb{Z}_n\ , +, .\ \rangle$. ▲

7.18 مثال إذا كان $R_1, R_2, \ldots R_n$ حلقات، فيمكننا تعريف المجموعة $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ المكوّنة من المتعددات من المرتبة n $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$، حيث $r_i \in R_i$، وقد عُرّف الضرب والجمع على المتعددات من المرتبة n على كل حدّ مع ما يقابله (كما فعلنا مع الزمر)، ويمكننا ملاحظة أنّ مسلمات الحلقة متحققة على كل حدّ، ما يؤدي إلى أن المجموعة المكوّنة من المتعددات من المرتبة n تشكل حلقة تحت الجمع والضرب المعرّف على كل حدّ مع ما يقابله، حيث تسمّى هذه الحلقة **(direct product)** للحلقات R_i. ▲

سنأخذ في الحسبان الملاحظات الآتية: سنعدّ 0 العنصر المحايد لعملية الجمع لأيّ حلقة، والمعكوس الجمعي لأيّ عنصر a هو $-a$، وسنشير إلى المجموع

$$a + a + \ldots + a$$

n من المرّات بـ $n.a$ مستخدمًا النقطة، مع ذلك، فإنّ $n.a$ لا تعني حاصل ضرب n مع a في الحلقة؛ لأن العدد الصحيح n ليس عنصرًا في الحلقة أبدًا.

إذا كان $n < 0$، فلتكن:

$$n.a = (-a) + (-a) + \ldots + (-a)$$

$|n|$ من المرات، أخيرًا، نعرف

$$0.a = 0$$

لـ $0 \in \mathbb{Z}$ على الجهة اليسرى من المعادلة و $0 \in R$ على الجهة اليمنى، وفي الحقيقة، فإن المعادلة $0a = 0$ متحققة أيضًا لـ $0 \in R$ في جهتي المعادلة.

المبرهنة القادمة تثبت هذه الحقيقة وحقائق أخرى أساسية ومهمّة، ستلاحظ استخدامنا القوي لقانون التوزيع في إثبات هذه المبرهنة، حيث تركز المسلمة الأولى $\mathcal{R}_1$ في تعريف الحلقة على الجمع، وتركز الثانية $\mathcal{R}_2$ على الضرب؛ لذلك لإثبات أيّ شيء يعطي العلاقة بين هاتين العمليتين، فيجب علينا استخدام المسلمة الثالثة $\mathcal{R}_3$، على سبيل المثال: أوّل أمر سنوضّحه في المبرهنة 8.18 هو أن: $0a = 0$ لأي a في الحلقة R، وهذه العلاقة تشمل الجمع والضرب، حيث إنّ الضرب متمثل بـ $0a$ والجمع بـ 0؛ لذلك سنطور أسلوبًا يستخدم قانوني التوزيع في إثبات ذلك.

8.18 مبرهنة إذا كانت R حلقة والعنصر المحايد للجمع 0، فالخواص الآتية متحققة لكل $a,b \in R$:

1- $0a = a0 = 0$

2- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

3- $(-a)(-b) = ab$

البرهان بالنسبة إلى الخاصية الأولى، لاحظ باستخدام المسلمتين $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ ،

$$a0 + a0 = a(0 + 0) = a0 = 0 + a0$$

ثم باستخدام قانون الحذف لزمرة الجمع $\langle R, +\rangle$، سنحصل على $a0 = 0$، وبالمثل:

$$0a + 0a = (0 + 0)a = 0a = 0 + 0a$$

ما يؤدي إلى $0a = 0$، وهذا إثبات الخاصية الأولى.

من أجل فهم إثبات الخاصية الثانية، يجب علينا تذكر– كما ورد في التعريف أن $-(ab)$ تعني أنه العنصر الذي عندما يضاف إلى ab نحصل على 0؛ لذلك لإثبات أن $a(-b) = -(ab)$، يجب علينا بالضبط إثبات أن $a(-b) + ab = 0$، باستخدام قانون التوزيع من اليسار،

$$a(-b) + ab = a(-b + b) = a0 = 0$$

لأنّ $a0 = 0$ كما بالخاصية 1، وبالمثل:

$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$

بالنسبة إلى الخاصية الثالثة، لاحظ أنه باستخدام الخاصية الثانية

$$(-a)(-b) = -(a(-b))$$

ومرة أخرى باستخدام الخاصية الثانية،

$$-(a(-b)) = -(-(ab))$$

و $-(-(ab))$ هو العنصر الذي إذا أضيف إلى $-(ab)$ نحصل على 0، وهذا العنصر هو ab باستخدام تعريف $-(ab)$، وأن المعكوس الجمعي في الزمرة وحيد؛ لذلك فإن:

$(-a)(-b) = ab$. ♦

من المهم جدًا فهم إثبات المبرهنة السابقة؛ لأنها ستسمح لنا باستخدام القوانين الاعتيادية للإشارات.

التشاكلات والتماثلات

من خلال عملنا على مبرهنة الزمرة، سيكون من الواضح كيف نعرف الدالة من الحلقة R إلى الحلقة R'.

9.18 تعريف للحلقتين R و R'، الدالة $\phi : R \to R'$ تشاكل (**homomorphism**)، إذا تحقق الشرطان الآتيان لأيّ $a,b \in R$

-1 $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$

-2 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ ■

الشرط الأول في التعريف السابق هو العبارة التي تقول: إنّ ϕ هو دالة تشاكل من الزمرة الإبدالية $\langle R, + \rangle$ إلى $\langle R', + \rangle$، والمطلوب في الشرط الثاني: أن الدالة ϕ تعالج البنية الضربية للحلقتين R و R' في الوقت نفسه. لأن ϕ هي أيضًا تشاكل زمري، فإن النتائج جميعها المتعلقة بالتشاكلات الزمرية متحققة بالنسبة إلى البنية الجمعية للحلقتين، وبوجه خاص، الدالة ϕ واحد لواحد إذا وفقط إذا كانت النواة (**Kernel**) $\ker(\phi) = \{a \in R \mid \phi(a) = 0'\}$ هي فقط المجموعة الجزئية $\{0\}$ من R، ويمكن تعريف زمرة العامل باستخدام التشاكل ϕ للزمرة $\langle R,+\rangle$، إذ يُتوقع أنه يمكن تعريف حلقة العامل باستخدام التشاكل الحلقي، وهذا بالفعل ما سيحدث، سنؤجل مناقشة ذلك إلى الفصل 26، حيث ستكون معالجة هذا الأمر مشابهة لمعالجتنا لزمرة العامل في الفصل 14.

10.18 مثال لتكن F تعني الحلقة التي تحوي الدوال كلها من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ والمعرّفة في المثال 4.18، إذ إنّ لكل عنصر $a \in \mathbb{R}$ لدينا **تشاكل التعويض** (**evaluation homomorphism**)

$\phi_a : F \to \mathbb{R}$ حيث $\phi_a(f) = f(a)$ لكل $f \in F$، عرفنا هذا التشاكل للزمرة $\langle \mathrm{F}, + \rangle$ في مثال 4.13، إلّا أنّنا لم نتعامل معه في مبرهنة الزمر، وسوف نتعامل معه كثيرًا فيما تبقى من هذا الكتاب، فلإيجاد الحل الحقيقي لمعادلة كثيرة حدود $p(x) = 0$، فإن هذا يكافئ إيجاد $a \in \mathbb{R}$، حيث $\phi_a(p) = 0$، ومعظم ما تبقى من هذا الكتاب يتعامل مع إيجاد حلول معادلات كثيرات حدود، سنترك توضيح تحقيق التشاكل ϕ_a للشرط الثاني إلى تمرين 35. ▲

مثال 11.18 الدالة $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$، حيث $\phi(a)$ باقي قسمة a مقياس n، تشاكل حلقات لأيّ عدد صحيح موجب n، ونعلم من مبرهنة الزمر أن $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$. لإثبات خاصية الضرب خذ $a = q_1 n + r_1$ و $b = q_2 n + r_2$ ويحسب خوارزمية القسمة، فإن:

$ab = n(q_1 q_2 n + r_1 q_2 + q_1 r_2) + r_1 r_2$. ما يعني أنّ $\phi(ab)$ هو باقي القسمة $r_1 r_2$ على n؛ لأن $\phi(a) = r_1$ و $\phi(b) = r_2$، يبيّن مثال 6.18 أنّ $\phi(a)\phi(b)$ هو الباقي نفسه لقسمة $\phi(ab)$ على n؛ لذلك: $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

يمكننا أن نتوقع من مبرهنة الزمر أنّ الحلقة $\mathbb{Z}_n$ ربما تماثل حلقة العامل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ وهذا بالفعل ما سيكون، سنناقش موضوع حلقات العامل في الفصل 26. ▲

ندرك أنه في حالة دراسة أيّ بنية رياضية، فإنّ الفكرة الأساسية الأكثر أهمية هي توافر نظامين متطابقين بالبنية (*structurally identical*)، أي يتشابهان في كل شيء عدا الأسماء، إذ يسمى هذا المفهوم في الجبر عادة تماثلاً (*isomorphism*).

كما حدث في الزمر، فإنّ مفهوم أنّ شيئين متشابهين في كل شيء عدا أسماء العناصر سيقودنا إلى التعريف الآتي:

تعريف 12.18 التماثل (**isomorphism**) $\phi : R \to R'$ من الحلقة R إلى الحلقة R' هو تشاكل أحادي وغامر، والحلقتان R و R' عندها تكونان متماثلتين (**isomorphic**). ■

من خلال عملنا في مبرهنة الزمر، نتوقع أن التماثل يعطينا علاقة تكافؤ على أيّ مجموعة من الحلقات، ونحتاج إلى أن نفحص أنّ خاصية الضرب للتماثل متحققة لدالة المعكوس $\phi^{-1} : R' \to R$ (لاستكمال مناقشة التناظر).

يجب أن نفحص أيضًا أنه إذا كان $\mu: R' \to R''$ تماثل حلقات، فإنّ خاصية الضرب متحققة في الدالة المركبة $\mu\phi : R \to R''$ (لاستكمال مناقشة التعدي)، طبّق هذا في تمرين 36.

مثال 13.18 الزمرتان الإبداليتان $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ و $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ متماثلتان بالنسبة إلى الدالة، $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $\phi(x) = 2x$ لكل $x \in \mathbb{Z}$. هنا ϕ ليست تماثل حلقات؛ لأن $\phi(xy) = 2xy$، بينما $\phi(x)\phi(y) = 2x\,2y = 4xy$. ▲

اسئلة ضربية: الحقول

كثير من الحلقات التي ذكرناها مثل $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ تملك العنصر المحايد في عملية الضرب، وهو 1، لكن $2\mathbb{Z}$ لا تملك عنصرًا محايدًا في عملية الضرب، لاحظ أيضًا أنّ الضرب ليس إبداليًّا في حلقات المصفوفات المشروحة في المثال 3.18.

$0 = 0 + 0$ و $0 = (0)(0)$ يعطينا الدليل على أنّ $\{0\}$ حلقة تسمى **الحلقة الصفرية (Zero ring)**، في هذه الحلقة 0 هو العنصر المحايد لعمليتي الضرب والجمع، وباستخدام المبرهنة 8.18، فإن هذه هي الحالة الوحيدة التي يكون فيها 0 هو العنصر المحايد في عملية الضرب؛ لأنه ينتج من $0a = 0$ أن $a = 0$، وتثبت المبرهنة 13.3 أنه إذا توافرت حلقة تملك العنصر المحايد في عملية الضرب، فإنه وحيد، حيث نرمز للعنصر المحايد الضربي في الحلقة بـ 1.

14.18 تعريف تسمى الحلقة التي يكون فيها الضرب إبداليًّا **حلقة إبدالية (Commutative ring)**، والحلقة التي تملك العنصر المحايد في عملية الضرب هي **حلقة بعنصر محايد (ring with unity)**؛ والعنصر المحايد في عملية الضرب (1) **يسمى محايدًا (unity)**. ■

يبين قانونا التوزيع في حلقة بعنصر محايد 1 أنّ:

$$(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ من المرات}})(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m \text{ من المرات}}) = (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{nm \text{ من المرات}})$$

أي إن $(n.1)(m.1) = (nm).1$. المثال القادم تطبيق على هذه الملاحظة.

15.18 مثال ندَّعى أنه لعددين صحيحين r و s، حيث $\gcd(r,s)=1$، فإن الحلقتين $\mathbb{Z}_{rs}$ و $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ متماثلتان، وبالنسبة إلى عملية الجمع، هما زمرتان إبداليتان دوريتان من الرتبة rs والمولدان لهما 1 و $(1,1)$ على الترتيب؛ لذلك فإن $\phi : \mathbb{Z}_{rs} \to \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ معرفة بـ $\phi(n.1) = n.(1,1)$ هي تماثل زمر على الجمع، ولفحص الشرط الثاني في التعريف 9.18،

سنستخدم الملاحظة التي سبقت هذا المثال بالنسبة إلى المحايد $(1,1)$ في الحلقة $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$، ونحسب

$$\phi(nm) = nm.(1,1) = [n.(1,1)][m.(1,1)] = \phi(n)\phi(m) \qquad \blacktriangle$$

لاحظ أنّ الضرب المباشر $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ للحلقات هو حلقة إبدالية أو يملك عنصرًا محايدًا إذا وفقط إذا كان كل R_i إبداليًّا أو يملك عنصرًا محايدًا على الترتيب.

في الحلقة R التي تملك عنصرًا محايدًا $1 \neq 0$، المجموعة R^* هي مجموعة العناصر غير الصفرية، إذا كانت هذه المجموعة مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب في الحلقة، فإنها ستكون زمرة ضربية إذا وجد المعكوس الضربي لكل عنصر فيها. إن **المعكوس الضربي (multiplicative inverse)** للعنصر a في حلقة R تملك عنصرًا محايدًا $1 \neq 0$، هو العنصر $a^{-1} \in R$، حيث $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$، تمامًا كما في الزمر، فإن المعكوس الضربي لعنصر a في R وحيد إذا وجد (انظر تمرين 43)، تبين مبرهنة 8.18 أنه من المستحيل توافر معكوس ضربي لـ 0 إلا إذا كانت الحلقة هي $\{0\}$، حيث إن $0 = 0 + 0$ و $0 = (0)(0)$، وهذا يعني أن 0 هو العنصر المحايد في عملية الجمع وعملية الضرب؛ لذلك، يمكننا أن نركز مناقشتنا على توافر المعكوسات الضربية للعناصر غير الصفرية في أيّ حلقة تملك عنصرًا محايدًا غير صفري، وما لا يمكن تجنبه توافر الكثير من المصطلحات التي يجب تعريفها في هذا الفصل (المقدمة) عن الحلقات، وقد عرّفنا معظمها.

16.18 تعريف لتكن R حلقة تملك عنصرًا محايدًا $1 \neq 0$.

العنصر u في R هو **عنصر وحدة (unit)** في R، إذا كان له معكوس ضربي في R، فإذا كان كل عنصر غير صفري في R عنصر وحدة، فإن R تسمى **حلقة قسمة (Division ring)** أو حقل تخالف **(skew – field)**. **الحقل (field)** هو حلقة قسمة إبدالية، إذ إنّ حلقة القسمة غير الإبدالية تسمى **حقلًا تخالفيًّا قطعيًّا (strictly skew – field)**. ■

17.18 مثال لنجد عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}_{14}$، بالطبع 1 و $13 = -1$ هما عناصر وحدة؛ ولأن $(3)(5) = 1$ نرى أن 3 و 5 عناصر وحدة، لذلك $11 = -3$ و $9 = -5$ عناصر وحدة أيضًا، أمّا بقية العناصر في $\mathbb{Z}_{14}$ فليست عناصر وحدة؛ ولأنه لا يوجد مضاعف لكل من 2, 4, 6, 7, 8 أو 10، فيمكن أن تكون أكبر بواحد من أيّ مضاعف لـ 14؛ لذلك فإن العامل المشترك لأيّ منهم مع 14 إما 2 أو 7، سيبين الفصل 20 أنّ عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}_n$ هي بالضبط العناصر $m \in \mathbb{Z}_n$، حيث $\gcd(m,n) = 1$. ▲

18.18 مثال $\mathbb{Z}$ ليس حقلاً؛ لأن 2 –على سبيل المثال– ليس له معكوس ضربي؛ لذلك فإن 2 ليس عنصر وحدة في $\mathbb{Z}$ عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}$ هي 1 و -1 فقط، أما $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ فهما حقلان، سنقدم في الفصل 24 مثالًا على حقل تخالفي قطعي. ▲

لدينا مفاهيم طبيعية لحلقة جزئية من حلقة وحقل جزئي من حقل، إذ إنّ **الحلقة الجزئية من حلقة (subring of a ring)** هي مجموعة جزئية من الحلقة، بحيث تكون حلقة بالنسبة إلى العمليات المعرفة على الحلقة الكلية، ويعرف **الحقل الجزئي (subfield)** بالطريقة نفسها لمجموعة جزئية من حقل، ولنقل في هذا المقام: إنه إذا توافرت بنية جبرية محدودة على مجموعة (algebriac structure)، مثل: زمرة، حلقة، حقل، حلقة تامة، فضاء متجهات، وهكذا، فإن أيّ مجموعة جزئية من هذه المجموعة ولها البنية الجبرية الطبيعية نفسها للبنية الجبرية للمجموعة الكلية، تسمّى بنية جزئية.

إذا كان K و L بنية، سنعدّ $K \leq L$ ترمز إلى أن K بنية جزئية من L، و $K < L$ ترمز إلى $K \leq L$، ولكن $K \neq L$. سيعطينا تمرين 48 معيارًا لمجموعة جزئية S من الحلقة R حتى تشكل حلقة جزئية من R.

أخيرًا، يجب علينا ألا نرتبك عند استخدامنا للمصطلحين عنصر وحدة (*unit*) وعنصر محايد (*unity*)، فالعنصر المحايد يعني العنصر المحايد لعملية الضرب، بينما يعني عنصر الوحدة عنصرًا له معكوس ضربي؛ لذلك، فإن العنصر المحايد لعملية الضرب هو عنصر وحدة، ولكن ليس كل عنصر وحدة عنصرًا محايدًا، فمثلاً: -1 عنصر وحدة في $\mathbb{Z}$، لكنه ليس عنصرًا محايدًا، أي إنّ: $-1 \neq 1$.

■ **نبذة تاريخية**

على الرغم من أنّ الحقول كانت معروفة ضمنيًا في عمل قديم على المعادلات القابلة للحل لأبيل وجالوا (Abel and Galois)، إلّا أنّ ليوبولد كرونكر (Kronecher 1823 – 1891) قدّم تعريفًا لما أسماه المجال النسبي من خلال عمل خاص له على الموضوع نفسه، الذي نشر أول مرة عام 1881م، فالمجال النسبي هذا ($R', R'', R''', \ldots$) يحوي ... كل واحدة من هذه الكميات التي هي دوال نسبية للكميات $R', R'', R''', \ldots$ ذات المعاملات الصحيحة، ومع ذلك، فإن كرونكر الذي أصر على أن أيّ موضوع رياضي يمكن بناؤه بعدد منته من الخطوات، لم يعرض المجال النسبي بوصفه بنية متكاملة فحسب، ولكن بوصفه منطقة تقع فيها مجموعة من العمليات على عناصرها.

ريتشارد ديدكند (Richard Dedekind 1831 – 1916) مخترع تعريف العدد الحقيقي، عدّ الحقل بنية متكاملة، إذ نشر التعريف الآتي عام 1871م في ملحقه للطبعة الثانية لكتاب درشلت (Dirichlet) عن مبرهنة الأعداد: "نعني بالحقل أيّ نظام من عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية أو المركبة، بحيث إنّ الجمع والطرح والضرب والقسمة لأيّ عددين من هذا النظام، فإنّه ينتج عدد من هذا النظام".

تعامل كل من كرونكر وديدكند مع هذه الأفكار المختلفة في هذا الموضوع قبل عام 1850م في محاضراتهما الجامعية، إذ إنّ أول تعريف مجرد للحقل شبيه لما هو متوافر في هذا الكتاب، قدمه هنريك ويبر (Heinrich Weber 1842 – 1913) في بحث له عام 1893م.

تعريف ويبر مختلف عن تعريف يدكند، فقد شمل الحقول التي تحوي عددًا منتهيًا من العناصر، إضافة إلى أنه شمل حقولًا أخرى، مثل حقول الدوال التي هي ليست حقولًا جزئية من حقل الأعداد المركبة.

تمارين 18

حسابات

في التمارين 1 إلى 6، احسب ناتج الضرب في الحلقة المعطاة:

1. $(16)\,(12)$ في $\mathbb{Z}_{24}$

2. $(3)\,(16)$ في $\mathbb{Z}_{32}$

3. $(-4)\,(11)$ في $\mathbb{Z}_{15}$

4. $(-8)\,(20)$ في $\mathbb{Z}_{26}$

5. $(3,5)\,(2,3)$ في $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$

6. $(-4,\ 2)\,(-3,5)$ في $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{11}$

في التمارين 7 إلى 13، قرر فيما إذا كانت العمليات الآتية من الجمع والضرب معرفة (مغلقة) على المجموعة، ثم أعطِ بنية الحلقة، وبيّن السبب إذا لم تشكل حلقة، أما إذا شكلت حلقة، فاذكر إذا كانت حلقة إبدالية، أو إذا كانت تملك عنصرًا محايدًا أو إذا كانت حقلًا.

7. $n\mathbb{Z}$ مع الجمع والضرب الاعتيادي.

8. $\mathbb{Z}^+$ مع الجمع والضرب الاعتيادي.

9. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ مع الجمع والضرب على المركبات.

10. $2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ مع الجمع والضرب على المركبات.

11. $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$ مع الجمع والضرب الاعتيادي.

12. $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\right\}$ مع الجمع والضرب الاعتيادي.

13. مجموعة الأعداد المركبة التخيلية النقية ri لكل $r \in \mathbb{R}$ مع الجمع والضرب الاعتيادي.

في التمارين 14 إلى 19، صف عناصر الوحدة في الحلقة المعطاة:

14. $\mathbb{Z}$

15. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

16. $\mathbb{Z}_5$

17. $\mathbb{Q}$

18. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$

19. $\mathbb{Z}_4$

20. خذ حلقة المصفوفات $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

أ. أوجد رتبة الحلقة (**order**)، أي عدد العناصر فيها.

ب. اذكر عناصر الوحدة في الحلقة جميعها.

21. إذا كان ممكنًا، أعطِ مثالاً لتشاكل $\phi : R \to R'$، حيث R و R' حلقتان تملكان عنصرًا محايدًا $1 \neq 0$ و $1' \neq 0'$، وحيث $\phi(1) \neq 0'$ و $\phi(1) \neq 1'$.

22. (جبر خطي) لتكن الدالة det من $M_n(\mathbb{R})$ إلى $\mathbb{R}$، حيث $\det(A)$ هو محددة المصفوفة A لكل $A \in M_n(\mathbb{R})$. هل det تشاكل حلقات؟ لِمَ هو تشاكل حلقات؟ وإذا لم يكن تشاكل حلقات، فَلِمَ هو ليس كذلك؟

23. صف تشاكلات الحلقات كلها من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$.

24. صف تشاكلات الحلقات كلها من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

25. صف تشاكلات الحلقات كلها من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$.

26. ما عدد تشاكلات الحلقات من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$؟

27. ليكن حلّ المعادلة $X^2=I_3$ في الحلقة $M_3(\mathbb{R})$.

$X^2=I_3$ يؤدي إلى $X^2-I_3=0$، المصفوفة الصفرية، سينتج $(X-I_3)(X+I_3)=0$ عندها إما $X=I_3$ أو $X=-I_3$. حلّل ذلك.

هل هذا الإثبات منطقي؟ إذا كان الجواب لا، فحدّد أين الخطأ في الإثبات، وإذا كان ممكنًا، فأعطِ مثالاً يناقض الجواب.

28. أوجد الحلول جميعها للمعادلة $x^2+x-6=0$ في الحلقة $\mathbb{Z}_{14}$ عن طريق تحليل كثيرة الحدود التربيعية. قارن بتمرين 27.

مفاهيم

في التمرينين 29 و 30، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

29. الحقل F حلقة فيها العنصر المحايد ليس صفرًا، حيث مجموعة العناصر غير الصفرية في F، هي زمرة تحت عملية الضرب.

30. عنصر الوحدة في الحلقة عنصر مقداره 1.

31. أعطِ مثالاً على حلقة فيها عنصران a وb، حيث $ab=0$، ولكن $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

32. أعطِ مثالاً على حلقة فيها العنصر المحايد $1\neq 0$، لها حلقة جزئية فيها العنصر المحايد $1'\neq 0$ و $1'\neq 1$.

[مساعدة: خذ الضرب المباشر أو حلقة جزئية لـ $\mathbb{Z}_6$].

33. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. كل حقل حلقة.

______ ب. كل حلقة لها عنصر محايد في عملية الضرب.

______ جـ. كل حلقة فيها عنصر محايد، يكون فيها على الأقل عنصرا وحدة.

______ د. كل حلقة فيها عنصر محايد، يكون فيها على الأكثر عنصرا وحدة.

______ هـ. من الممكن لمجموعة جزئية من حقل أن تكون حلقة لكنها ليست حقلًا جزئيًا، وذلك بالنسبة إلى العملية نفسها.

______ و. قانونا التوزيع على الحلقة غير مهمين.

______ ز. الضرب في الحقل إبدالي.

______ ح. العناصر غير الصفرية في الحقل تشكل زمرة تحت عملية الضرب.

______ ط. الجمع في أيّ حلقة إبدالي.

______ ي. كل عنصر في الحلقة له معكوس جمعي.

براهين

34. بيّن أن الضرب المعرّف على مجموعة الدوالّ F في المثال 4.18 يحقق المسلمتين $\mathscr{R}_2$ و $\mathscr{R}_3$ للحلقة.

35. بيّن أنّ دالة التعويض ϕ_a في المثال 10.18 تحقق متطلبات الضرب للتشاكل.

36. أكمل المناقشة التي ذكرت بعد تعريف 12.18؛ لتوضيح أنّ التماثل يعطي علاقة تكافؤ على مجموعة من الحلقات.

37. بيّن أنه إذا كانت U مجموعة عناصر الوحدة كلها في الحلقة $\langle R, +, .\rangle$ التي فيها عنصر محايد، فإن $\langle U, .\rangle$ زمرة.

(تحذير: تأكد أن U مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب).

38. بيّن أن $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ لكل a و b في الحلقة R، إذا وفقط إذا كانت R إبدالية.

39. لتكن $\langle R, +\rangle$ زمرة إبدالية. بيّن أن $\langle R, +, .\rangle$ حلقة، إذا عرفنا $ab = 0$ لكل $a, b \in R$.

40. بيّن أنّ الحلقتين $2\mathbb{Z}$ و $3\mathbb{Z}$ غير متماثلتين، وبيّن أنّ الحلقتين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ غير متماثلتين.

41. قِوى الطالب المبتدئ (Freshman exponentiation) ليكن p عددًا أوليًا. بيّن أنه في الحلقة $\mathbb{Z}_p$ يكون $(a+b)^p = a^p + b^p$ لكل $a, b \in \mathbb{Z}_p$. [مساعدة: لاحظ أنّ مفكوك ثنائي الحدّ الاعتيادي لـ $(a+b)^p$ متحقق في الحلقة الإبدالية].

42. بيّن أنّ العنصر المحايد في الحقل الجزئي هو العنصر المحايد نفسه في الحقل الكلي، بخلاف الحلقات، كما في تمرين 32.

43. بيّن أنّ المعكوس الضربي لعنصر الوحدة في حلقة فيها عنصر محايد يكون وحيدًا.

44. العنصر a في الحلقة R يسمّى متساوي القوى (**idempotent**)، إذا كان $a^2 = a$.

أ. بيّن أنّ مجموعة العناصر متساوية القوى كلها في حلقة إبدالية مغلقة على عملية الضرب.

ب. أوجد العناصر **متساوية القوى** كلها في الحلقة $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$.

45. (جبر خطي) تذكر أنه للمصفوفة A من الدرجة $m\times n$ ، المنقول A^T (*transpose*)، هي المصفوفة التي يكون العمود رقم j فيها هو الصف رقم j من A. بيّن أنه إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ بحيث A^TA ذات معكوس، فإن مصفوفة الإسقاط (*Projection matrix*) $P = A(A^TA)^{-1} A^T$ هي عنصر متساوي القوى في حلقة المصفوفات من الدرجة $n \times n$.

46. العنصر a في R يسمى **معدوم القوى (nilpotent)**، إذا كان $a^n = 0$ لـ $n \in \mathbb{Z}^+$ بيّن إذا كان a و b عنصري معدومي القوى في حلقة إبدالية، فإن $a+ b$ معدوم القوى أيضًا.

47. بيّن أنه لا يوجد أي عنصر معدوم القوى غير صفري في R، إذا وفقط إذا كان 0 هو الحل الوحيد لـ $x^2 = 0$ في R.

48. بيّن أنّ المجموعة الجزئية S من الحلقة R هي ح لقة جزئية من R، إذا وفقط إذا كانت الشروط الآتية متحققة:

$$0 \in S$$

$$(a-b) \in S \text{ لكل } a,b \in S$$

$$ab \in S \text{ لكل } a,b \in S$$

49. بيّن أنّ تقاطع حلقات جزئية في R هي حلقة جزئية من R.

بيّن أنّ تقاطع حقول جزئية في الحقل F هو حقل جزئي من F.

50. لتكن R حلقة، وليكن a عنصرًا ثابتًا في R، وليكن $I_a = \{x\in R|\ ax = 0\}$ بيّن أنّ I_a هي حلقة جزئية من R.

51. لتكن R حلقة، وليكن a عنصرًا ثابتًا في R، ولتكن R_a تعني الحلقة الجزئية من R، التي تمثل تقاطع الحلقات الجزئية كلها من R التي تحوي a (انظر تمرين 49)، الحلقة R_a هي **الحلقة الجزئية من R المولدة من a** (**subring of *R* generated by *a***). بيّن أنّ الزمرة الإبدالية $\langle R_a,+\rangle$ مولدة (كما في الفصل 7) من المجموعة $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

52. (مبرهنة الباقي الصينية لتطابقين) خذ عددين صحيحين موجبين r و s، حيث: ق.م.أ (r,s) =1. استخدم التماثل في المثال 15.18 لتبيّن أنه لـ $m ,n \in \mathbb{Z}$ يوجد عدد صحيح x، حيث $x \equiv m$ (مقياس r) و $x \equiv n$ (مقياس s).

53. أ. اذكر التعميم لمثال 15.18 وأثبته للضرب المباشر لـ n من العوامل.

ب. أثبت مبرهنة الباقي الصينية: خذ $a_i ,b_i \in \mathbb{Z}^+$ لكل $i = 1, 2, \dots , n$، وليكن $gcd (b_i, b_j)= 1$ لـ $i \neq j$. عندها يوجد $x \in \mathbb{Z}^+$ ، حيث $x \equiv a_i$ (مقياس b_i) لـ $i = 1, 2, \dots n$

54. اعتبر $\langle S, +, \cdot \rangle$، حيث S مجموعة و + و . عمليات ثنائية على S حيث $\langle S, + \rangle$ زمرة $\langle S^*, \cdot \rangle$ زمرة، حيث S^* تحوي العناصر كلها في S عدا العنصر المحايد في عملية الجمع $a(b+c) = (ab) + (ac)$ و $(a+b)c = (ac) + (bc)$ لكل $a, b, c \in S$.

بيّن أنّ $\langle S, +, \cdot \rangle$ حلقة قسمة. [مساعدة: طبق قانوني التوزيع على $(a+b)(1+1)$ لتثبيت أنّ الجمع إبدالي].

55. الحلقة R حلقة بولينية (**Boolean ring**)، إذا كان $a^2 = a$ لكل $a \in R$، أي إنّ كل عنصر متساوي القوى. بيّن أنّ الحلقة البولينية إبدالية.

56. (خاص بالطلاب الذين يملكون بعض المعرفة لقوانين مبرهنة المجموعة). لأي مجموعة S دع $\mathcal{P}(S)$ تحوي المجموعات بالطلاب كلها من S. لندع العمليات الثنائية + و . على $\mathcal{P}(S)$ تعرف على النحو الآتي:

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{ x \mid x \in A \text{ أو } x \in B \text{ لكن } x \notin (A \cap B) \}$$

و

$$A . B = A \cap B$$

لـ $A, B \in \mathcal{P}(S)$

أ. أوجد جدولي الجمع والضرب على $\mathcal{P}(S)$ حيث $S = \{a, b\}$. [مساعدة: $\mathcal{P}(S)$ فيها أربعة عناصر].

ب. بيّن أنه لأي مجموعة S، $\langle \mathcal{P}(S), +, . \rangle$ هي حلقة بولينية. (انظر تمرين 55).

الحلقات التامة Integral Domains

على الرغم من أننا لن نعالج كثيرات الحدود بطريقة موسعة قبل الفصل 22، إلّا أننا سنستخدمها بشكل مبسط في هذا الفصل بدافع التحفيز.

قواسم الصفر والحذف

إن من أهم الخصائص الجبرية لنظام الأعداد الاعتيادي أنّ حاصل ضرب عددين يساوي صفرًا، إذا كان على الأقل أحدهما صفرًا، وقد استخدمنا هذه الحقيقة مرات عدّة في حلّ المعادلات، وربما دون أن ندرك أننا نستخدمها. افترض – على سبيل المثال – أنه طلب منّا أن نحلّ المعادلة:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

فإنّ أول شيء نفعله هو تحليل الطرف الأيسر من المعادلة:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

وبعدها نستنتج أنّ القيم المحتملة الوحيدة لـ x هي 2 و3. لماذا؟ السبب، لأنه إذا استبدلنا x بأي عدد a، فإنّ ناتج الضرب

$(a-2)(a-3)$ هو 0، إذا وفقط إذا كان $a-2=0$ أو $a-3=0$.

1.19 مثال حلّ المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ في $\mathbb{Z}_{12}$.

الحل إنّ تحليل $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ يبقى صحيحًا، إذا اعتقدنا أنّ x تمثّل أي عدد من $\mathbb{Z}_{12}$ وليس فقط $0a = a0 = 0$ لكل $a \in \mathbb{Z}_{12}$، ولكن كذلك

$$\begin{aligned}(2)(6) &= (6)(2) = (3)(4) = (4)(3) = (3)(8) = (8)(3)\\ &= (4)(6) = (6)(4) = (4)(9) = (9)(4) = (6)(6) = (6)(8)\\ &= (8)(6) = (6)(10) = (10)(6) = (8)(9) = (9)(8) = 0\end{aligned}$$

في الحقيقة نجد أنه ليس 2 و3 هما فقط حلّا معادلتنا، ولكن أيضًا 6 و11؛ لأن $(6-2)(6-3) = (4)(3) = 0$ و$(11-2)(11-3) = (9)(8) = 0$ في $\mathbb{Z}_{12}$. ▲

2.19 تعريف إذا كان a و b عنصرين من الحلقة R ليس أي منهما صفرًا، حيث $ab=0$، فإن a وb **تقسم الصفر (أو قواسم الصفر)**. ■

يبيِّن مثال 1.19 أنّ العناصر 9، و8، و6، و4، و3، و2 و10 هي قواسم 0 في $\mathbb{Z}_{12}$. لاحظ أنّ هذه الأعداد هي فقط الأعداد التي في $\mathbb{Z}_{12}$، وليست أوليَّة بالنسبة إلى العدد 12، أي إنّ القاسم المشترك الأكبر لأي عدد من هذه الأعداد والعدد 12 ليس 1. مبرهنتنا القادمة مثال على الحالة العامة.

3.19 مبرهنة قواسم أل 0 في الحلقة $\mathbb{Z}_n$ هي بالضبط العناصر غير الصفرية من $\mathbb{Z}_{12}$ التي ليست أولية نسبيًّا مع n.

البرهان خذ $m \in \mathbb{Z}_n$، حيث $m \neq 0$، ودع القاسم المشترك الأكبر بين m وn هو $d \neq 1$،

فإن $m(\frac{n}{d}) = (\frac{m}{d})n$

و $(\frac{m}{d})n = 0$

لأنه من مضاعفات n؛ لذلك، فإن $m\left(\frac{n}{d}\right) = 0$ في $\mathbb{Z}_n$.

بينما ليس m ولا $\frac{n}{d}$ أصفارًا، لذلك m قاسم لـ 0.

من جهة أخرى، لنفرض أن $m \in \mathbb{Z}_n$ أولى بالنسبة إلى n، إذا كان $s \in \mathbb{Z}_n$ حيث $ms = 0$، فإن n تقسم ms حاصل ضرب m وs، وهما عنصران في $\mathbb{Z}$. لأنّ n أولى بالنسبة إلى m، توضح الخاصية المؤطرة 1 التي تبعت مثال 9.6 أنّ n تقسم s؛ لذلك، فإن $s=0$ في $\mathbb{Z}_n$. ♦

4.19 نتيجة إذا كان p عددًا أوليًّا، فإنه لا يوجد قواسم لـ 0 في $\mathbb{Z}_p$.

البرهان هذه النتيجة تأتي مباشرة من المبرهنة 3.19. ♦

نشير إلى أهمية أخرى لمفهوم قواسم الصفر تظهر في المبرهنة المقبلة، خذ الحلقة R، وخذ $a, b, c \in R$ **قوانين الحذف (Cancellation laws)** متحققة في R، إذا كان $ab = ac$، حيث: $a \neq 0$، فإن $b=c$ و $ba = ca$ حيث: $a \neq 0$ فإن $b = c$. هذه هي قوانين الحذف لعملية الضرب، وبالطبع قوانين الحذف لعملية الجمع متحققة في R ؛ لأن $\langle R, +\rangle$ زمرة.

5.19 مبرهنة قوانين الحذف متحققة في الحلقة R، إذا وفقط إذا لم يكن في الحلقة R قواسم لـ 0.

البرهان لتكن R حلقة تحقق قوانين الحذف، افترض أنّ $ab = 0$ لـ $a,b \in R$. علينا أن نبيّن أن a أو b تكون 0، وإذا كانت $a \neq 0$، فإن $ab = a0$ تؤدي إلى $b = 0$ باستخدام قوانين الحذف، وكذلك إذا كان $b \neq 0$، فإن $a = 0$، ما يعني أنه لا توجد قواسم لـ 0 في R إذا تحققت قوانين الحذف.

من جهة أخرى، افترض أنَّ R حلقة ليس فيها قواسم لـ 0، افترض أنّ $ab = ac$، حيث $a \neq 0$. فإن:

$$ab - ac = a(b-c) = 0$$

لأن $a \neq 0$ ؛ ولأن الحلقة R ليس فيها قواسم لـ 0، فإن $b-c = 0$ أي $b = c$. وباتباع الخطوات نفسها يمكن إثبات أنه إذا كان $ba = ca$، حيث $a \neq 0$، فإن $b = c$. ♦

افترض أنَّ الحلقة R ليس فيها قواسم لـ 0، فإن المعادلة $ax = b$، حيث $a \neq 0$، لها حل وحيد x في R على الأكثر؛ لأنه إذا كان $ax_1 = b$ و $ax_2 = b$ فإن $ax_1 = ax_2$، باستخدام المبرهنة 5.19، فإن $x_1 = x_2$ لأن R ليس فيها قواسم لـ 0. إذا احتوت R على عنصر محايد $1 \neq 0$، و a هو عنصر وحدة في R، حيث a^{-1} هو المعكوس الضربي لـ a، فإن الحل x للمعادلة $ax = b$ هو $a^{-1}b$. عندما تكون R إبدالية، وبوجه خاص إذا كانت R حقلًا، فمن المشهور أن نرمز لـ $a^{-1}b$ و ba^{-1} (هما متساويان؛ لأن R إبدالية) باستخدام القسمة $\frac{b}{a}$. هذه القسمة لا يجب استخدامها إذا كانت الحلقة R غير إبدالية؛ لأنه في هذه الحالة لا نعلم إذا كانت $\frac{b}{a}$ ترمز إلى $a^{-1}b$ أو إلى ba^{-1}، وبوجه خاص، المعكوس الضربي a^{-1} للعنصر غير الصفري a في حقل يمكن كتابته على الصورة $\frac{1}{a}$.

الحلقات التامة

إن الأعداد الصحيحة هي نظام الأعداد الأكثر شهرة، باعتبار الخصائص الجبرية، فإننا نناقش حقيقة أنَّ $\mathbb{Z}$ هي حلقة إبدالية فيها عنصر محايد، ولا تحوي قواسم لـ 0، بالتأكيد هذا ما كان وراء الاسم المعطى لمثل هذه البنية في التعريف المقبل.

6.19 تعريف ***Iintegral domain*** حلقة إبدالية فيها عنصر محايد $1 \neq 0$ ولا تحوي قواسم لـ 0. ■

لذلك، إذا كانت معاملات كثيرة حدود في حلقة تامة، فنستطيع أن نحل معادلة كثيرة حدود عن طريق تحليل كثيرة الحدود إلى عوامل خطية بالأسلوب الاعتيادي، من خلال جعل كل معامل يساوي 0.

في سلسلتنا من البنى الجبرية، تقع الحلقة التامة بين الحلقات الإبدالية ذات العنصر المحايد والحقول، كما سوف نوضح، وقد بيّنت المبرهنة 5.19 أنّ قوانين الحذف للضرب متحققة في الحلقة التامة.

7.19 مثال لاحظنا أنّ $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_p$ حلقات تامة لأي عدد أولي p، ولكن $\mathbb{Z}_n$ ليست حلقة تامة إذا كانت n عددًا غير أولي، وعند التفكير لحظة، يتضح أنّ الضرب المباشر $R \times S$ للحلقتين غير الصفريتين R و S ليس حلقة تامة، فقط لاحظ أنه لأي $r \in R$ و $s \in S$، بحيث إن كليهما لا يساوي صفرًا، فإن $(r,0)(0,s) = (0,0)$. ▲

8.19 مثال بيّن أنه على الرغم من أنّ $\mathbb{Z}_2$ حلقة تامة، فإن حلقة المصفوفة $M_2(\mathbb{Z}_2)$ تحتوي على قواسم للصفر.

الحل نحتاج إلى أن نلاحظ أنّ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲

مبرهنتنا المقبلة توضح أنّ بنية الحقول ما زالت هي الأكثر تحديدًا (أي الأغنى) فيما قمنا بتعريفه.

9.19 مبرهنة أي حقل F هو حلقة تامة.

البرهان لتكن $a, b \in F$، وافترض أنّ $a \neq 0$. إذا كان $ab=0$، فإن:

$$\left(\frac{1}{a}\right)(ab) = \left(\frac{1}{a}\right) 0 = 0$$

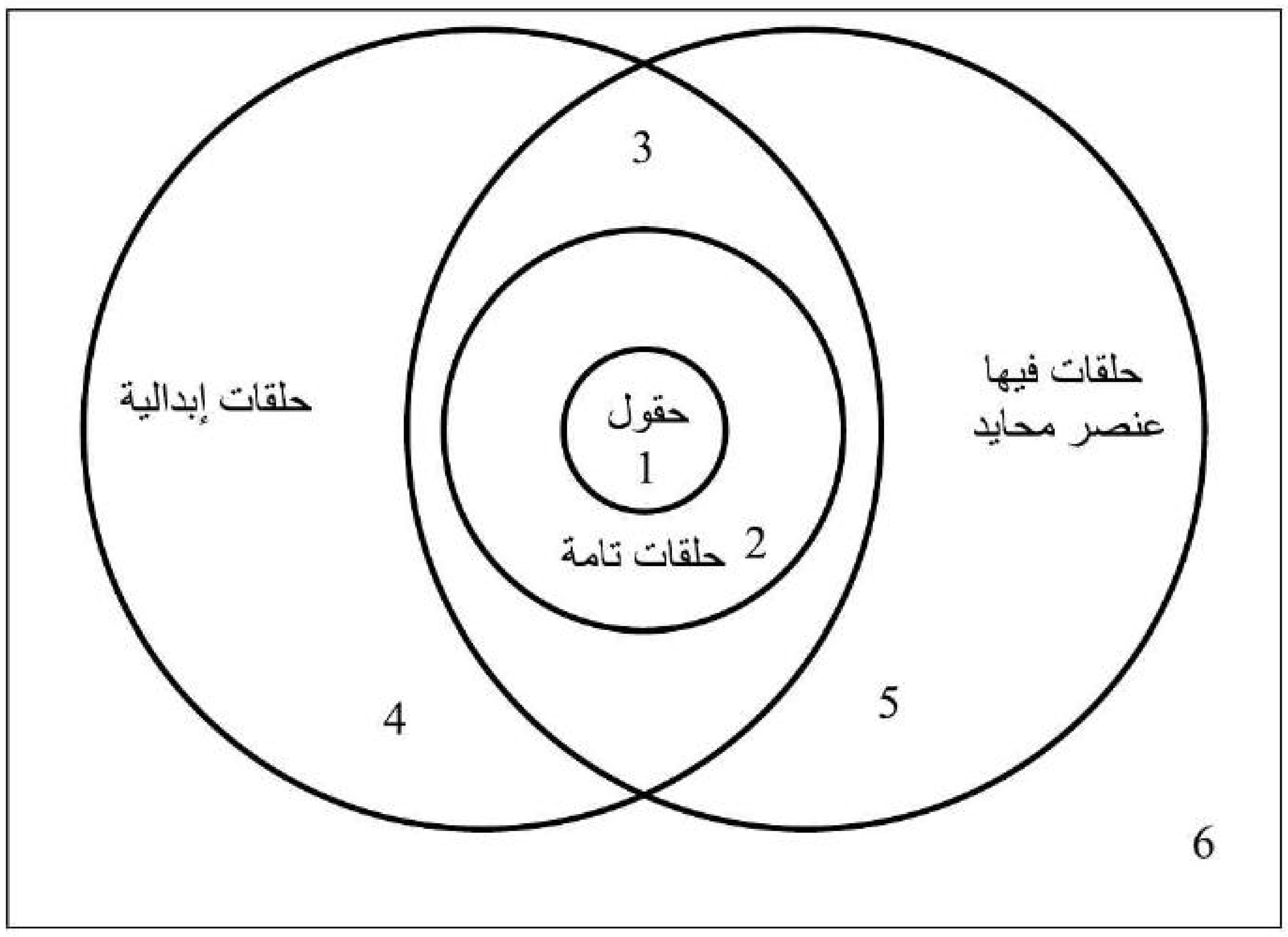
وعليه، فإن

$$0 = \left(\frac{1}{a}\right)(ab) = \left[\left(\frac{1}{a}\right) a\right] b = 1b = b$$

إذن، فقد وضحنا أنّ $a\, b = 0$، حيث $a \neq 0$ يؤدي إلى $b = 0$ في F، وهذا يعني أنّ الحقل F لا يحوي قواسم للصفر، وبالطبع، فإن F هو حلقة إبدالية، ويملك عنصرًا محايدًا، وعليه، فإن مبرهنتنا أثبتت. ♦

يعطي الشكل 10.19 رسوم فن البيانية التي تبين العلاقات بين البنى الجبرية المعرف عليها عمليتان ثنائيتان والتي هي محور اهتمامنا، وسنطلب منك في تمرين 20 أن تعيد رسم هذا الشكل مرة أخرى، بعد أن تضيف له حلقات القسمة.

الحقول المعلومة لدينا حتى الآن هي $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$، وستكشف لنا النتيجة التي تعقب المبرهنة المقبلة عن بعض الحقول منتهية الرتبة، إذ إنّ إثبات المبرهنة المقبلة ذو نكهة خاصة، ويعتمد على العدّ، الذي يُعدّ من أهم التقنيات القوية في الرياضيات.



الشكل 10.19 مجموعة من الحلقات

11.19 مبرهنة كل حلقة تامة منتهية تكون حقلاً.

البرهان افترض أنّ

$$0,\ 1,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$$

هي عناصر الحلقة التامة المنتهية D، ونريد أن نبين أنه لـ $a \in D$ حيث $a \neq 0$، يوجد $b \in D$ بحيث $ab=1$. خذ

$$a1,\ aa_1,\ldots,\ aa_n$$

ندَّعي أن هذه العناصر مختلفة في D؛ ولأنّ قوانين الحذف متحققة في أي حلقة تامة، فإن $aa_i = aa_j$ يؤدي إلى $a_i = a_j$، كذلك لأنّ D ليس فيها قواسم لـ 0، فليس أيّ من هذه العناصر يساوي 0، وباستخدام مبدأ العد (*counting*) نجد أن $a1,\ aa_1, \ldots,\ aa_n$ هي العناصر نفسها $1,\ a_1,\ \ldots\ a_n$ ولكن بترتيب معين، وهذا يعني أنه إما $a1 = 1$ أي $a = 1$ أو $aa_i = 1$ لعدد i، ما يعني أن a لها معكوس ضربي. ♦

12.19 نتيجة إذا كان p عددًا أوليًّا، فإن $\mathbb{Z}_p$ حقل.

البرهان هذه النتيجة تأتي مباشرة من حقيقة أن $\mathbb{Z}_p$ حلقة تامة بحسب المبرهنة 11.19 ♦

بينت النتيجة السابقة أنه عندما ندرس الحلقة $M_n\left(\mathbb{Z}_p\right)$، فإننا نتكلم عن حلقة مصفوفات على حقل (*field*)، وفي مادة الجبر الخطي لمستوى البكالوريوس استخدمنا في معظم تلك المادة خصائص حقل الأعداد الحقيقية أو الأعداد المركبة، إضافة إلى أنّ بعض المفاهيم، مثل اختصار المصفوفة لحل أنظمة المعادلات الخطية، والمحددات، وقانون كريمر، والقيم الذاتية، والمتجهات الذاتية والتحويلات التشابهية لتحويل المصفوفة إلى مصفوفة قطرية، متحققة باستخدام المصفوفات على أي حقل؛ لأنها تعتمد فقط على الخواص الحسابية للحقل، ولكن في الجبر الخطي الذي يحتوي على بعض مفهوم المقدار، مثل أصغر المربعات لتقريب الحلول أو أساسات متعامدة معايرة، فإن هذه المفاهيم لها معنًى فقط إذا استخدمنا الحقول التي فيها

فكرة المقدار.

العلاقة $p \cdot 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = 0$ من الحدود

تبين أنه لا يمكن أن يكون هناك مفهوم طبيعي للمقدار في الحقل $\mathbb{Z}_p$.

مميزة الحلقة

خذ أي حلقة R، يمكننا أن نتساءل: هل يوجد عدد صحيح موجب مثل n، حيث $n.a= 0$ لكل $a \in R$، حيث $n.a$ يعني $a+ a+ \ldots + a$، n مرة، كما تقدم شرحه في الفصل 18، على سبيل المثال: العدد الصحيح m يملك هذه الخاصية في الحلقة $\mathbb{Z}_m$.

13.19 تعريف إذا توافر لحلقة مثل R عدد صحيح موجب n، بحيث $n.a= 0$ لكل $a\in R$، فإن أصغر عدد صحيح موجب يحقق هذه الخاصية يسمى **مميز الحلقة** R (***characteristic of the ring***)، وإذا لم يوجد مثل هذا العدد الصحيح الموجب، فإن الحلقة R **مميزها** 0. ■

سنستخدم في المقام الأول مفهوم المميز للحقول، حيث يطلب منا تمرين 29 أن نبين أنّ مميز الحلقة التامة إما 0 أو عددًا أوليًّا p.

14.19 مثال مميز الحلقة $\mathbb{Z}_n$ هو n، بينما $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ كلها مميزها 0. ▲

من الوهلة الأولى يبدو أن معرفة مميز الحلقة عمل شاق، إلّا إذا كان من الواضح أنّ الحلقة مميزها 0. هل حقًّا نحتاج إلى أن نختبر كل عنصر a في الحلقة كما هو منصوص عليه في التعريف 13.19؟ تبين مبرهنتنا الأخيرة في هذا الفصل، أنه إذا توافر عنصر محايد في الحلقة، فيكفي أن نختبر $a= 1$ فقط.

15.19 مبرهنة لتكن R حلقة تحتوي على عنصر محايد، وإذا كان $n.1 \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن مميز الحلقة R هو 0، أما إذا توافر $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $n.1= 0$، فإن أصغر عدد صحيح n له هذه الخاصية سيكون مميز الحلقة R.

البرهان إذا كان $n.1 \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$، فبالتأكيد لا يمكن أن يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$، بحيث $n.a = 0$ لكل $a \in R$، لذلك وباستخدام التعريف 13.19؛ فإن مميز R هو 0.

افترض أنه يوجد عدد صحيح موجب n حيث $n.1 = 0$، فإنه لأي $a \in R$ سيكون

$n.a= a + a+ \ldots + a = a\,(1+ 1+ \ldots +1) = a\,(n.1) = a0= 0$ وبذلك تثبت مبرهنتنا مباشرة. ♦

تمارين 19

حسابات

1. أوجد الحلول جميعها للمعادلة $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ في $\mathbb{Z}_{12}$.

2. حلّ المعادلة $3x = 2$ في الحقل $\mathbb{Z}_7$ والحقل $\mathbb{Z}_{23}$.

3. أوجد الحلول جميعها للمعادلة $x^2 + 2x + 2 = 0$ في $\mathbb{Z}_6$.

4. أوجد الحلول جميعها للمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ في $\mathbb{Z}_6$.

في التمارين 5 إلى 10، أوجد مميز الحلقة المعطاة.

5. $2\mathbb{Z}$ **6.** $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **7.** $\mathbb{Z}_3 \times 3\mathbb{Z}$

8. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ **9.** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ **10.** $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$

11. لتكن الحلقة الإبدالية R مع عنصر محايد ومميزها 4. لـ $a, b \in R$، احسب $(a+b)^4$ وبسِّطه.

12. لتكن الحلقة الإبدالية R مع عنصر محايد ومميزها 3. لـ $a, b \in R$، احسب $(a+b)^9$ وبسِّطه.

13 لتكن الحلقة الإبدالية R مع عنصر محايد ومميزها 3. لـ $a, b \in R$ احسب $(a+b)^6$ وبسِّطه.

14. أثبت أنّ المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ قاسم للصفر في $M_2(\mathbb{Z})$.

مفاهيم

في التمرينين 15 و16، صحح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

15. إذا كان $ab = 0$، فإن a و b قواسم للصفر.

16. إذا كان $n.a = 0$ لكل a في الحلقة R، فإن n مميز R.

17. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

__________ أ. $n\mathbb{Z}$ تحتوي على قواسم للصفر إذا لم يكن n عددًا أوليًّا.

__________ ب. يكون كل حقل حلقة تامة.

__________ جـ. مميز $n\mathbb{Z}$ هو n.

__________ د. الحلقة $\mathbb{Z}$ تماثل الحلقة $n\mathbb{Z}$ لكل $n \geq 1$.

__________ هـ. قانون الحذف متحقق في أي حلقة تماثل حلقة تامة.

__________ و. كل حلقة تامة مميزها 0 غير منتهية.

__________ ز. الضرب المباشر لحلقتين تامتين يعطي حلقة تامة.

__________ ح. في حلقة إبدالية فيها عنصر محايد، لا يكون لقاسم الصفر معكوس ضربي.

__________ ط. $n\mathbb{Z}$ حلقة تامة جزئية من $\mathbb{Z}$.

__________ ي. $\mathbb{Z}$ حقل جزئي من $\mathbb{Q}$.

18. كل منطقة من المناطق الست المرقمة في الشكل 10.19 تمثل نوعًا محددًا من الحلقات. أعطِ مثالاً على حلقة تقع في كل منطقة من المناطق الست، على سبيل المثال: الحلقة المتوافرة في المنطقة 3 يجب أن تكون إبدالية (لأنها داخل دائرة الإبدالية) ولها عنصر محايد، لكنها ليست حلقة تامة.

19. (خاص بالطلاب الذين درسوا مادة الجبر الخطي). خذ الحقل F، وأعطِ خمس صفات مختلفة لعنصر A في $M_n(F)$، ليكون قاسمًا للصفر.

20. أعد رسم الشكل 10.19 ليحوي المجموعة الجزئية التي تمثل حلقات القسمة.

براهين مختصرة

21. أعطِ جملة مختصرة لإثبات الجزء «إذا» في المبرهنة 5.19.

22. أعطِ جملة مختصرة لإثبات المبرهنة 11.19.

براهين

23. يسمى العنصر a في الحلقة R **متساوي القوى (idempotent)** إذا كان $a^2= a$. بيّن أنّ حلقة القسمة تحتوى فقط على عنصرين متساويي القوى.

24. أثبت أنّ تقاطع حلقات تامة جزئية من حلقة تامة D هو حلقة تامة جزئية في D.

25. أثبت أنّ الحلقة المنتهية R التي فيها عنصر محايد $1\neq 0$، ولا توجد فيها قواسم لـ 0 هي حلقة قسمة. (في الواقع هي حقل على الرغم من أنّ إثبات الخاصية الإبدالية ليس بالأمر الهين. انظر المبرهنة 10.24).

[ملاحظة: لتبين أن $a\neq 0$ عنصر وحدة، عليك أن تبين أن "المعكوس الضربي من اليسار" لـ $a\neq 0$ في R هو أيضًا «معكوس ضربي من اليمين»].

26. خذ حلقة R فيها عنصران على الأقل، افترض أنه لكل عنصر غير صفري $a\in R$ يوجد عنصر وحيد $b\in R$ بحيث

$$aba= a.$$

أ. أثبت أنّ R ليس فيها قواسم للصفر.

ب. أثبت أنّ $bab= b$.

جـ. أثبت أنّ R فيها عنصر محايد.

د. أثبت أنّ R حلقة قسمة.

27. أثبت أنّ مميز حلقة تامة جزئية من حلقة تامة D هو مميز D.

28. أثبت أنه إذا كانت D حلقة تامة، فإن $\{n.1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ حلقة تامة جزئية من D محتواة في أي حلقة تامة جزئية من D.

29. أثبت أنّ مميز الحلقة التامة D إما 0 أو عددًا أوليًّا p.

[مساعدة: إذا كان مميز D هو mn، فخذّ $(n.1)\ (m.1)$ في D].

30. يوضّح هذا التمرين أنّ أي حلقة R يمكن تكبيرها (إذا لزم الأمر) إلى حلقة S فيها عنصر محايد، ولها مميز R نفسه، خذ $S = R \times \mathbb{Z}$ إذا كان مميز R يساوي 0، و $R \times \mathbb{Z}_n$ إذا كان مميز R يساوي n. ليكن الجمع على S هو الجمع الاعتيادي على المركبات، وسنعرِّف الضرب بـ

$$(r_1\,,\, n_1)\,.\,(r_2, n_2) = (r_1 r_2 + n_1.\, r_2 + n_2.\, r_1, n_1\, n_2)$$

حيث إنّ معنى $n.r$ كما هو مشروح في الفصل 18.

أ. أثبت أنّ S حلقة.

ب. أثبت أنّ S فيها عنصر محايد.

جـ. أثبت أنّ S و R لهما المميز نفسه.

د. أثبت أنّ الدالة $\phi : R \longrightarrow S$ المعطاة بالعلاقة $\phi(r) = (r, 0)$ لـ $r \in R$ تربط R تماثليًّا وبصورة غامرة مع حلقة جزئية من S.

مبرهنتا فيرما وأويلر Fermat's and Euler's Theorems

مبرهنة فيرما

نعلم أنّ الزمرتين الجمعيتين $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بينهما تماثل طبيعي، حيث المجموعة المشاركة $a+n\mathbb{Z}$ تقابل a لكل $a \in \mathbb{Z}_n$، إضافة إلى ذلك فإن، جمع المجموعات المشاركة من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يمكن تشكيله عن طريق أخذ مجموعة من الممثلين وجمعها في $\mathbb{Z}$، ثم حساب المجموعة المشاركة لناتج الجمع، إذ من السهولة ملاحظة أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ يمكن تحويلها إلى حلقة عن طريق ضرب المجموعات المشاركة بالأسلوب نفسه، أي بضرب مجموعة من الممثلين المختارين، حيث سنوضّح الحالة العامة لهذا فيما بعد، بينما نوضح الحالة الخاصة الآن. نحتاج إلى أن نثبت فقط، أنّ ضرب المجموعات المشاركة حسن التعريف؛ لأن العملية التجميعية على الضرب وقانوني التوزيع يتبعان مباشرة من خصائص الممثلين المختارين من $\mathbb{Z}$.

لإثبات ذلك، اختر الممثلين $a+rn$ و $b+sn$ بدلاً من a و b من المجموعتين المشاركتين $a+n\mathbb{Z}$ و $b+n\mathbb{Z}$. عندها:

$$(a+rn)(b+sn)=ab+(as+rb+rsn)n$$

وهو أيضًا عنصر في $ab+n\mathbb{Z}$؛ لذلك، فإن الضرب حسن التعريف، وعليه، تشكل المجموعات المشاركة حلقة تماثل الحلقة $\mathbb{Z}_n$.

الآتي هو حالة خاصة من تمرين 37 في الفصل 18.

مجموعة العناصر غير الصفرية في أي حقل تشكل زمرة بالنسبة إلى عملية الضرب المعرفة على الحقل.

بوجه خاص، العناصر من $\mathbb{Z}_p$

$$1,2,3,\ldots,p-1$$

تشكل زمرة من الرتبة $p-1$ بالنسبة إلى عملية الضرب مقياس p؛ لأن رتبة أي عنصر في زمرة يقسم رتبة الزمرة، نرى أنه لـ $b \neq 0$ و $b \in \mathbb{Z}_p$، فإن $b^{p-1}=1$ في $\mathbb{Z}_p$، وباستخدام حقيقة أنّ $\mathbb{Z}_p$ تماثل حلقة المجموعات المشاركة على الصورة $a+p\mathbb{Z}$ الموصوفة في الأعلى، فسنرى من الوهلة الأولى أنّه لأي $a \in \mathbb{Z}$ ليس في المجموعة المشاركة $0+p\mathbb{Z}$ فإن:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{مقياس } p)$$

هذه العلاقة ستعطينا في الحال ما يُسمّى المبرهنة الصغرى لفيرما.

1.20 المبرهنة (المبرهنة الصغرى لفيرما) (**Little theorem of Fermat**)

إذا كانت $a \in \mathbb{Z}$ و p عددًا أوليًّا لا يقسم a، فإن p يقسم $a^{p-1}-1$، أي إنّ $a^{p-1} \equiv 1$ (p مقياس) لـ $a \not\equiv 0$ (p مقياس).

2.20 نتيجة إذا كانت $a \in \mathbb{Z}$، فإن $a^p \equiv a$ (p مقياس) لأيّ عدد أولي p.

البرهان هذه النتيجة مشتقة من المبرهنة 1.20 في حالة $a \not\equiv 0$ (مقياس p)، أما إذا كانت $a \equiv 0$ (مقياس p) فإن كلا الجانبين يختصر إلى 0 مقياس p. ♦

■ **نبذة تاريخية**

ظهر نص المبرهنة 1.20 من رسالة من بييردي فيرما (Pierre de Fermat 1601- 1665) إلى بيرنارد فيرنيكل دي بيسي (Bernard Frenicle de Bessy) مؤرخة بتاريخ 18 أكتوبر عام 1640م.

حيث نصّت مبرهنة فيرما على أنه لأيّ عدد أولي p ولأيّ متوالية هندسية $a, a^2, ..., a^t, ...,$ يوجد على الأقل عدد a^T من المتوالية، بحيث p يقسم $a^T - 1$، يوجد إضافة إلى ذلك، T يقسم p-1 و p وكذلك يقسم كل الأرقام $a^{KT} - 1$.

(إنه لأمر غريب أن يفشل فيرما في ملاحظة شرط عدم قسمة p لـ a، وربما شعر بأنه لأمر واضح أنّ النتيجة تفشل في هذه الحالة).

لم يكتب فيرما إثبات هذه النتيجة في رسالته أو أي مكان آخر، وفي الحقيقة، فإنه لم يذكر هذه المبرهنة مرة أخرى، ولكن اهتمامه بهذه النتيجة جاء من خلال دراسته للأعداد التامة. (العدد التام هو عدد صحيح موجب m بحيث يساوي مجموعة قواسمه الأقل منه، على سبيل المثال: 6=1+2+3 هو عدد تام)، وقد أوضح إقليدس (Euclid) أن $\left(2^n - 1\right) 2^{n-1}$ عدد تام إذا كان $2^n - 1$ عددًا أوليًّا، كان السؤال في إيجاد طريقة لتحديد فيما إذا كان $2^n - 1$ عددًا أوليًّا أم لا، إذ لاحظ فيرما أنّ $2^n - 1$ عدد مركب إذا كان n عددًا مركبًا، وبعدها اشتق من المبرهنة النتيجة الآتية: إذا كان n عددًا أوليًّا، فإن القواسم المحتملة لـ $2^n - 1$ تكون على صورة $2kn + 1$، ومن هذه النتيجة استطاع أن يبين على سبيل المثال: أن $2^{37} - 1$ قابل للقسمة على $2.3.37 + 1 = 223$.

3.20 مثال لنحسب باقي قسمة 8^{103} على 13، باستخدام مبرهنة فيرما سيكون عندنا:

$$8^{103} \equiv (8^{12})^8 (8^7) \equiv (1^8)(8^7) \equiv 8^7 \equiv (-5)^7$$
$$\equiv (25)^3(-5) \equiv (-1)^3(-5) \equiv \text{(مقياس 13)}$$ ▲

4.20 مثال: وضّح أن $2^{11.213} - 1$ غير قابل للقسمة على 11.

الحل باستخدام مبرهنة فيرما، فإن $2^{10} \equiv 1$ (مقياس 11)، وعليه، فإن

$$2^{11.213} - 1 \equiv \left[(2^{10})^{1.121} . 2^3\right] - 1 \equiv \left[1^{1.121} . 2^3\right] - 1$$
$$\equiv 2^3 - 1 \equiv 8 - 1 \equiv 7 \text{ (مقياس 11)}$$

أي إنّ باقي قمسة $2^{11.213}-1$ على 11 يساوي 7 وليس 0، (العدد 11,213 عدد أولي، وقد أثبت أنّ $2^{11.213}-1$ عدد أولي، وتُعرف الأعداد الأولية 2^p-1 حيث p عدد أولي **بأعداد مرسين الأولية (Mersenne Primes).** ▲

5.20 مثال بيّن أنه لأي عدد صحيح n، العدد $n^{33}-n$ قابل للقسمة على15.

الحل تبدو أنها نتيجة غير معقولة، فهي تعني أنّ 15 يقسم $2^{33}-2$ و $3^{33}-3$ و $4^{33}-4$ وهكذا.

الآن،15=3.5، سنستخدم مبرهنة فيرما في إثبات أنّ $n^{33}-n$ قابل للقسمة على كلا العددين 3 و5 لأي عدد n، لاحظ أنّ $n^{33}-n=n(n^{32}-1)$.

إذا كان 3 يقسم n، فبالتأكيد 3 يقسم $n(n^{32}-1)$، ولكن إذا كان 3 لا يقسم n، فإنه باستخدام مبرهنة فيرما، $n^2\equiv 1$ (مقياس 3)، وعليه، فإنّ:

$$n^{32}-1\equiv (n^2)^{16}-1\equiv 1^{16}-1\equiv 0 \text{ (مقياس 3)}$$

وهذا يعني أنّ 3 يقسم $n^{32}-1$.

إذا كان $n\equiv 0$ (مقياس 5) فإن $n^{33}-n\equiv 0$ (مقياس 5) أما إذا كان

$n\not\equiv 0$ (مقياس 5)، فباستخدام مبرهنة فيرما، $n^4\equiv 1$ (مقياس 5) وعليه، فإنّ:

$$n^{32}-1\equiv (n^4)^8-1\equiv 1^8-1\equiv 0 \text{ (مقياس 5)}$$

وهذا يعني أنّ $n^{33}-n\equiv 0$ (مقياس 3) لأيّ عدد n. ▲

تعميم أويلر

قدم أويلر تعميمًا لمبرهنة فيرما، وسيكون تعميمه هذا نتيجة للمبرهنة المقبلة، التي أثبتت عن طريق العد (*Counting*)، مستخدمين المبدأ نفسه الذي استخدم في إثبات مبرهنة 11.19.

6.20 المبرهنة

المجموعة G_n للعناصر غير الصفرية في $\mathbb{Z}_n$، التي هي ليست قواسم للصفر تمثل زمرة تحت الضرب مقياس n.

البرهان يجب علينا أولاً إثبات أنّ G_n مغلقة تحت عملية الضرب مقياس n، خذ $a,b \in G_n$ إذا كان $ab \notin G_n$، فإنه يوجد $c \neq 0$ في $\mathbb{Z}_n$، حيث $(ab)\,c = 0$.

الآن، $(ab)\,c = 0$ يؤدي إلى $a(bc) = 0$، لأن $b \in G_n$ و $c \neq 0$ فإنه باستخدام تعريف المجموعة G_n، $bc \neq 0$، وعليه، فإن $a(bc) = 0$ يؤدي إلى أن $a \notin G_n$، وهذا يناقض الفرض. لاحظ أنّنا بيّنا مسبقًا أنه لأيّ حلقة، تكون مجموعة العناصر التي هي ليست قواسم للصفر مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب؛ ولأن $\mathbb{Z}_n$ حلقة، فإن بنية $\mathbb{Z}_n$ لا تختلف عن بنية أيّ حلقة.

وسنثبت الآن أن G_n زمرة، بالطبع الضرب مقياس n يحقق الخاصية التجميعية و $1 \in G_n$، بقي علينا أن نثبت أنه لأيّ

$a \in G_n$ يوجد $b \in G_n$ حيث $ab = 1$. افترض أنّ:

$$1, a_1, \ldots, a_r$$

هي عناصر G_n، والعناصر

$$a1, aa_1, \ \ldots, a.a_r$$

هي عناصر مختلفة؛ لأن $aa_i = aa_j$ يؤدي إلى $a(a_i - a_j) = 0$، ولأن $a \in G_n$، أي ليست أحد قواسم الصفر، فإن $a_i - a_j = 0$ أيّ $a_i = a_j$؛ ولهذا وعن طريق العد، سنجد أنه إما $a.1 = 1$ أو aa_j يجب أن يكون 1 لأحد عناصر $a_i \in G_n$؛ لذلك، فإن a له معكوس ضربي. ♦

لاحظ أنّ الخاصية الوحيدة لـ $\mathbb{Z}_n$ المستخدمة في المبرهنة السابقة، عدا أنّها حلقة فيها عنصر محايد، فهي منتهية أيضًا، وقد وظفنا مبدأ العدّ في كلتا المبرهنتين 11.19 و6.20، وهو مبدأ بسيط، ولكنه من بين أقوى الأدوات المستخدمة في الرياضيات.

خذ عددًا صحيحًا موجبًا n، ودعنا نعرّف $\varphi(n)$ بعدد الأرقام الصحيحة الموجبة التي هي أقل من أو تساوي n، والتي هي أولية بالنسبة إلى n، لاحظ أنّ $\varphi(1) = 1$

7.20 مثال لتكن $n = 12$، الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أقل من أو تساوي 12 وأولية بالنسبة إلى 12 هي 1، 5، 7 و11؛ لذلك $\varphi\,(12) = 4$ ▲

باستخدام المبرهنة 3.19، $\varphi(n)$ هو عدد العناصر غير الصفرية في $\mathbb{Z}_n$، التي هي ليست قواسم للصفر، هذه الدالة $\varphi = \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ تسمى فاي لأويلر **(Euler phi-function)** يمكننا الآن أن نصف تعميم أويلر لمبرهنة فيرما.

8.20 مبرهنة (مبرهنة أويلر)، إذا كان a عددًا صحيحًا أوليًا نسبيًّا مع n، فإن $a^{\varphi(n)} - 1$ قابل للقسمة على n، أي إن $a^{\varphi(n)} \equiv 1$. (مقياس n).

البرهان إذا كان a أوليًا نسبيًا مع n، فإن المجموعة المشاركة $a + n\mathbb{Z}$ من $n\mathbb{Z}$ التي فيها a، تحوي عددًا صحيحًا $b < n$ وأوليًا نسبيًا مع n.

باستخدام حقيقية أنّ الضرب بين المجموعات المشاركة عن طريق الضرب مقياس n لممثلي هذه المجموعات هو حسن التعريف، فإن

$$a^{\varphi(n)} \equiv b^{\varphi(n)} \ (n \text{ مقياس})$$

باستخدام المبرهنتين 3.19و 6.20، يُنْظَر إلى b على أنه عنصر في المجموعة الضربية G_n من الرتبة $\varphi(n)$، التي تحوي $\varphi(n)$ من العناصر من $\mathbb{Z}_n$ كل منها أولي بالنسبة إلى n، وعليه، فإنّ:

$$b^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (n \text{ مقياس})$$

ما يعني أن مبرهنتنا قد أُثبتت. ◆

9.20 مثال لتكن $n = 12$، رأينا في مثال 7.20 أنّ $\varphi(12) = 4$، أي إنه إذا أخذنا عددًا صحيحًا مثل a أوليًا بالنسبة إلى 12، فإن $a^4 \equiv 1$ (مقياس 12)، على سبيل المثال: إذا كان $a = 7$، فإن $7^4 = (49)^2 = 2401 = 12(200) + 1$؛ لذلك، فإن $7^4 \equiv 1$ (مقياس 12) وبالطبع، فإن أسهل طريقة لحساب 7^4 (مقياس 12)، دون استخدام مبرهنة أويلر، هي حسابها في $\mathbb{Z}_{12}$، حيث نعلم في $\mathbb{Z}_{12}$ أن $7 = -5$ ؛ لذلك:

$$7^2 = (-5)^2 = 5^2 = 1 \quad \text{و} \quad 7^4 = 1^2 = 1$$ ▲

تطبيق على $ax \equiv b$ (مقياس m)

باستخدام المبرهنة 6.20، نستطيع أن نجد حلول التطابق الخطّي $ax \equiv b$ (مقياس m) كلها، نفضل أن نتعامل مع معادلة في $\mathbb{Z}_m$، ومن ثم نفسر النتائج بوصفها تطابقات.

10.20 مبرهنة ليكن m عددًا موجبًا صحيحًا، وخذ $a \in \mathbb{Z}_m$ أوليًا نسبيًا مع m، لأي عدد $b \in \mathbb{Z}_m$ ، المعادلة $ax = b$ لها حل وحيد في $\mathbb{Z}_m$.

البرهان باستخدام المبرهنة 6.20، فإن a عنصر وحدة في $\mathbb{Z}_m$ و $s = a^{-1}b$ هو بالتأكيد حل للمعادلة، وبضرب طرفي المعادلة $ax = b$ من اليسار بـ a^{-1} سنرى أنه الحل الوحيد. ◆

في حالة تفسير هذه المبرهنة بوصفها تطابقات سنخرج بالنتيجة الآتية:

11.20 نتيجة إذا كان a و m عددين صحيحين أوليين نسبيًا، فإنه لأي عدد صحيح b، الأعداد الصحيحة التي تمثل حلولًا للتطابق $ax \equiv b$ (مقياس m) تقع بالضبط في صف بواقي واحد مقياس m.

المبرهنة 10.20 تخدم بوصفها تمهيدية للحالة العامة.

12.20 مبرهنة ليكن m عددًا صحيحًا موجبًا، وخذ $a,b \in \mathbb{Z}_m$. $gcd\,(a,m) = d$. المعادلة $ax = b$ لها حل في $\mathbb{Z}_m$، إذا وفقط إذا كان d يقسم b. عندما d يقسم b سيكون للمعادلة بالضبط d من الحلول في $\mathbb{Z}_m$.

البرهان أولاً، سنثبت أنه لا يوجد حل للمعالة $ax = b$ في $\mathbb{Z}_m$، إلا إذا كان d يقسم b، افترض أن $s \in \mathbb{Z}_m$ هو حل للمعادلة، فإن $as - b = qm$ في $\mathbb{Z}$؛ لذلك، $b = as - qm$، ولأنّ d يقسم كلًّا من a و m، فإنه يقسم الجانب الأيمن من المعادلة $b = as - qm$؛ ولذلك فهو يقسم b، ما يعني أنّ الحل s متوافر فقط، إذا كان d يقسم b، افترض الآن، أنّ d يقسم b، وخذ

$$a = a_1 d, \qquad b = b_1 d, \qquad m = m_1 d$$

وعليه، فإنّ المعادلة $as - b = qm$ في $\mathbb{Z}$ يمكن إعادة صياغتها على الصورة $d(a_1 s - b_1) = d\,qm_1$، ونرى أنّ $as - b$ من مضاعفات m، إذا وفقط إذا كان $a_1 s - b_1$ من مضاعفات m_1، ما يعني أنّ الحلول s للمعادلة $ax = b$ في $\mathbb{Z}_m$ هي بالضبط العناصر التي تُقرأ مقياس m_1، التي تكون حلولًا للمعادلة $a_1 x = b_1$ في $\mathbb{Z}_{m_1}$، وخذ الآن $s \in \mathbb{Z}_{m_1}$ الذي يمثل الحل الوحيد للمعادلة $a_1 x = b_1$ في $\mathbb{Z}_{m_1}$ كما في المبرهنة 10.20، الأعداد في $\mathbb{Z}_m$ التي تختزل إلى s مقياس m_1 هي بالضبط العناصر التي تُحسب في $\mathbb{Z}_m$ كما يأتي:

$$s, s + m_1, s + 2m_1, s + 3m_1, \ldots, s + (d-1)m_1$$

وهذا يعني أنه يوجد d من الحلول للمعادلة في $\mathbb{Z}_m$. ♦

تقدم لنا المبرهنة 12.20 النتيجة التقليدية الآتية لإيجاد حلول أي تطابق خطي.

13.20 نتيجة ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الموجبين a و m، يوجد حل للتطابق (مقياس $ax \equiv b$ (m إذا وفقط إذا كان d يقسم b، في هذه الحالة، تكون حلول المعادلة هي الأعداد الصحيحة التي توجد بالضبط في d من صفوف البواقي المختلفة مقياس m.

في الواقع، وضّح إثباتنا للمبرهنة 12.20 حلول المعادلة (مقياس $ax \equiv b$ (m بصورة أكبر مما نصت عليه النتيجة السابقة، حيث بيّنت المبرهنة أنه إذا وجد أيّ حل s، فإن حلول المعادلة جميعها هي العناصر التي توجد في صفوف البواقي $(s + km_1) + (m\mathbb{Z})$، حيث $m_1 = \dfrac{m}{d}$، و k يأخذ القيم الصحيحة كلها من 0 إلى $d - 1$، إضافة إلى أنها تخبرنا أيضًا بأنه يمكننا إيجاد هذا الحل s عن طريق إيجاد $a_1 = \dfrac{a}{d}$ و $b_1 = \dfrac{b}{d}$، ومن ثم حل المتطابقة (مقياس $a_1 x \equiv b_1$ (m_1 ولحل هذه المتطابقة يمكننا استبدال a_1 و b_1 ببواقيهما مقياس m_1، ثمّ حلّ المعادلة $a_1 x = b_1$ في $\mathbb{Z}_{m_1}$.

14.20 مثال أوجد الحلول جميعها للمتطابقة $12x \equiv 27$ (مقياس 18).

الحل القاسم المشترك الأكبر بين 12 و 18 هو 6، إلّا أنّ 6 لا تقسم 27. باستخدام النتيجة السابقة، لا يوجد أي حل. ▲

15.20 مثال أوجد الحلول جميعها للمتطابقة $15x \equiv 27$ (مقياس 18).

الحل القاسم المشترك الأكبر بين 15 و18 هو 3 و3 يقسم 27.

استكمالاً لما هو مشروح قبل مثال 14.20، سنقسم كل شيء على 3، ونحصل على المتطابقة $5x \equiv 9$ (مقياس 6)، التي تعادل إيجاد حلول المعادلة $5x = 3$ في $\mathbb{Z}_6$، حيث إنّ العناصر التي تمثل عناصر وحدة في $\mathbb{Z}_6$ هي 1 و 5، والمعكوس الضربي لـ 5 هو 5 في هذه الزمرة. ما يعني أنّ حلّ المعادلة في $\mathbb{Z}_6$ هو $x = (5^{-1})(3) = (5)(3) = 3$، وعليه، فإن حلول المتطابقة $15x \equiv 27$ (مقياس 18) هي الأعداد الصحيحة المتوافرة في صفوف البواقي:

$$3+18\mathbb{Z} = \{\ldots,-33,-15,3,21,39,\ldots\},$$
$$9+18\mathbb{Z} = \{\ldots,-27,-9,9,27,45,\ldots\}.$$
$$15+18\mathbb{Z} = \{\ldots,-21,-3,15,33,51,\ldots\},$$

كما هو موضح في النتيجة 13.20، لاحظ أنّ $d = 3$ الحلول الثلاثة 3، 9، 15 تقع في $\mathbb{Z}_{18}$، والحلول كافة في صفوف البواقي الثلاثة مقياس 18 المكتوبة في الأعلى، يمكن جمعها في صف الباقي $3 + 6\mathbb{Z}$ مقياس 6؛ لأنها جاءت من الحل $x = 3$ للمعادلة $5x = 3$ في $\mathbb{Z}_6$. ▲

تمارين 20

حسابات

سنرى لاحقًا أنّ الزمرة الضربية للعناصر غير الصفرية لحقل منتهٍ هي زمرة دورية، وضّح هذا بإيجاد المولِّد لهذه الزمرة للحقل المنتهي المعطى

1. $\mathbb{Z}_7$ **.2** $\mathbb{Z}_{11}$ **.3** $\mathbb{Z}_{17}$

باستخدام مبرهنة فيرما، أوجد باقي قسمة 3^{47} على 23.

5. باستخدام مبرهنة فيرما، أوجد باقي قسمة 37^{49} على 7.

6. احسب باقي قسمة $2^{\left(2^{17}\right)}+1$ على 19. [مساعدة: ستحتاج إلى أن تحسب باقي قسمة 2^{17} مقياس 18].

7. اصنع جدولاً للقيم $\varphi(n)$ لـ $n \leq 30$.

8. احسب $\varphi\left(p^2\right)$، حيث p عدد أولي.

9. احسب $\varphi(pq)$، حيث p و q عددان أوليان.

10. استخدم تعميم أويلر لمبرهنة فيرما في إيجاد باقي قسمة 7^{1000} على 24.

في التمارين 11 إلى 18، صف الحلول جميعها للمتطابقة المعطاة كما فعلنا في المثالين 14.20، و15.20.

11. $2x \equiv 6$ (مقياس 4)

12. $22x \equiv 5$ (مقياس 15)

13. $36x \equiv 15$ (مقياس 24)

14. $45x \equiv 15$ (مقياس 24)

15. $39x \equiv 125$ (مقياس 9)

16. $41x \equiv 125$ (مقياس 9)

17. $155x \equiv 75$ (مقياس 65)

18. $39x \equiv 52$ (مقياس 130)

19. ليكن p عددًا أوليًا ≤ 3، استخدم تمرين 28 في إيجاد باقي قسمة $(p-2)!$ مقياس p.

20. استخدم تمرين 28 في إيجاد باقي قسمة $34!$ مقياس 37.

21. استخدم تمرين 28 في إيجاد باقي قسمة $49!$ مقياس 53.

22. استخدم تمرين 28 في إيجاد باقي قسمة $24!$ مقياس 29.

مفاهيم

23. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. $a^{p-1} \equiv 1$ (مقياس p) لكل الأعداد الصحيحة a والأولية p.

________ ب. $a^{p-1} \equiv 1$ (مقياس p) لكل الأعداد الصحيحة a، حيث $a \not\equiv 0$ (مقياس p) و p عدد أولي.

________ جـ. $\varphi(n) \leq n$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

________ د. $\varphi(n) \leq n - 1$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

________ هـ. عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}_n$ هي الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من n والأولية بالنسبة إلى n.

________ و. حاصل ضرب عنصري وحدة في $\mathbb{Z}_n$ يكون دائمًا عنصر وحدة.

________ ز. حاصل ضرب عددين كل منهما ليس عنصر وحدة في $\mathbb{Z}_n$، يمكن أن يكون عنصر وحدة.

________ ح. حاصل ضرب عنصر وحدة وآخر ليس عنصر وحدة من $\mathbb{Z}_n$ ليس عنصر وحدة أبدًا.

________ ط. كل تطابق $ax \equiv b$ (مقياس p)، حيث p عدد أولي لها حل.

________ ي. افترض أنّ d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الموجبين a و m. إذا كان d يقسم b، فإن التطابق $ax \equiv b$ (مقياس m)، له بالضبط d من الحلول غير المتطابقة.

24. اكتب جدول الضرب للزمرة الضربية لعناصر الوحدة في $\mathbb{Z}_{12}$. أيُّ زمرةٍ من الرتبة 4 تماثل هذه الزمرة؟

براهين مختصرة

25. أعطِ جملة واحدة موجزة لإثبات المبرهنة 1.20.

26. أعطِ جملة واحدة موجزة لإثبات المبرهنة 8.20.

براهين

27. بيّن أنّ 1 و $p - 1$ هما العنصران الوحيدان في الحقل $\mathbb{Z}_p$، اللّذان لكل منهما المعكوس الضربي نفسه. [مساعدة: حلّ المعادلة $x^2 - 1 = 0$].

28. باستخدام تمرين 27، أثبت مبرهنة ويلسون (*Wilsons Theorem*)، التي تنص على أنه إذا كان p عددًا أوليًا، فإن $(p-1)! \equiv -1$ (مقياس p). [النصف الآخر من المبرهنة ينص على أنه إذا كان n عددًا صحيحًا أكبر من 1 بحيث $(n-1)! \equiv -1$ (مقياس n) فإنّ n عدد أولي. فقط فكّر: ماذا سيكون باقي قسمة $(n-1)!$ مقياس n إذا كان n ليس عددًا أوليًا].

29 . استخدم مبرهنة فيرما في إثبات أنه لأيّ عدد صحيح موجب n، العدد الصحيح $n^{37} - n$ قابل للقسمة على 383838. [مساعدة: $383838 = (37)(19)(13)(7)(3)(2)$].

30 . بالعودة إلى تمرين 29، أوجد عددًا أكبر من 383838 يقسم $n^{37} - n$ لأيّ عدد صحيح موجب n.

حقل خوارج القسمة للحلقة التامة
The Field of Qutients of an Integral Domain

إذا توافرت حلقة تامة، بحيث كل عنصر غير صفري فيها له معكوس ضربي، فهي إذن حقل، مع ذلك، هناك الكثير من الحلقات التامة، مثل $\mathbb{Z}$ لا تشكل حقلًا، لكن هذه ليست مشكلة كبيرة؛ لأن الغرض من الفصل هو إثبات أنّ أيّ حلقة تامة يمكن جعلها محتواة في حقل محدد، يطلق عليه اسم **حقل خوارج القسمة لحلقة تامة (a field of quotients of the integral domain)**، هذا الحقل سيكون أصغر حقل يحتوي الحلقة التامة، كما سوف نبين، على سبيل المثال: الأعداد الصحيحة محتواة في الحقل $\mathbb{Q}$، الذي يمكن التعبير عن عناصره على أنها خوارج القسمة للأعداد الصحيحة، حيث إنّ بنيتنا لحقل خوارج القسمة لحلقة تامة تشابه تمامًا بنيتنا للأعداد النسبية من الأعداد الصحيحة، وهذه البنية موجودة في أيّ كتاب لمبادئ الرياضيات أو تفاضل وتكامل متقدم، ويعدّ إتمام هذا البناء أفضل تمرين في استخدام تعريفات ومفهوم التماثل، التي سنناقشها بشيء من التفصيل على الرغم من أنه ممل، غير أنه من الممكن أن نجعل الدراسة ممتعة بأن نتحرك في كل خطوة بالطريقة نفسها التي نتحرك بها لبناء $\mathbb{Q}$ من $\mathbb{Z}$.

البناء

خذ الحلقة التامة D، التي سنحاول أن نوسعها إلى حقل خوارج القسمة F. الخطوات المختصرة المباشرة التي سنقوم بها هي على النحو الآتي:

1. نعرف عناصر F كيف تكون.
2. نعرف العمليتين الثنائيتين؛ الجمع والضرب على F.
3. تحقق من شروط الحقل كافة؛ لإثبات أنّ F هو حقل بالنسبة إلى هاتين العمليتين الثنائيتين.
4. أثبت أنّ F يحتوي D بوصفها حلقة تامة جزئية منه.

الخطوات 1، 2، 4 ممتعة جدًا، ولكن الخطوة 3 هي عمل روتيني طويل، سنبدأ الآن بالبناء.

الخطوة (1): افترض أنّ D حلقة تامة معطاة، وشكّل حاصل الضرب الديكارتي

$$D \times D = \{(a, b) \mid a, b \in D\}$$

سننظر إلى الزوج المرتب (a, b) على أنه يمثل شكليًّا خارج القسمة (formal quotient a/b)، أي إنه إذا كان $D = \mathbb{Z}$، فإنّ الزوج المرتب $(2, 3)$ سيمثل لنا العدد $\frac{2}{3}$، أما الزوج المرتّب $(2, 0)$ فلا يمثل أيّ عنصر في $\mathbb{Q}$؛ ولذلك سنقترح أن نقلص $D \times D$ قليلًا، افترض أنّ S هي مجموعة جزئية من $D \times D$ معطاة بالعلاقة:

$$S = \{(a, b) \mid a, b \in D, b \neq 0\}.$$

ما زالت S ليست هي حقلنا المنشود؛ لأنه في الحقيقة عندما $D = \mathbb{Z}$، فإن **الأزواج المرتبة المختلفة (different)** من الأعداد الصحيحة، مثل $(2, 3)$ و$(4, 6)$ يمكن أن تمثل العدد النسبي نفسه (لاحقًا سوف نعرف متى يمثل عنصران مختلفان في S فعليًّا العنصر نفسه في F، أو كما سوف نرى، سنعرف متى يكون عنصران في S متكافئين).

1.21 تعريف العنصران (a, b) و (c, d) متكافئان في S (***equivalent***)، ويعبر عن ذلك بـ $(a, b) \sim (c, d)$، إذا وفقط إذا كان $ad = bc$. ■

لاحظ أنّ هذا التعريف معقول؛ لأنّ الخاصية $(a, b) \sim (c, d)$ هي المعادلة $ad = bc$، التي تحوي عناصر من D، وتشمل عملية الضرب المعلومة على D، لاحظ أيضًا في حالة $D = \mathbb{Z}$، أنّ هذه الخاصية تعطينا التعريف الطبيعي للمساواة بين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ فمثلاً $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$؛ لأن $(2)(6) = (3)(4)$، ويمكن أن ينظر إلى العدد النسبي الذي سوف نعبر عنه بـ $\frac{2}{3}$ على أنه يمثل خوارج القسمة كلها للأعداد الصحيحة، التي تختصر إلى أو تكافئ $\frac{2}{3}$.

2.21 تمهيدية العلاقة ~ بين عناصر من المجموعة S كما وصفت في الأعلى، هي علاقة تكافؤ.

البرهان يجب علينا أن نفحص الخصائص الثلاثة لعلاقة التكافؤ.

منعكسة (Reflexive) $(a, b) \sim (a, b)$ لأن $ab = ba$، لاحظ أنّ الضرب على D إبدالي.

متناظرة (Symmetric) إذا كان $(a, b) \sim (c, d)$، فإنّ $ad = bc$؛ ولأنّ الضرب على D إبدالي، نجد أنّ $cb = da$، وعليه، فإنّ $(c, d) \sim (a, b)$.

متعدية (Transitive) إذا كان $(a, b) \sim (c, d)$ و $(c, d) \sim (r, s)$، فإن $ad = bc$ و $cs = dr$. باستخدام هذه العلاقات وحقيقة أنّ الضرب على D إبدالي نجد أنّ:

$$asd = sad = sbc = bcs = bdr = brd$$

والآن لأنّ $d \neq 0$ و D حلقة تامة، فيمكننا استخدام قانون الحذف، وهذه هي الخطوة الأهم، وعليه، فإن العلاقة $asd = brd$ ستؤول إلى العلاقة $as = br$؛ لذلك، فإن $(a, b) \sim (r, s)$. ♦

باستعراض المبرهنة 22.0 نعلم الآن أنّ ~ تجزّئ المجموعة S إلى صفوف تكافؤ، ولتجنب وضع خطوط عرضية طويلة فوق تعبيرات ممتدة، سوف نستخدم $[(a, b)]$ بدلاً من $\overline{(a, b)}$ للتعبير عن صف التكافؤ لـ (a, b) في S تحت العلاقة ~، وسننهي الخطوة 1 الآن بتعريف المجموعة F على أنها المجموعة التي تحوي صفوف التكافؤ كلها $[(a, b)]$ لـ $(a, b) \in S$

الخطوة (2): التمهيدية المقبلة ستخدمنا بتعريف الجمع والضرب على F، لاحظ أنه إذا كان $D = \mathbb{Z}$ و $[(a, b)]$ هو $(a/b) \in \mathbb{Q}$، فإن التعريف المقبل يقدم لنا عمليات الجمع والضرب العادية على $\mathbb{Q}$.

3.21 تمهيدية إذا كان $[(a, b)]$ و $[(c, d)]$ في F، فإنّ المعادلات:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$$

و

$$[(a, b)][(c, d)] = [(ac, bd)]$$

تعطي عمليات حسنة التعريف للجمع والضرب على F.

البرهان لاحظ أولاً أنه إذا كان $[(a, b)]$ و $[(c, d)]$ في F، فإن (a, b) و (c, d) في S، ما يعني $b \neq 0$ و $d \neq 0$؛ لأنّ D حلقة تامة، فإن $bd \neq 0$، ما يعني أنّ كلاً من $(ad + bc , bd)$ و (ac, bd) في S. (لاحظ أنّ أهم حقيقة استخدمناها هي: أنّ D ليس فيها قواسم للصفر)، وهذا يعني أنّ الجانب الأيمن – على الأقل – في كلتا المعادلتين يقع في F.

بقي علينا أن نبيّن أنّ الجمع والضرب المعرف على F حسن التعريف، وهذا يعني أنه يجب علينا أن نبين أنه إذا تمّ اختيار ممثلين آخرين من S، فإن النتيجة نفسها ستظهر في F. لإنهاء هذا الأمر، افترض أن $(a_1, b_1) \in [(a, b)]$ و $(c_1, d_1) \in [(c, d)]$، علينا أن نثبت أن

$$(a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1) \in [(ad + bc, bd)]$$

و

$$(a_1c_1, b_1d_1) \in [(ac, bd)]$$

الآن، $(a_1, b_1) \in [(a, b)]$، ما يعني أنّ $(a_1, b_1) \sim (a, b)$، وهذا يؤدي إلى

$$.a_1b = b_1a$$

بالأسلوب نفسه $(c_1, d_1) \in [(c, d)]$ يؤدي إلى

$$.c_1d = d_1c$$

للحصول على «مقام مشترك» للأزواج المرتبة الأربعة $(a, b), (a_1, b_1), (c, d), (c_1, d_1)$، ونضرب المعادلة الأولى بـ d_1d والمعادلة الثانية بـ b_1b، ثم بإضافة المعادلتين الناتجتين إلى بعضهما نحصل على المعادلة الآتية في D:

$$a_1bd_1d + c_1db_1b = b_1ad_1d + d_1cb_1b$$

ثم باستخدام المسلمات المختلفة على الحلقة التامة نرى أنه:

$$(a_1d_1 + b_1c_1)bd = b_1d_1(ad + bc),$$

لذلك، فإنّ:

$$(a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1) \sim (ad + bc, bd),$$

ما يؤدي إلى أنّ $(a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1) \in [(ad + bc, bd)]$، وبهذا ننتهي من الجمع على F، أمّا بالنسبة إلى الضرب على F، فبضرب المعادلتين $a_1b = b_1a$ و $c_1d = d_1c$ ببعضهما نحصل على:

$$a_1bc_1d = b_1ad_1c$$

وهذا يؤدي إلى:

$$(a_1c_1, b_1d_1) \sim (ac, bd)$$

أي إنّ $(a_1c_1, b_1d_1) \in [(ac, bd)]$، وهكذا يكتمل الإثبات. ♦

من المهم أن نفهم معنى التمهيدية السابقة وأهمية إثباتها، وعندها تكتمل الخطوة (2).

الخطوة (3): تعدّ الخطوة 3 خطوة روتينية، ولكن من الجيد لنا أن نقوم بهذه الخطوة بشيء من التفصيل، إذ لا نستطيع أن نقوم بها إلا إذا كنا قد فهمنا ما قمنا به سابقًا؛ ولذلك، فإنّ قيامنا بهذه الخطوة سيعزز فهمنا لهذا البناء، سنضع قائمة بالأشياء التي يجب أن نثبتها، حيث سنثبت بعضها، ونترك البقية للتمارين.

البرهان

1. الجمع في F إبدالي.

باستخدام تعريف الجمع $[(a, b)] + [(c, d)]$ هو $[(ad + bc, bd)]$، أيضًا باستخدام تعريف الجمع $[(c, d)] + [(a, b)]$ هو $[(cb + da, db)]$. نحتاج إلى أن نبيّن أنّ $(ad + bc, bd) \sim (cb + da, db)$، ولكنه صحيح، لأنه باستخدام المسلمات على D، فإنّ $ad + bc = cb + da$ و $bd = db$. ♦

2. الجمع عملية تجميعية.

3. $[(0, 1)]$ هو العنصر المحايد لعملية الجمع على F.

4. $[(-a, b)]$ هو المعكوس الجمعي لـ $[(a, b)]$ في F.

5. الضرب على F عملية تجميعية.

6. الضرب على F إبدالي.

7. قانونا التوزيع متحققان في F.

8. $[(1, 1)]$ هو العنصر المحايد لعملية الضرب على F.

9. إذا كان $[(a, b)] \in F$ ليس العنصر المحايد في عملية الجمع، فإن $a \neq 0$ في D و $[(b, a)]$ هو المعكوس الضربي لـ $[(a, b)]$.

البرهان لتكن $[(a, b)] \in F$. إذا كان $a = 0$، فإنّ:

$$a1 = b0 = 0$$

لذلك،

$$(a, b) \sim (0, 1)$$

وهذا يعني أنّ $[(a, b)] = [(0, 1)]$، ولكن باستخدام الفقرة الثالثة، فإن $[(0, 1)]$ هو العنصر المحايد لعملية الجمع، ما يعني أنه إذا كان $[(a, b)]$ ليس العنصر المحايد لعملية الجمع في F، فإنّ $a \neq 0$، وبهذا، فإنه من المعقول الحديث عن $[(b, a)]$ في F.

والآن، $[(a, b)][(b, a)] = [(ab, ba)]$، ولكن $ab = ba$ في D، وهذا يعني $(ab)\,1 = (ba)\,1$، و

$$(ab, ba) \sim (1, 1)$$

لذلك،

$$[(a, b)][(b, a)] = [(1, 1)]$$

و $[(1, 1)]$ هو العنصر المحايد لعملية الضرب كما في الفقرة الثامنة. ♦

وهذا ينهي الخطوة 3

الخطوة (4): بقي علينا أن نبيّن أنّ F تحوي D، ولكي نبين هذا الأمر، علينا أن نوضح أنه يوجد تماثل i بين D وحلقة تامة جزئية من F، فإذا أعدنا تسمية صورة D بالنسبة إلى i باستخدام أسماء العناصر في D، فنكون قد انتهينا، التمهيدية المقبلة ستقدم لنا هذا التماثل، حيث سنستخدم الحرف i في هذا التماثل إشارة إلى دالة الواحد لواحد (انظر إلى الهامش صفحة 4)؛ سنحقن D داخل F.

4.21 تمهيدية الدالة $i: D \to F$ المعطاة بالعلاقة $i(a) = [(a, 1)]$، تماثل بين D وحلقة جزئية من F.

البرهان لـ a و b في D فإن:

$$i(a+b) = [(a+b, 1)].$$

كذلك:

$$i(a) + i(b) = [(a, 1)] + [(b, 1)] = [(a1 + 1b, 1)] = [(a+b, 1)].$$

لذلك، فإن: $i(a+b) = i(a) + i(b)$. إضافة إلى ذلك،

$$i(ab) = [(ab, 1)],$$

بينما

$$i(a)i(b) = [(a, 1)][(b, 1)] = [(ab, 1)],$$

لذلك، $i(ab) = i(a)i(b)$.

بقي علينا أن نثبت فقط أن i هو واحد لواحد، فإذا كان $i(a) = i(b)$، فإن

$$[(a, 1)] = [(b, 1)],$$

لذلك، $(a, 1) \sim (b, 1)$ يعني أنّ $a1 = 1b$؛ ما يعني أنّ

$$a = b$$

أي إنّ i تماثل من D إلى $i[D]$، وبالطبع، $i[D]$ حلقة تامة جزئية من F. ♦

لأن $[(a, b)] = [(a, 1)][(1, b)] = [(a, 1)]/[(b, 1)] = i(a)/i(b)$ متحقق بصورة واضحة في F، فإننا نكون قد أثبتنا المبرهنة المقبلة.

5.21 مبرهنة أي حلقة تامة D يمكن توسيعها إلى (أو طمرها في) حقل F، بحيث كل عنصر في F يمكن التعبير عنه بوصفه خارج قسمة عنصرين في D. (هذا الحقل F يسمى **حقل خارج القسمة على D**).

الوحدانية (Uniqueness)

قلنا في البداية إنّ F يمكن أن يعدّ إلى حد ما أصغر حقل يحتوي D، وهذا الأمر محسوس؛ لأن كل حقل يحوي D، فلا بدّ أن يحوي العناصر a/b لكل $a, b \in D$، حيث $b \neq 0$، تثبت لنا المبرهنة المقبلة أنّ كل حقل يحوي D يحوي حقل جزئيًا، بوصفه حقلًا خارج القسمة على D، وتثبت أيضًا، أنّ أيّ حقلي خارج قسمة على D متماثلان.

6.21 مبرهنة ليكن F حقلًا خارج قسمة على D، وليكن L أيّ حقل يحوي D، فتوجد دالة $\psi : F \to L$ تعطي تماثلًا لـ F مع حقل جزئي من L، حيث $\psi(a) = a$ لكل $a \in D$.

البرهان الحقل الجزئي والرسم التخطيطي في شكل7.21 قد يساعدك على تصور الوضع لهذه المبرهنة.

صورة أيّ عنصر في F هي: $a\!\diagup_F b$، حيث $\diagup_F$ تعني خارج قسمة $a \in D$ على $b \in D$، على أن تعدّ أنها عناصر في F، ونريد بالطبع أن نربط $a\!\diagup_F b$ بصورة غامرة مع $a\!\diagup_L b$، حيث إنّ $\diagup_L$ يعني خارج قسمة عناصر من L، إذ سيكون العمل الرئيس إثبات أنّ مثل هذه الدالة حسنة التعريف.

علينا أن نعرف $\psi\colon F \longrightarrow L$، وسنبدأ بتعريف

$$\psi(a) \longrightarrow a \text{ لـ } a \in D$$

كل عنصر $x \in F$ هو خارج قسمة $a\!\diagup_F b$ للعنصرين a و b، $b \neq 0$، من D، لنحاول أن نعرف ψ بـ $\psi(a /_F b) = \psi(a) /_L \psi(b)$:

يجب أن نبيّن أنّ هذه الدالة ψ منطقية وحسنة التعريف؛ ولأن ψ محايد على D، لـ $b \neq 0$، فإن $\psi(b) \neq 0$؛ لذلك، فإنّ: تعريفنا لـ $\psi(a /_F b)$ بـ $\psi(a) /_L \psi(b)$ منطقي. إذا كان $a /_F b = c /_F d$ في F، فإن $ad = bc$ في D؛ لذلك، $\psi(ad) = \psi(bc)$، لكن لأن ψ محايد على D،

$$\psi(ad) = \psi(a)\psi(d) \quad \text{و} \quad \psi(bc) = \psi(b)\psi(c)$$

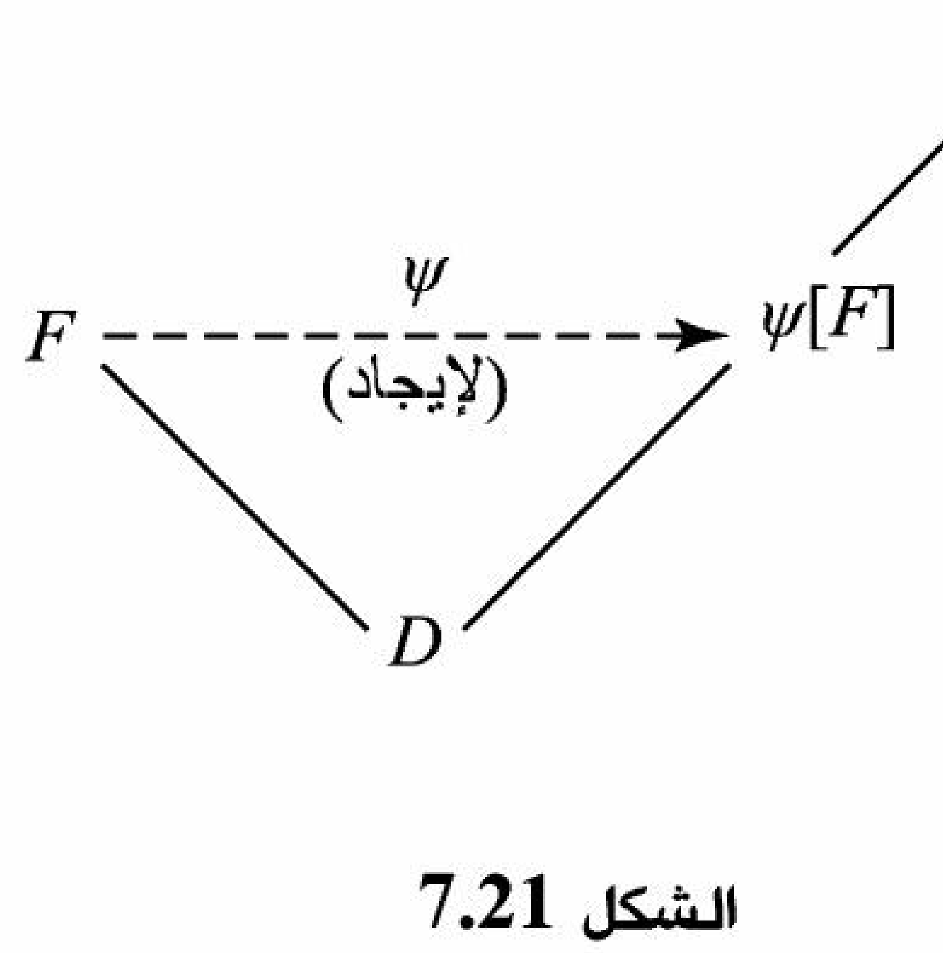
لذلك،

$$\psi(a) /_L \psi(b) = \psi(c) /_L \psi(d)$$

في L، ما يعني أنّ ψ حسن التعريف.

المعادلتان

$$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$$



الشكل 7.21

و

$$\psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y)$$

متحققتان بسهولة من خلال تعريف ψ على F، ومن خلال حقيقة أنّ ψ محايدة على D.

إذا كان $\psi(a\ /_F\ b)=\psi(c\ /_F\ d)$، فإن:

$$\psi(a)\ /_L\ \psi(b)=\psi(c)\ /_L\ \psi(d)$$

لذلك،

$$\psi(a)\psi(d)=\psi(b)\psi(c)$$

لأن ψ محايدة على D، نستنتج أنّ $ad=bc$، لذلك $a\ /_F\ b=c\ /_F\ d$ وهذا يعني أن ψ واحد لواحد.

من التعريف، $\psi(a)=a$ لكل $a\in D$. ♦

8.21 نتيجة كل حقل L يحوي الحلقة التامة D، فإنه يحوي حقل خارج القسمة على D.

البرهان في إثبات المبرهنة 6.21 كل عنصر في الحقل الجزئي $\psi[F]$ من L، هو خارج القسمة في L لعناصر D. ♦

9.21 نتيجة أيّ حقلي خارج قسمة للحلقة التامة D متماثلان.

البرهان افترض –كما في المبرهنة 6.21– أنّ L هو حقل خارج القسمة لـ D؛ لذلك، فإن كل عنصر x في L يمكن أن يُعبَّر عنه على صورة $a\diagup_L\ b$، حيث $a,b\in D$، فإن L هو الحقل $\psi[F]$ كما في برهان المبرهنة 6.21، وهو بهذا يماثل F. ♦

■ تمارين 21

حسابات

1. صف حقل خارج القسمة F للحلقة التامة الجزئية:

$$D=\{n+mi \mid n,m\in\mathbb{Z}\}$$

من $\mathbb{C}$. "صف" تعني اكتب عناصر $\mathbb{C}$ التي تصنع حقل خارج القسمة D في $\mathbb{C}$. (عناصر D تسمى الأعداد الصحيحة لجاوس).

2. صف (كما في التمرين 1) حقل خارج القسمة F للحلقة الجزئية التامة:

$D=\{n+m\sqrt{2} \mid n,m\in\mathbb{Z}\}$ في $\mathbb{R}$.

مفاهيم

3. صحّح تعريف المصطلح المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إذا احتاج إلى تصحيح– بحيث يكون قابلًا للنشر.

حقل خارج القسمة للحلقة التامة D هو الحقل F، الذي يمكن إدخال D فيه، بحيث كل عنصر غير صفري من D هو عنصر وحدة في F.

4. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. $\mathbb{Q}$ حقل خارج القسمة لـ $\mathbb{Z}$.

________ ب. $\mathbb{R}$ حقل خارج القسمة لـ $\mathbb{Z}$.

________ جـ. $\mathbb{R}$ حقل خارج القسمة لـ $\mathbb{R}$.

________ د. $\mathbb{C}$ حقل خارج القسمة لـ $\mathbb{R}$.

________ هـ. إذا كان D حقلاً، فإن أيّ حقل خارج قسمة على D يماثل D.

________ و. حقيقة أنّ D لا يوجد فيه قواسم للصفر استخدمت بقوة مرات عدة في بناء حقل خارج القسمة F للحلقة التامة D.

________ ز. كل عنصر في الحلقة التامة D، هو عنصر وحدة في حقل خارج القسمة F على D.

________ ح. كل عنصر غير صفري في الحلقة التامة D، هو عنصر وحدة في حقل خارج القسمة F على D.

________ ط. حقل خارج القسمة F' للحلقة التامة الجزئية D' من الحلقة التامة D يمكن أن يعدّ حقلًا جزئيًّا لحقل خارج القسمة على D.

ـــــــــــ ي. كل حقل خارج قسمة على $\mathbb{Z}$ يماثل $\mathbb{Q}$.

5. وضِّح بمثال أنّ حقل خارج القسمة F' على حلقة تامة جزئية فعليًّا D' من حلقة تامة D. يمكن أن يكون أيضًا حقل خارج القسمة على D.

براهين

6. أثبت الفرع الثاني للخطوة 3. يمكنك استخدام أيّ فرع سابق في الخطوة 3.

7. أثبت الفرع الثالث للخطوة 3. يمكنك استخدام أيّ فرع سابق في الخطوة 3.

8. أثبت الفرع الرابع للخطوة 3. يمكنك استخدام أيّ فرع سابق في الخطوة 3.

9. أثبت الفرع الخامس للخطوة 3. يمكنك استخدام أيّ فرع سابق في الخطوة 3.

10. أثبت الفرع السادس للخطوة 3. يمكنك استخدام أيّ فرع سابق في الخطوة 3.

11. أثبت الفرع السابع للخطوة 3. يمكنك استخدام أيّ فرع سابق في الخطوة 3

12. لتكن R حلقة إبدالية غير صفرية، ولتكن T مجموعة جزئية غير خالية من R مغلقة بالنسبة إلى الضرب، ولا تحوي الصفر ولا قواسم له. ابدأ بـ $R \times T$، وإلا اتبع بالضبط طريقة البناء في هذا الفصل، يمكننا أن نبين أنّ الحلقة R يمكن توسيعها إلى حلقة جزئية لخوارج القسمة (*Partial ring of quotients*) $Q\,(R,\ T)$، فكر في هذا مدة 15 دقيقة، أو راجع البناء؛ لترى أنّ الأمور ما زالت تعمل. بوجه خاص، وضح ما يأتي:

أ. $Q\,(R,\ T)$ يملك العنصر المحايد حتى لو أنّ R لا تملك.

ب. في $Q(R,\ T)$، كل عنصر غير صفري في T عنصر وحدة.

13. أثبت باستخدام تمرين **12** أنّ كلّ حلقة إبدالية غير صفرية تحوي عنصر a ليس من قواسم الصفر، يمكن توسيعها إلى حلقة إبدالية تحوي العنصر المحايد. قارنه بتمرين **30** في الفصل 19.

14. بالرجوع إلى تمرين **12**، ما عدد عناصر الحلقة $Q(\mathbb{Z}_4, \{1, 3\})$؟

15. بالرجوع إلى تمرين **12**، صف الحلقة $Q(\mathbb{Z}, \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\})$، عن طريق وصف حلقة جزئية من $\mathbb{R}$ تماثلها.

16. بالرجوع إلى تمرين،**12** صف الحلقة $Q(3\mathbb{Z}, \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\})$، عن طريق وصف حلقة جزئية من $\mathbb{R}$ تماثلها.

17. بالرجوع إلى تمرين **12**، افترض أننا أسقطنا شرط أنّ T لا توجد فيها قواسم للصفر، وأبقينا فقط على أن T ليست خالية، ولا تحوي 0، ومغلقة بالنسبة إلى الضرب، إذ إن محاولة توسيع R إلى حلقة إبدالية تحوي العنصر المحايد، بحيث كل عنصر غير صفري في T هو عنصروحدة، يجب أن تفشل إذا حوت T عنصرًا من قواسم الصفر؛ لأن قاسمًا للصفر لا يمكن أن يكون عنصر وحدة، حاول أن تكتشف أنه إذا بدأت بـ $R \times T$، فأين أول مشكلة ستقع لهذا البناء الموازي للبناء الذي في هذا الكتاب؟ بوجه خاص، لـ $R = \mathbb{Z}_6$ و$T = \{1,\ 2,\ 4\}$، وضّح أول صعوبة تظهر. [مساعدة: إنها في الخطوة 1].

حلقات كثيرات الحدود Rings of Polynomials

كثيرات الحدود في غير معين

الكل يملك فكرة عملية عما تعنيه كثيرة حدود في x، حيث المعاملات من الحلقة R، ونستطيع أن نخمِّن كيف نجمع ونضرب كثيرات حدود، إضافة إلى أننا نعلم ما تعنيه درجة كثيرة حدود، ونتوقع أنّ المجموعة من كثيرات الحدود، حيث المعاملات من الحلقة R نفسها هي حلقة تحت عمليات الجمع والضرب الاعتيادية على كثيرات الحدود، و R حلقة جزئية من $R[x]$، وعلى الرغم من ذلك، سنتعامل مع كثيرات الحدود بطريقة مختلفة عن الأسلوب المتبع في الجبر في مرحلة الدراسة الثانوية أو في التفاضل والتكامل، إذ إنّ هناك أشياء قليلة نريد أن نقولها.

في المقام الأول، سنسمي x **غير معين** (***indeterminate***) بدلاً من متغير، افترض– على سبيل المثال– أنّ حلقة المعاملات $\mathbb{Z}$، وإحدى كثيرات الحدود في الحلقة $\mathbb{Z}[x]$ هي $1x$، التي سنكتبها ببساطة x، والآن، فإنّ x ليست 1 أو 2 أو أيّ عنصر آخر من $\mathbb{Z}[x]$؛ لذلك، من الآن فصاعدًا لن نكتب أشياء مثل "$x= 1$" أو "$x= 2$" كما كنا نفعل في مقررات دراسية أخرى، وسنسمي x غير معين بدلاً من متغير، كي نؤكد على هذا التغيير، كذلك لن نكتب تعبيرًا مثل "$x^2 -4= 0$"؛ لأنه ببساطة: x^2- 4 ليس كثيرة الحدود الصفرية في حلقتنا $\mathbb{Z}[x]$، فنحن معتادون في الحديث عن "حلّ معادلة كثيرة حدود"، وسنمضي الكثير من الوقت فيما تبقى من كتابنا للحديث عن هذا الأمر، إلّا أننا سنشير إليه بـ "إيجاد صفر كثيرة الحدود".

نحاول باختصار أن نكون حريصين في مناقشتنا للتركيبات الجبرية، على ألا نقول في سياق ما: إن هناك أشياء متساوية، وفي سياق آخر: إنها غير متساوية.

■ **نبذة تاريخية**

كان استخدام x وحروف أخرى من نهاية الأحرف الهجائية لتمثل غير المعين من خلال رينيه ديكارت **(Rene'Descartes 1596- 1650)**، وقبل ذلك استخدم فرانشيوس فايت **(Francios Viete 1540- 1603)** أحرف العلّة لغير المعينات والأحرف الساكنة للكميات المعلومة، فقد كان ديكارت مسؤولاً عن أول ظهور لمبرهنة العامل (نتيجة 3.23) في بحثه "الهندسة" **(The Geometry)**، الذي نشر بوصفه ملحقًا في كتابه **(Discourse on Method) (1637)**، وقد حوى هذا العمل أيضًا أول ظهور لمفاهيم الهندسة التحليلية؛ حيث أوضح ديكارت كيف يمكن وصف المنحنيات الهندسية جبريًا.

ولد ديكارت لعائلة غنية في لاهاي في فرنسا؛ ولأن صحّته كانت دائمًا غير مستقرة، أصبحت عنده عادة أن يمضي نهاره في السرير، في هذه الأوقات أنهى معظم عمله الخصب .**(Discourse on Method)** وهي محاولة منه لإظهار الإجراءات المميزة لـ "البحث عن الحقيقة في العلوم"، كانت الخطوة الأولى في هذا العمل، رفض كل شيء فيه قليل من الشك وعدّه خطأً مطلقًا، ولكن لأنه من الضروري أنّ من يفكِّر هو "شيء"، فقد وضع المبدأ الأول في الفلسفة: "أنا أفكر إذن أنا موجود"، وأهم الأجزاء التي تمّ تسليط الضوء عليها في كتابه **(Discourse on Method)** كانت ثلاثة ملاحق، هي : البصريات، والهندسة، وعلم الأحوال الجوية، وفي الواقع قدّم ديكارت في هذه الملاحق أمثلة على كيفية تطبيقه لطريقته.

ومن أهم الأفكار التي اكتشفها ديكارت في عمله ونشرها: قانون الجيب لانعكاس الضوء، وأسس مبرهنة المعادلات، والتفسير الهندسي لقوس المطر.

دُعيَ ديكارت إلى ستوكهولم عام 1649م من قبل كرستينا ملكة السويد؛ لتعليمها، ولسوء الطالع، طلبت منه الملكة أن يصحو في ساعات الصباح الباكر، وذلك عكس عادته القديمة المتأصلة معه، ثمّ أصيب بعدها بوقت قصير بمرض ذات الرئة، وتوفي عام 1650م.

إذا كان هناك شخص لا يعلم شيئًا عن كثيرات الحدود، فليس بالأمر السهل وصف طبيعة كثيرة حدود في x بدقة، حيث المعاملات من الحلقة R، فإذا عرّفنا كثيرة حدود بالمجموع الشكلي المنتهي (*Finite Formal Sum*)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

حيث $a_i \in R$، فإننا نضع أنفسنا في مشكلة بسيطة، بالتأكيد $0+a_1x$ و $0+ a_1x + 0\, x^2$ مختلفان بالمجموع الشكلي، ولكننا سنعدّهما كثيرة الحدود نفسها. الحل العملي لهذه المشكلة يكمن في تعريف كثيرة الحدود بالمجموع الشكلي اللانهائي (*infinite formal Sum*)

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

حيث كل $a_i = 0$ عدا عدد منتهٍ من قيم i، لا مشكلة الآن بوجود أكثر من مجموع شكلي يمثل كثيرة حدود واحدة.

1.22 تعريف لتكن R حلقة، تُعرّف كثيرة الحدود **(polynomial)** *f(x)* حيث المعاملات من R على أنها المجموع الشكلي اللانهائي

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

حيث $a_i \in R$، وكل $a_i = 0$ عدا عدد منتهٍ من قيم i. a_i هي **معاملات (coefficients)** *f(x)*، فإذا كان لبعض $i \geq 0$ صحيح أنه $a_i \neq 0$، فإنّ أكبر قيمة i لها هذه الخاصية تسمى **درجة (degree)** *f(x)*، وإذا كان كل $a_i = 0$، فإن درجة *f(x)* غير معرفة[1]. ■

ولتبسيط العمل مع كثيرات الحدود، نفترض أنه إذا كانت $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ فيها $a_i=0$ لـ $i>n$، فيمكننا أن نرمز لـ $f(x)$ بـ $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$، كذلك إذا وجد في R عنصر محايد $1 \neq 0$، فسنكتب الحدّ $1x^K$ في أيّ مجموع على الشكل x^K، على سبيل المثال: في $\mathbb{Z}[x]$ سنكتب كثيرة الحدود $2+\ 1x$ بـ $2+x$. أخيرًا، سنوافق على أنه يمكننا حذف $0x^i$ أو a_0 إذا كان $a_0 = 0$ من المجموع الشكلي، ولكن ليس كل $a_i= 0$؛ لذلك، 0، 2، x و x^2+2 هي كثيرات حدود معاملاتها من $\mathbb{Z}$. أي عنصر في R هو كثيرة حدود ثابتة.

الجمع والضرب على كثيرات الحدود التي معاملاتها من الحلقة R معرفة بطريقة مألوفة لدينا، إذا كان:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

و

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

فإن جمع كثيرات الحدود هو:

---

[1] تعرف درجة كثيرة الحدود الصفرية في بعض الأحيان بـ -1، وهو أول عدد صحيح أقل من 0، أو تعرف بـ $-\infty$ لذلك، فإن درجة $g(x)$ و $f(x)$ ستكون مجموع رتب $g(x)$ و $f(x)$ إذا كان أحدهما صفرًا.

$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots$، حيث $c_n=a_n+b_n$،

وضرب كثيرات الحدود هو:

$f(x)g(x)=d_0+d_1x+\ldots+d_nx^n+\ldots$، حيث $d_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$.

لاحظ أنَّ c_i و d_i كلاهما صفر، إلا لعدد منتهٍ من قيم i؛ لذلك، فإن كلا التعريفين لهما معنى، ولاحظ أن $\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$ ممكن ألا يساوي $\sum_{i=0}^{n}b_ia_{n-i}$ ، إذا كانت R غير إبدالية،

وباستخدام تعريفي الجمع والضرب سيكون عندنا المبرهنة الآتية:

2.22 مبرهنة المجموعة $R[x]$ من كثيرات الحدود في غير المعين x، والمعاملات من الحلقة R هي حلقة تحت جمع وضرب كثيرات الحدود، إذا كانت R إبدالية، فإن $R[x]$ كذلك، وإذا كانت R تحوي العنصر المحايد $0 \neq 1$، فإن 1 هو العنصر المحايد في $R[x]$.

البرهان من الواضح أنّ $\langle R[x], +\rangle$ زمرة إبدالية، وكذلك فإن قانون التجميع على عملية الضرب وقانوني التوزيع مباشران، ولكن الحسابات مرهقة بعض الشيء، حيث سنوضح بتقديم برهان قانون التجميع.

بتطبيق مسلمات الحلقة على $a_i, b_j, c_k \in R$ نحصل على:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\right)\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\right) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\right)\\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{s}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)c_{s-n}\right]x^s\\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j+k=s}a_ib_jc_k\right)x^s\\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{s}a_{s-m}\left(\sum_{j=0}^{m}b_jc_{m-j}\right)\right]x^s\\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m}b_jc_{m-j}\right)x^m\right]\\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\right)\right]
\end{aligned}$$

التعبير الرابع له علامتا جمع، ويجب أن يرمز لقيمة حاصل الضرب الثلاثي $f(x)g(x)h(x)$ لكثيرات الحدود هذه مع الضرب التجميعي. (بالأسلوب نفسه نرمز لـ $f(g(h(x)))$ بقيمة التركيب التجميعي (x) $(f \circ g \circ h)$ للدوال الثلاث f، g وh).

يمكن إثبات قانوني التوزيع بصورة مشابهة (انظر تمرين 26).

أوضحت الملاحظات التي سبقت نص المبرهنة أنّ $R[x]$ حلقة إبدالية إذا كانت R إبدالية، والعنصر المحايد $1 \neq 0$ في R هو العنصر المحايد لـ $R[x]$، من خلال تعريف الضرب على $R[x]$. ♦

لذلك، فإن $\mathbb{Z}[x]$ هي حلقة كثيرات الحدود لغير المعين x، حيث المعاملات صحيحة، $\mathbb{Q}[x]$ هي حلقة كثيرات الحدود في x، حيث المعاملات نسبية، وهكذا.

3.22 مثال في $\mathbb{Z}_2[x]$ لدينا:

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + (1+1)x + 1 = x^2 + 1$$

ما زلنا نعمل في $\mathbb{Z}_2[x]$، نجد أن:

$$(x+1) + (x+1) = (1+1)x + (1+1) = 0x + 0 = 0. \quad \blacktriangle$$

إذا كانت R حلقة وx وy غير معينين، فإنه يمكن تشكيل الحلقة $(R[x])[y]$، وهي حلقة كثيرات الحدود في y والمعاملات كثيرات الحدود في x، وكل كثيرة حدود في y حيث معاملاتها كثيرات حدود في x، يمكن إعادة كتابتها بطريقة طبيعية لتكون كثيرة حدود في x، حيث معاملاتها كثيرات حدود في y كما يوضح تمرين 20، هذا يؤدي إلى أنّ $(R[x])[y]$ تماثل طبيعي $(R[y])[x]$ على الرغم من أنّ الإثبات الدقيق ممل.

سوف نعرف هاتين الحلقتين باستخدام التماثل الطبيعي بينهما، وسوف نعبر عن الحلقة $R[x, y]$ بحلقة كثيرات الحدود بغير المعنيين x وy والمعاملات من R.

الحلقة $R[x_1, \cdots, x_n]$ لكثيرات الحدود في n من غير المعينات x_i والمعاملات من R تعرف بصورة مشابهة.

سنترك لتمرين 24 إثبات أنه إذا كانت D حلقة تامة، فإن $D[x]$ حلقة تامة، وبوجه خاص، إذا كان F حقلاً، فإن $F[x]$ حلقة تامة، لاحظ أنّ $F[x]$ ليس حقلاً؛ لأن x ليس عنصر وحدة في $F[x]$، أي إنه لا توجد كثيرة حدود $f(x) \in F[x]$، حيث $xf(x) = 1$، وباستخدام المبرهنة 21.5 يمكن تركيب حقل خارج القسمة $F(x)$ لـ $F[x]$ فأي عنصر في $F[x]$ يمكن أن يُعبّر عنه بخارج القسمة $f(x)/g(x)$ لكثيرتي حدود في $F[x]$، حيث $g(x) \neq 0$، وبصورة مشابهة نعرف $F(x_1, \ldots, x_n)$ ليكون حقل خارج القسمة لـ $F[x_1, \ldots, x_n]$، هذا الحقل

$F(x_1, \ldots, x_n)$ هو حقل الدوال النسبية في n من غير المعينات على F. ولهذه الحقول وظيفة مهمة في الهندسة الجبرية.

تشاكلات التعويض

نحن الآن مستعدون لمواصلة توضيح كيفية استخدام التشاكلات في دراسة ما نشير إليها دائمًا باسم (معادلة كثيرة حدود)، لتكن E وF حقولاً، حيث F حقل جزئي من E، أي إن $F \leq E$، وتؤكد المبرهنة المقبلة توافر تشاكلات مهمة من $F[x]$ إلى E، التي ستكون أدوات أساسية لأكثر ما تبقى من هذا العمل.

4.22 مبرهنة **(التشاكلات التعويضية لمبرهنة الحقول)**: ليكن F حقلًا جزئيًا من E، وليكن α عنصرًا في E، وx غير معين. الدالة $\phi_\alpha : F[x] \to E$ معرفة بـ

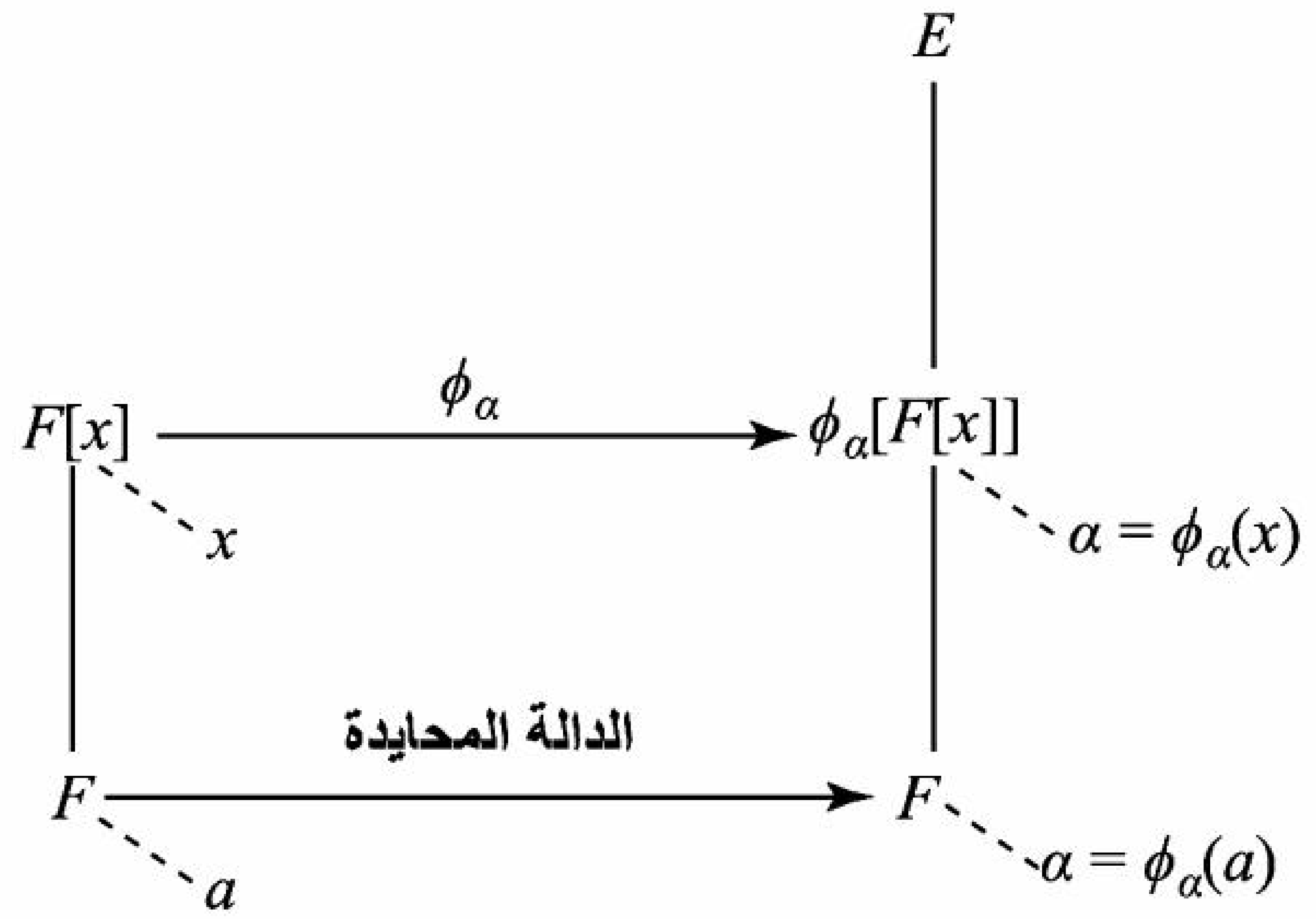
$$\phi_\alpha\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right) = a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_n \alpha^n$$

حيث $(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \in F[x]$ هي تشاكل من $F[x]$ إلى E. كذلك $\phi_\alpha(a) = a$

و ϕ_α ينقل F تماثليًا بالدالة المحايدة، أي إنّ $\phi_\alpha(a) = a$ لكل $a \in F$. التشاكل ϕ_α هو تعويض لـ α.

البرهان الحقل الجزئي والمخطط الدالي في شكل5.22 قد يساعدنا على استيضاح هذا الوضع.

الخطوط المتقطعة التي تشير إلى عنصر في المجموعة المبرهنة هي استنتاج مباشر



الشكل 5.22

لتعريفاتنا للجمع والضرب على $F[x]$، والدالة ϕ_α حسنة التعريف، أي إنها لا تعتمد على تمثيلنا لـ $f(x) \in F[x]$ بالمجموع المنتهي

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

لأن المجموع المنتهي الذي يمثل $f(x)$ يمكن تغييره فقط بإضافة الحدود $0x^i$ أو إلغائها، التي تؤثر في قيمة $\phi_\alpha(f(x))$.

إذا: $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ ،

و $h(x) = f(x) + g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r$،

فإن:

$$\phi_\alpha(f(x)+g(x)) = \phi_\alpha(h(x)) = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_r\alpha^r$$

بينما:

$$\phi_\alpha(f(x)) + \phi_\alpha(g(x)) = \left(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n\right) + \left(b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_m\alpha^m\right).$$

باستخدام تعريف الجمع على كثيرات الحدود فإن $c_i = a_i + b_i$، نرى أنَّ:

$$\phi_\alpha\,(f(x)+g(x)) = \phi_\alpha\,(f(x)) + \phi_\alpha\,(g(x))$$

وبالرجوع إلى الضرب نرى أنه إذا

$$f(x)g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_sx^s,$$

فإن:

$$\phi_\alpha(f(x)g(x)) = d_0 + d_1\alpha + \cdots + d_s\alpha^s,$$

بينما:

$$[\phi_\alpha(f(x))][\phi_\alpha(g(x))] = \left(a_0 + a_1\alpha + \cdots + \alpha_n\alpha^n\right)\left(b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_m\alpha^m\right).$$

وباستخدام تعريف الضرب على كثيرات الحدود $d_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$، نرى أنَّ:

$$\phi_\alpha(f(x)g(x)) = [\phi_\alpha(f(x))][\phi_\alpha(g(x))].$$

لذلك ϕ_α تشاكل.

بتطبيق ϕ_α وكما هي معرفة على كثيرة الحدود الثابتة $a \in F[x]$ حيث $a \in F$، يعطي $\phi_\alpha(a) = a$؛ لذلك، ϕ_α تنقل F تماثليًا بوصفها دالة محايدة، ومرة أخرى باستخدام تعريف ϕ_α، فإنّ:

$$\phi_\alpha(x) = \phi_\alpha(1x) = 1\alpha = \alpha. \qquad \blacklozenge$$

نشير إلى أنّ هذه المبرهنة متحققة، وبالإثبات نفسه إذا كانت F و E فقط حلقتين إبداليتين مع توافر العنصر المحايد بدلاً من حقلين، ومع ذلك، سنهتم بصورة رئيسة في حالة أنهما حقلان.

من الصعب تأكيد أهمية هذه المبرهنة، فهي أساسية للأعمال المقبلة كلها في مبرهنة الحقول، وهي بسيطة جدًا، بحيث يمكن تبرير تسميتها بملاحظة بدلاً من مبرهنة، وربما كان من الخطأ كتابة الإثبات؛ لأن صورة كثيرة الحدود تجعلها تبدو معقدة جدًا، بحيث يمكن أن نعتقد بحماقة أنها مبرهنة صعبة.

6.22 مثال لتكن F هي $\mathbb{Q}$، و E هي $\mathbb{R}$ في المبرهنة 4.22، وليكن تشاكل التعويض $\phi_0 : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ معرفًا بالقاعدة:

$$\phi_0\big(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\big) = a_0 + a_1 0 + \cdots + a_n 0^n = a_0.$$

لذلك، كل كثيرة حدود تنتقل بصورة غامرة إلى الحد الثابت. ▲

7.22 مثال لتكن F هي $\mathbb{Q}$، و E هي $\mathbb{R}$ في المبرهنة 4.22، وليكن تشاكل التعويض $\phi_2 : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ معرفًا بالقاعدة:

$$\phi_2\big(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\big) = a_0 + a_1 2 + \cdots + a_n 2^n.$$

لاحظ أن:

$$\phi_2(x^2 + x - 6) = 2^2 + 2 - 6 = 0.$$

لذلك، $x^2 + x - 6$ تقع في النواة N لـِ ϕ_2، بالطبع:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

وسبب أنّ $\phi_2(x^2 + x - 6) = 0$ هو $\phi_2(x - 2) = 2 - 2 = 0$ ▲

8.22 مثال لتكن F هي $\mathbb{Q}$، و E هي $\mathbb{C}$ في المبرهنة 4.22، وليكن تشاكل التعويض $\phi_i : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}$. معرفًا بالقاعدة:

$$\phi_i\big(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\big) = a_0 + a_1 i + \cdots + a_n i^n$$

و $\phi_i(x) = i$،لاحظ أن:

$$\phi_i(x^2 + 1) = i^2 + 1 = 0,$$

لذلك، $x^2 + 1$ تقع في النواة N لـ ϕ_i. ▲

9.22 مثال لتكن F هي $\mathbb{Q}$ و E هي $\mathbb{R}$ في المبرهنة 4.22، وليكن تشاكل التعويض $\phi_\pi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ معرفًا بالقاعدة:

$$\phi_\pi\big(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\big) = a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n.$$

يمكن إثبات أنّ $a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n = 0$ إذا وفقط إذا كان $a_i = 0$ لـ $i = 0,1,\ldots,n$؛ لذلك، فإن نواة ϕ_π هي $\{0\}$، و ϕ_π دالة واحد لواحد، وهذا يبين أن كثيرات الحدود كلها في π، ذات المعاملات النسبية تماثل حلقات إلى $\mathbb{Q}[x]$ بطريقة طبيعية، حيث $\phi_\pi(x) = \pi$. ▲

الطريقة الجديدة

نكمل العلاقة بين أفكارنا الجديدة والمفهوم الأساسي لحل معادلة كثيرة حدود، فبدلاً من الحديث عن حل معادلة كثيرة حدود، نستخدم التعبير "إيجاد صفر لكثيرة حدود".

10.22 تعريف ليكن F حقلًا جزئيًّا من الحقل E، و α عنصرًا في E، لتكن $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ في $F[x]$، وليكن $\phi_\alpha : F[x] \to E$ تشاكل تعويض، كما في المبرهنة 4.22، ولتكن $f(\alpha)$ ترمز إلى:

$$\phi_\alpha(f(x)) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n.$$

إذا كان $f(\alpha) = 0$، فإن α **صفر (zero)** لـ $f(x)$ ■

باستخدام هذا التعريف، يمكننا أن نفسر المشكلة التقليدية لإيجاد الأعداد الحقيقية r كلها، حيث $r^2 + r - 6 = 0$ عن طريق فرض $F = \mathbb{Q}$ و$E = \mathbb{R}$، ثم إيجاد كل $\alpha \in \mathbb{R}$ حيث:

$$\phi_\alpha(x^2 + x - 6) = 0,$$

أي إنّ إيجاد أصفار $x^2 + x - 6$ كلها في $\mathbb{R}$، فكلتا المشكلتين لهما الجواب نفسه؛ لأن

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \phi_\alpha(x^2 + x - 6) = 0\} = \{r \in \mathbb{R} \mid r^2 + r - 6 = 0\} = \{2, -3\}.$$

يبدو أننا نجحنا فقط في جعل مشكلة بسيطة تبدو معقدة، وفي الحقيقة، فإنّ ما فعلناه هو أن نعبِّر عن المشكلة بلغة التحويلات، ويمكننا الآن استخدام ميكانيكية التحويل كلها التي طوّرناها، ثم نستمر في تطوير حلها.

هدفنا الأساس

سنواصل المحاولة لوضع عملنا المستقبلي في منظور معين، فالفصلان 26 و27 مترابطان في موضوعات حول مبرهنة الحلقات، ومشابهة للمادة عن زمر العامل والتشاكلات في مبرهنة الزمر، ومع ذلك، فإنّ هدفنا في تطوير هذه المفاهيم المشابهة للحلقات سيكون مختلفًا تمامًا عن هدفنا في مبرهنة الزمر، إذ استخدمنا في مبرهنة الزمر مفاهيم العامل والتشاكلات في دراسة بنية زمرة معطاة، وفي تحديد أنواع بنى الزمر ذات الرتبة المحددة التي يمكن توافرها، حيث سنتحدث عن التشاكلات وحلقات العامل في الفصل 26 وعيننا على إيجاد أصفار كثيرات الحدود، التي هي واحدة من أقدم المسائل وأكثرها جوهرية في الجبر، لنتحدث عن هذا الهدف في ضوء تاريخ الرياضيات، باستخدام لغة "حل معادلات كثيرة حدود" التي تعوّدنا عليها، سنبدأ بمدرسة فيثاغورس للرياضيات قرابة 525 قبل الميلاد، فقد اشتغل الفيثاغوريون على افتراض أنّ المسافات جميعها **قابلة للقياس**؛ أي إنه إذا أُعطينا مسافتين a و b، فتوجد وحدة مسافة u وعددان صحيحان n و m، بحيث $a = (n)\ (u)$ و $b = (m)\ (u)$، فقد ذكروا بمفهوم الأعداد وفي اعتقادهم، أنَّ الأعداد كلها أرقام صحيحة؛ لأنَّ u وحدة مسافة واحدة.

فكرة أنّ كل شيء قابل للقياس يمكن إرجاعها إلى فكرتنا، وهي تنص على أنّ الأعداد كلها أعداد نسبية، فمثلاً: إذا كان a و b عددين نسبيين، فإن كلًّا منهما هو مضاعف صحيح لمقلوب المضاعف المشترك الأصغر لمقاميهما، على سبيل المثال: $a=\dfrac{7}{12}$ و $b=\dfrac{19}{15}$، فإن $a=(35)(\frac{1}{60})$ و $b=(76)(\frac{1}{60})$.

عرف الفيثاغوريون، بالطبع، ما يسمى الآن مبرهنة فيثاغورس، أي إنّه لأيّ مثلث قائم، حيث ضلعاه أطوالهما a و b والوتر طوله c، فإن

$$a^2+b^2=c^2.$$

هم أيضًا مَن امتلك حق إيجاد قيمة الوتر لمثلث قائم الزاوية فيه ضلعان متساويان في الطول، لِنقل: كلٌّ منهما طوله وحدة واحدة، سيكون طول الوتر لهذا المثلث كما نعلم $\sqrt{2}$، فتخيل بعدها رعبهم وفزعهم عندما يأتي واحد من مجتمعهم – طبقًا لبعض القصص هو فيثاغورس نفسه – بالحقيقة المدهشة التي نصّها طبقًا لمصطلحنا في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 11.22 كثيرة الحدود x^2-2 ليس لها أصفار في مجموعة الأعداد النسبية، أي إنَّ $\sqrt{2}$ ليس عددًا نسبيًّا.

البرهان افترض أنّ $\dfrac{m}{n}$ حيث $m,n\in\mathbb{Z}$ عدد نسبي بأبسط صورة، وأن $2=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$، عندئذ،

$$m^2=2n^2،$$

حيث m^2 و $2n^2$ عددان صحيحان؛ فلأن m^2 و $2n^2$ هما العدد الصحيح نفسه؛ ولأنّ 2 هو عامل لـ $2n^2$، نرى أنّ 2 يجب أن يكون أحد عوامل m^2، لكن بوصفه مربعًا كاملًا، فإنّ عوامل m^2 هي عوامل m مكررة مرتين؛ لذلك، m^2 يجب أن تملك مرتين العامل 2، إذن $2n^2$ لها العامل 2 مرتين؛ ولذلك، n^2 تملك العامل 2، وعليه، فإنّ n لها العامل 2. استنتجنا من $m^2=2n^2$ أن كلاًّ من m و n قابل للقسمة على 2، وهذا يناقض الحقيقة أنّ الكسر $\dfrac{m}{n}$ في أبسط صورة؛ لذلك، فإنّ

$$2\neq\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 \text{ لأيّ } m,n\in\mathbb{Z}. \quad \blacklozenge$$

لذلك سار الفيثاغوريون في الطريق الصحيح نحو السؤال عن حل معادلة كثيرة الحدود $x^2-2=0$ نحيل الطالب إلى (Shanks) [36، وحدة 3] لأخذ المحبوب والمبهج في معضلة فيثاغوريس وأهميتها في الرياضيات.

■ **نبذة تاريخية**

حلّ معادلات كثيرة حدود كان هدف علماء الرياضيات منذ قرابة 4000 عام، فقد طوّر البابليون نماذج من التركيبات التربيعية لحلّ معادلات تربيعية، على سبيل المثال: لحلّ المعادلة $x^2 - x = 870$، شجع المؤلف البابلي طلابه على أخذ نصف 1 $\left(\frac{1}{2}\right)$ وتربيعه $\left(\frac{1}{4}\right)$ وإضافته إلى 870، فالجذر التربيعي لـ $870\frac{1}{4}$ الذي هو $29\frac{1}{2}$، يضاف إلى $\frac{1}{2}$ للحصول على 30 بوصفه جوابًا، ما لم يناقشه المؤلف كان: ماذا نفعل إذا كان الجذر التربيعي في هذه العملية ليس عددًا نسبيًّا؟

اكتشف علماء الرياضيات الصينيون، منذ قرابة 200 قبل الميلاد، طريقة مشابهة لما تسمى الآن طريقة هورنر في حل المعادلات التربيعية بالطرق العددية؛ لأنهم استخدموا النظام العشري، فقد كان بإمكانهم باستخدام هذا المبدأ أن يصلوا بالحساب إلى أبعد ما يكون، متجاهلين التفريق بين الحلول النسبية وغير النسبية.

في الواقع وسّع الصينيون تقنيتهم العددية هذه لحلّ معادلات كثيرة حدود من رتب أعلى.

وفي العالم العربي، طوّر الشاعر الإيراني – عالم الرياضيات – عمر الخيام (1048 – 1131) طرقًا لحلّ معادلات تكعيبية هندسيًّا، عن طريق إيجاد نقاط التقاطع التقريبية للقطوع المخروطية المختارة، بينما استخدم شرف الدين الطوسي (توفي عام 1213م) تقنيات الحسبان؛ ليحدِّد ما إذا كان للمعادلة التكعيبية جذر حقيقي موجب أم لا، وقد كان الإيطالي جيرولامو كاردانو (Girolamo Cardano 1501 – 1576) أول من نشر إجراءً لحل معادلة تكعيبية جبريًّا.

من خلال **تعريفنا الممتع للزمرة**، علّقنا على أهمية توافر الأعداد السالبة، ما يعني أنّ المعادلات مثل $x + 2 = 0$ يمكن أن يكون لها حل، وقد سبّب تعريف الأعداد السالبة نوعًا محددًا من الرعب في الدوائر الفلسفية، إذ يمكننا تخيل تفاحة واحدة، وتفاحتين وحتى $\frac{13}{11}$ تفاحة، ولكن كيف نشير إلى شيء، ونقول: هذا 17- تفاحة؟

وأخيرًا، قادتنا المعادلة $x^2 + 1 = 0$ إلى تعريف العدد i، وأظهر الاسم "العدد التخيلي" الذي أُعطيَ لـ i كيف كانت النظرة لهذا العدد، فكثير من الطلاب حتى يومنا هذا يقودهم الاسم للنظر إلى i مع بعض من الشك، بينما قُدِّمت لنا الأعداد السالبة في مرحلة مبكرة من تطور الرياضيات، حيث قبلناها من غير سؤال.

أول ما تعرفنا كثيرات الحدود في جبر المرحلة الثانوية للمبتدئين، كان السؤال الأول وقتها: كيف نتعلم الجمع، والضرب والتحليل إلى عوامل كثيرات حدود؟ وبعدها في الجبر للمبتدئين والكتاب الثاني في الجبر للمرحلة الثانوية، فقد ركز بشدة على حلّ معادلات كثيرة حدود، وهذه الموضوعات بالضبط التي ستكون موضع اهتمامنا، إذ إنّ الفرق في أنّنا ركزنا في المرحلة الثانوية على كثيرات الحدود التي معاملاتها أعداد حقيقية، وسنعمل على كثيرات الحدود التي معاملاتها من أيّ حقل.

وحيث إننا طوّرنا آلية التشاكلات وحلقات العامل في الفصل 26، فسوف نوظفها مع هدفنا الأساسي؛ لنبين أنه لأيّ كثيرة حدود معطاة من الدرجة ≥ 1، حيث معاملاتها من أيّ حقل، يمكن إيجاد صفر لكثيرة الحدود هذه في حقل ما يحوي الحقل المعطى، وبعد تطوير هذه الآلية في الفصلين 26 و 27، فسيكون إنجاز هذا الهدف سهلاً جدًّا، وفي الحقيقة سيكون تحفة رائعة من الرياضيات، وإذا عدنا بتفكيرنا إلى التاريخ، فسنجد أنه ذروة أكثر من 2000 عام من المساعي الرياضية للعمل على معادلات كثيرات الحدود.

بعد إنجاز هدفنا الأساسي، سنقضي ما تبقى من وقتنا في دراسة طبيعة هذه الحلول لمعادلات كثيرات الحدود، إذ لا يجب علينا الخوف من الخوض في هذا الأمر، فقد تعاملنا مع موضوعات مشابهة في الجبر للمرحلة الثانوية، وهذا العمل سيكون طبيعيًّا أكثر من مبرهنة الزمر.

ختامًا، نشير إلى أنّ آلية حلقات العامل والتشاكلات الحلقية ليست ضرورية لنا لإنجاز هدفنا الأساسي، وللإثبات المباشر انظر Artin [27, p.29]. مع ذلك، حلقات العامل والتشاكلات الحلقية هي أفكار أساسية يجب أن نتمسك بها، ثم سيتبعها هدفنا الأساسي بسهولة عند دراستها.

■ تمارين 22

حسابات

في التمارين 1 إلى 4، أوجد حاصل جمع وضرب كثيرات الحدود المعطاة في حلقة كثيرة الحدود المعطاة:

1. $f(x) = 4x - 5$، $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$ في $\mathbb{Z}_8[x]$.

2. $f(x) = x + 1$، $g(x) = x + 1$ في $\mathbb{Z}_2[x]$.

3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$، $g(x) = 3x^2 + 2x + 3$ في $\mathbb{Z}_6[x]$.

4. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$، $g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ في $\mathbb{Z}_5[x]$.

5. ما عدد كثيرات الحدود من الدرجة ≤ 3 في $\mathbb{Z}_2[x]$؟ (يشمل 0).

6. ما عدد كثيرات الحدود من الدرجة ≤ 2 في $\mathbb{Z}_5[x]$؟ (يشمل 0).

في التمرينين 7 و 8، $F = E = \mathbb{C}$ في المبرهنة 4.22. احسب تشاكل التعويض الآتي:

7. $\phi_2(x^2 + 3)$

8. $\phi_i(2x^3 - x^2 + 3x + 2)$

في التمارين 9 إلى 11، $F = E = \mathbb{Z}_7$ في المبرهنة 4.22. احسب تشاكل التعويض الآتي:

9. $\phi_3[(x^4 + 2x)(x^3 - 3x^2 + 3)]$

10. $\phi_5[(x^3 + 2)(4x^2 + 3)(x^7 + 3x^2 + 1)]$

11. $\phi_4(3x^{106} + 5x^{99} + 2x^{53})$ [مساعدة: استخدم مبرهنة فيرما].

في التمارين 12 إلى 15، أوجد الأصفار جميعها في الحقل المنتهي المعطى لكثيرة الحدود المعطاة، التي معاملاتها تنتمي إلى ذلك الحقل. [مساعدة: إحدى الطرق هي ببساطة تجربة جميع القيم الممكنة!].

12. $x^2 + 1$ في $\mathbb{Z}_2$ **13.** $x^3 + 2x + 2$ في $\mathbb{Z}_7$

14. $x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x$ في $\mathbb{Z}_5$

15. $f(x)\, g(x)$ حيث $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ و $g(x) = 3x^2 + 2x$ في $\mathbb{Z}_7$

16. لتكن $\phi_a : \mathbb{Z}_5[x] \to \mathbb{Z}_5$ تشاكل تعويض كما في المبرهنة 4.22. استخدم مبرهنة فيرما لحساب $\phi_3(x^{231} + 3x^{117} - 2x^{53} + 1)$

17. استخدم مبرهنة فيرما لحساب الأصفار جميعها لكثيرة الحدود في الحقل $\mathbb{Z}_5$:

$$2x^{219} + 3x^{74} + 2x^{57} + 3x^{44}$$

مفاهيم

في التمرينين 18 و 19، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إن كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

18. كثيرة الحدود التي معاملاتها من الحلقة R هو المجموع الشكلي اللانهائي:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

حيث $a_i \in R$ لـ $i = 0,1,2,\ldots$.

19. ليكن F حقلًا، ولتكن $f(x) \in F[x]$، وصفر $f(x)$ هو $\alpha \in F$ بحيث $\phi_\alpha(f(x))=0$، و $\phi_\alpha : F(x) \to F$ تشاكل التعويض الذي ينقل x إلى α.

20. ليكن العنصر

$$f(x, y) = (3x^3 + 2x)y^3 + (x^2 - 6x + 1)y^2 + (x^4 - 2x)y + (x^4 - 3x^2 + 2)$$

في $(\mathbb{Q}[x])[y]$. اكتب $f(x,y)$، بوصفه عنصرًا في $(\mathbb{Q}[y])[x]$.

21. ليكن تشاكل التعويض $\phi_5 : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$. أوجد ستة عناصر في نواة التشاكل ϕ_5

22. أوجد كثيرة حدود من درجة > 0 في $\mathbb{Z}_4[x]$، بحيث تكون عنصر وحدة.

23. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ **أ.** كثيرة الحدود $(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \in R[x]$ هي 0، إذا وفقط إذا كان $a_i = 0$ لـ $i = 0,1,\ldots,n$.

________ ب. إذا كانت R حلقة إبدالية، فإنّ $R\,[x]$ إبدالية.

________ جـ. إذا كانت D حلقة تامة، فإنّ $D\,[x]$ حلقة تامة.

________ د. إذا كانت R حلقة تحوي قواسم للصفر، فإنّ $R\,[x]$ تحوي قواسم للصفر.

________ هـ. إذا كانت R حلقة و $f\,(x)$ و $g\,(x)$ في $R\,[x]$ من الدرجتين 3 و 4 على الترتيب، فإنّ $f\,(x)\,g(x)$ يمكن أن تكون من الرتبة 8 في $R\,[x]$.

________ و. إذا كانت R أيّ حلقة و $f\,(x)$ و $g\,(x)$ في $R\,[x]$ من الدرجتين 3 و 4 على الترتيب، فإنّ $f\,(x)\,g\,(x)$ دائمًا من الدرجة 7.

________ ز. إذا كان F حقلًا جزئيًا من E و $\alpha \in E$ هو صفر لـِ $f(x) \in F[x]$، فإنّ α صفر لـ $h\,(x) = f\,(x)\,g\,(x)$ لكل $g(x) \in F[x]$.

________ ح. إذا كان F حقلاً، فإنّ عناصر الوحدة في $F\,[x]$ هي بالضبط عناصر الوحدة في F.

________ ط. إذا كانت R حلقة، فإنّ x ليس قاسمًا للصفر في $R\,[x]$.

________ ي. إذا كانت R حلقة، فإن قواسم الصفر في $R\,[x]$ هي بالضبط قواسم الصفر في R.

براهين

24. أثبت أنه إذا كانت D حلقة تامة، فإنّ $D\,[x]$ حلقة تامة.

25. لتكن D حلقة تامة و x غير معين.

أ. صف عناصر الوحدة في $D\,[x]$.

ب. أوجد عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}\,[x]$.

جـ. أوجد عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}_7\,[x]$.

26. أثبت قانون التوزيع من اليسار لـ $R\,[x]$، حيث R حلقة و x غير معين.

27. ليكن F حقلًا مميزه صفر، ولتكن D دالة الاشتقاق لكثيرة الحدود المكونة، حيث:

$$D\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = a_1 + 2.\,a_2\,x + \ldots + n.\,a_n\,x^{n-1}$$

أ. بيّن أنّ $D : F\,[x] \rightarrow F\,[x]$ هي تشاكل زمر من $\langle F\,[x], +\rangle$ إلى نفسها. هل D تشاكل حلقات؟

ب. أوجد نواة D.

جـ. أوجد صورة $F\,[x]$ تحت D.

28. ليكن F حقلًا جزئيًا من الحقل E.

أ. عرّف تشاكل التعويض

$$\phi_{a_1,\ldots a_n} : F\left[x_1,\ldots,x_n\right] \to E \qquad \text{حيث} \quad \alpha_1 \in E$$

طبقًا لما ورد في مبرهنة 4.22.

ب. إذا كان $E = F = \mathbb{Q}$. احسب $\phi_{-3,2}(x_1{}^2 x_2{}^3 + 3x_1{}^4 x_2)$

جـ. عرّف المفهوم صفر كثيرة الحدود $f\ (x_1,\ldots,x_\text{n}) \in F\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ بطريقة مشابهة للتعريف في الكتاب لـ صفر $f(x)$.

29. لتكن R حلقة، وR^R هي مجموعة الدوال كلها التي تنقل R إلى R.

لـ $\phi\ ,\ \psi \in R^R$، عرّف الجمع $\phi + \psi$ بـ

$$(\phi + \psi)(r) = \phi(r) + \psi(r)$$

والضرب $\phi.\psi$ بـ

$$(\phi.\psi)(r) = \phi(r)\psi(r)$$

لـ $r \in R$، لاحظ أنّ (.) ليست التركيب الدالي. بيِّن أنّ $\langle R^R, +, .\rangle$ حلقة.

30. بالرجوع إلى تمرين 29، ليكن F حقلًا، والعنصر ϕ في F^F **هو دالة كثيرة الحدود على** F، فإذا وجد $f(x) \in F[x]$، حيث $\phi(a) = f\,(a)$ لكل $a{\in}F$.

أ. بيّن أنّ المجموعة P_F لدوال كثيرة الحدود على F تشكل حلقة جزئية من F^F.

ب. بيّن أنّ الحلقة P_F لا تماثل بالضرورة $F[x]$. [مساعدة: بيّن أنه إذا كان F حقلًا منتهيًا، P_F و $F[x]$ ليس لهما العدد نفسه من العناصر].

31. ارجع إلى التمرينين 29 و 30 لإجابة الأسئلة الآتية:

أ. ما عدد العناصر في $\mathbb{Z}_2{}^{\mathbb{Z}_2}$ ؟ $\mathbb{Z}_3{}^{\mathbb{Z}_3}$ ؟

ب. صنّف $\langle \mathbb{Z}_2{}^{\mathbb{Z}_2}, +\rangle$ و$\langle \mathbb{Z}_3{}^{\mathbb{Z}_3}, +\rangle$ باستخدام المبرهنة 12.11، المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التوليد.

جـ. بيّن أنه إذا كان F حقلًا منتهيًا، فإن $F^F = P_F$. [مساعدة: بالطبع $P_F \subseteq F^F$.

افترض أنّ عناصر F هي $a_1, \ldots, a_n$. لاحظ أنه إذا كان:

$$f_i\,(x) = c\,(x - a_1)\ldots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\ldots(x - a_n),$$

فإنّ $f_i(a_j) = 0$ لـ $j \neq i$، وقيمة $f_i(a_i)$ يُتَحكّمْ فيها باختيار $c \in F$. استخدم هذا لتبين أن كل دالة على F هي دالة كثيرة الحدود].

تحليل كثيرات الحدود على حقل Factorization of Polynominls over a Field

تذكر أننا مهتمون في إيجاد أصفار كثيرات الحدود، ليكن F و E حقلين بحيث $F \leq E$، وافترض أنّ $f(x) \in F[x]$ تتحلل في $F[x]$، بحيث $f(x) = g(x)\ h(x)$ لـ $g(x), h(x) \in F[x]$، ولتكن $a \in E$. والآن، بالنسبة إلى تشاكل التعويض ϕ_a، فإنّ:

$$f(\alpha) = \phi_\alpha(f(x)) = \phi_\alpha(g(x)h(x)) = \phi_\alpha(g(x))\phi_\alpha(h(x)) = g(\alpha)h(\alpha).$$

لذلك، إذا كان $a \in E$، فإنّ $f(a) = 0$ إذا وفقط إذا $g(a) = 0$ أو $h(a) = 0$. محاولة إيجاد صفر $f(x)$ تختصر إلى مسألة إيجاد صفر لأحد عوامل $f(x)$. هذا أحد أسباب أهمية دراسة تحليل كثيرات الحدود.

خوارزمية القسمة داخل $F[x]$

المبرهنة الآتية أداة أساسية لعملنا في هذا الفصل، لاحظ التشابه مع خوارزمية القسمة لـ $\mathbb{Z}$ المعطاة في المبرهنة 3.6، التي تمّ تفصيل أهميتها بإسهاب.

مبرهنة 1.23 (خوارزمية القسمة لـ $F[x]$): لتكن

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

و

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$$

كثيرتي حدود في $F[x]$، حيث a_n و b_m عنصران غير صفرين في F و $m > 0$.

عندئذ، توجد كثيرتا حدود وحيدتان $q(x)$ و $r(x)$ في $F[x]$، تحققان $f(x) = g(x)\ q(x) + r(x)$، حيث إما $r(x) = 0$ أو درجة $r(x)$ أقل من الدرجة m لـ $g(x)$.

البرهان لتكن المجموعة $S = \{f(x) - g(x)s(x) \mid s(x) \in F[x]\}$ إذا كانت $0 \in S$، فإنه يوجد $s(x) \in F[x]$، بحيث $f(x) - g(x)s(x) = 0$؛ لذلك، $f(x) = g(x)s(x)$، وبأخذ $q(x)=s(x)$ و $r(x) = 0$، نكون قد انتهينا، وإلاّ لتكن $r(x)$ عنصر ذو أصغر درجة في S. فإن

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

لبعض $q(x) \in F[x]$. يجب علينا أن نبين أنّ درجة $r(x)$ أقل من m. افترض أنَّ:

$$r(x) = c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \ldots + c_0$$

حيث $c_j \in F$ و $c_t \neq 0$. إذا كانت $t \geq m$، فإنّ:

(1)

$$f(x) - q(x)g(x) - (c_t / b_m)x^{t-m} g(x) = r(x) - (c_t / b_m)x^{t-m} g(x)$$

وهذه الأخيرة ستكون على الصورة

$r(x)$- ($c_t x^t$ + حدود من درجة أقل)

التي هي كثيرة حدود من درجة أقل من t، درجة $r(x)$، بينما كثيرة الحدود في المعادلة (1) يمكن كتابتها على صورة

$$f(x) - g(x)\left[q(x) + (c_t / b_m)x^{t-m}\right]$$

لذلك، هي في S وهذا يناقض حقيقة أنّ $r(x)$ اختيرت لتكون صاحبة أصغر درجة في S؛ ولذلك، فإنّ درجة $r(x)$ أقل من الدرجة m لـ $g(x)$. لإثبات الوحدانية، إذا كان:

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$$

و

$$f(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x),$$

فإنه بالطرح يكون لدينا:

$$g(x)\left[q_1(x) - q_2(x)\right] = r_2(x) - r_1(x)$$

لأنه إما $r_2(x) - r_1(x) = 0$ أو درجة $r_2(x) - r_1(x)$ أقل من درجة $g(x)$، فإنها تتحقق فقط إذا كان $q_1(x) - q_2(x) = 0$ ؛ لذلك $q_1(x) = q_2(x)$. وعليه، يجب أن يكون عندنا $r_2(x) - r_1(x) = 0$، أي $r_1(x) = r_2(x)$. ♦

يمكننا حساب كثيرات الحدود $q(x)$ و$r(x)$ في المبرهنة 1.23 باستخدام القسمة الطويلة، كما كنا نقسم كثيرات حدود في $\mathbb{R}[x]$ في المرحلة الثانوية.

مثال 2.23 لنعمل على كثيرات حدود في $\mathbb{Z}_5[x]$، ونقسم

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^3 + 4x - 1$$

على $g(x) = x^2 - 2x + 3$ ؛ لإيجاد $q(x)$ و $r(x)$ في المبرهنة 1.23، القسمة المطوَّلة سهلة المتابعة، ولكن تذكر أننا في $\mathbb{Z}_5[x]$، حيث على سبيل المثال: $4x - (-3x) = 2x$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x - 3 \\
\hline
x^2 - 2x + 3 & x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 1 \\
 & \underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} \\
 & \quad - x^3 - x^2 + 4x \\
 & \quad \underline{- x^3 + 2x^2 - 3x} \\
 & \qquad - 3x^2 + 2x - 1 \\
 & \qquad \underline{- 3x^2 + x - 4} \\
 & \qquad\qquad x + 3
\end{array}
$$

لذلك:

$r(x) = x + 3$ و $q(x) = x^2 - x - 3$ ▲

3.23 نتيجة (مبرهنة العامل): العنصر $a \in F$ هو صفر $f(x) \in F[x]$، إذا وفقط إذا كان $x - a$ عاملًا لـ $f(x)$ في $F[x]$.

البرهان افترض أن $a \in F$ و $f(a) = 0$؛ باستخدام المبرهنة 1.23 يوجد $q(x), r(x) \in F[x]$، حيث:

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x)$$

إذ إما $r(x) = 0$ أو درجة $r(x)$ أقل من 1؛ لذلك، يجب أن يكون عندنا $r(x) = c$ لـ $c \in F$، وعليه، فإنّ:

$$f(x) = (x - a)q(x) + c$$

بتطبيق تشاكلنا التعويضي $\phi_a : F[x] \to F$ للمبرهنة 4.22 نجد:

$$0 = f(a) = 0q(a) + c$$

لذلك، يجب أن تكون $c = 0$. وعليه، فإنّ $f(x) = (x - a)\, q(x)$؛ ولذلك $x - a$ عامل لـ $f(x)$

وبالعكس، إذا كان $x - a$ عاملًا لـ $f(x)$ في $F[x]$، حيث $a \in F$، فإنّ تطبيق تشاكلنا التعويضي ϕ_a على $f(x) = (x-a)q(x)$ وبهذا نحصل على $f(a) = 0q(a) = 0$ ♦

4.23 مثال بالعمل مرة أخرى في $\mathbb{Z}_5[x]$، لاحظ أنّ 1 هو صفر لـ

$(x^4 + 3x^3 + 2x + 4) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

لذلك، باستخدام نتيجة 3.23 سنكون قادرين على تحليل $x^4 + 3x^3 + 2x + 4$ إلى

$(x-1)q(x)$ في $\mathbb{Z}_5[x]$. لنجد ناتج التحليل باستخدام القسمة المطولة.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 + 4x + 1 \\
\hline
x-1 & x^4 + 3x^3 + 2x + 4 \\
 & \underline{x^4 - x^3} \\
 & 4x^3 \\
 & \underline{4x^3 - 4x^2} \\
 & 4x^2 + 2x \\
 & \underline{4x^2 - 4x} \\
 & x + 4 \\
 & \underline{x - 1} \\
 & 0
\end{array}
$$

لذلك: $x^4 + 3x^3 + 2x + 4 = (x-1)(x^3 + 4x^2 + 4x + 1)$ في $\mathbb{Z}_5[x]$ لأنه يمكن مشاهدة أنّ 1 صفر لـ $x^3 + 4x^2 + 4x + 1$؛ لذلك، نستطيع أن نقسم كثيرة الحدود هذه على $x-1$ ونحصل على:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 4 \\
\hline
x-1 & x^3 + 4x^2 + 4x + 1 \\
 & \underline{x^3 - x^2} \\
 & 0 + 4x + 1 \\
 & \underline{4x - 4} \\
 & 0
\end{array}
$$

لأن 1 ما زال صفرًا لـ x^2+4، نستطيع أن نقسم مرة أخرى على $x-1$ ونحصل على:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 1 \\
\hline
x-1 & x^2 + 4 \\
 & \underline{x^2 - x} \\
 & x + 4 \\
 & \underline{x - 1} \\
 & 0
\end{array}
$$

لذلك: $x^4 + 3x^3 + 2x + 4 = (x-1)^3(x+1)$ في $\mathbb{Z}_5[x]$. ▲

النتيجة المقبلة تبدو مشهورة.

5.23 نتيجة عدد أصفار كثيرة الحدود غير الصفرية $f(x) \in F[x]$ من الدرجة n، لا يزيد على n في الحقل F.

البرهان تبيّن النتيجة السابقة أنه إذا كان $a_1 \in F$ صفرًا لـ $f(x)$، فإنّ:

$$f(x) = (x - a_1)q_1(x)$$

حيث بالطبع، درجة $q_1(x)$ هي n- 1، والصفر $a_2 \in F$ لـ $q_1(x)$ يؤدي إلى التحليل

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x).$$

بالاستمرار في هذه الطريقة، نصل إلى:

$$f(x) = (x - a_1)...(x - a_r)q_r(x)$$

حيث لم يبقَ لـ $q_r(x)$ أصفار في F؛ ولأن درجة $f(x)$ هي n، فإنه على الأكثر n من العوامل $(x - a_i)$ يمكن أن تظهر على الجانب الأيمن من المعادلة الأخيرة؛ لذلك $r \leq n$. أيضًا، إذا كان $b \neq a_i$ لـ $i=1, \ldots, r$ و $b \in F$، فإنّ:

$$f(b) = (b - a_1)...(b - a_r)q_r(b) \neq 0$$

لأن F ليس لها قواسم لـ 0 وليس أيّ من $b - a_i$ أو $q_r(b)$ صفرًا تبعًا لبنائهم؛ لذلك، a_i لـ $i=1,\ldots, r \leq n$ هي الأصفار كلها في F لـ $f(x)$. ♦

تركز نتيجتنا الأخيرة على بناء الزمرة الضربية F^* للعناصر غير الصفرية للحقل F، بدلاً من التحليل في $F[x]$، ربما يبدو مدهشًا من الوهلة الأولى أنّ مثل هذه النتيجة تنتج عن خوارزمية القسمة على $F[x]$، ولكن تذكر النتيجة التي تقول: الزمرة الجزئية من زمرة دورية هي دورية، تنتج من خوارزمية القسمة على $\mathbb{Z}$.

6.23 نتيجة إذا كانت G زمرة جزئية منتهية من الزمرة الضربية $\langle F^*, .\rangle$ للحقل F، فإن G دورية. بوجه خاص، الزمرة الضربية للعناصر غير الصفرية للحقل المنتهي هي دورية.

البرهان باستخدام المبرهنة 12.11، بوصفها زمرة إبدالية منتهية، تماثل G الضرب المباشر $\mathbb{Z}_{d1} \times \mathbb{Z}_{d2} \times ... \mathbb{Z}_{dr}$ حيث كل d_i هو قوة لعدد أولي، لنفكر في كل $\mathbb{Z}_{d_i}$ على أنها زمرة دورية من الرتبة d_i في المفهوم الضربي، لتكن m المضاعف المشترك الأصغر لكل d_i لـ r ,… ,$i = 1$، لاحظ أنّ $m \leq d_1 d_2 \ldots d_r$. إذا كان $a_i \in \mathbb{Z}_{d_i}$، فإن $a_i^{di} = 1$؛ لذلك، $a_i^m = 1$ ؛ لأن d_i يقسم m؛ لذلك لكل $a \in G$، عندنا $\alpha^m = 1$، وعليه، فإن كلّ عنصر في G هو صفر لـ x^m- 1. لكن G يملك $d_1 d_2 \ldots d_r$ من العناصر، بينما يمكن أن يكون لـ x^m- 1 على الأكثر m من الأصفار في الحقل F كما في النتيجة 5.23؛ لذلك $m \geq d_1 d_2 \ldots d_r$؛ وبهذا $m = d_1 d_2 \ldots d_r$، وعليه، فإنّ الأعداد الأولية المشمولة في قوى الأعداد الأولية $d_1, d_2, \ldots, d_r$ مختلفة، والزمرة G تماثل الزمرة الدورية $\mathbb{Z}_m$. ♦

تطلب منا التمارين 5 إلى 8 إيجاد المولدات كلها للزمر الدورية لعناصر الوحدة لبعض الحقول المنتهية، وحقيقة أنَّ الزمرة الضربية لعناصر الوحدة لحقل منتهٍ دورية تمّ تطبيقها في التشفير الجبري.

كثيرات الحدود غير المختزلة

تعريفنا القادم يشير إلى نوع من كثيرات الحدود في $F[x]$ التي ستكون لها أهمية كبرى لنا، وربما يبدو المفهوم معروفًا تقريبًا، فنحن فعليًّا نفعل ما نفعله في المرحلة الثانوية، ولكن بوضع أكثر عمومًا.

7.23 تعريف تسمى كثيرة الحدود غير الثابتة $f(x) \in F[x]$ **غير مختزلة على** F، أو **كثيرة حدود غير مختزلة في** $F[x]$ **(irreducible)**، إذا كان من غير الممكن التعبير عن $f(x)$ بوصفه حاصل ضرب $g(x)$ $h(x)$ لكثيرتي حدود $g(x)$ و $h(x)$ في $F[x]$، حيث كلتا درجتيهما أقل من درجة $f(x)$. فإذا كانت $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود غير ثابتة، وليست غير مختزلة على F، فإن $f(x)$ **مختزلة على** F **(reducible)**. ■

لاحظ أنّ التعريف السابق ركز على المفهوم غير مختزلة على F وليس فقط المفهوم غير مختزلة، إذ إنّ كثيرة الحدود $f(x)$ ربما تكون غير مختزلة على F، لكنها ربما تكون مختزلة إذا عُرِضت داخل حقل أكبر E يحوي F. سنوضح هذا.

8.23 مثال توضّح المبرهنة 11.22 أنّ x^2-2 الموجودة في $\mathbb{Q}[x]$ ليس لها أصفار في $\mathbb{Q}$، هذا يبين أنّ x^2-2 غير مختزلة على $\mathbb{Q}$؛ لأنّ أي تحليل $x^2-2=(ax+b)(cx+d)$ لـ $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ سيؤدي إلى توافر أصفار لـ x^2-2 في $\mathbb{Q}$، بينما x^2-2 الموجودة في $\mathbb{R}[x]$ مختزلة على $\mathbb{R}$؛ لأنّ x^2-2 تتحلل في $\mathbb{R}[x]$ إلى $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$. ▲

إنه لأمر جدير بالاهتمام أن نتذكر أنّ عناصر الوحدة في $F[x]$، هي بالضبط العناصر غير الصفرية في F؛ لذلك، يمكننا تعريف كثيرة الحدود غير المختزلة $f(x)$ على أنها كثيرة حدود غير ثابتة، بحيث لأي تحليل $f(x)=g(x)h(x)$ في $F[x]$ إما $g(x)$ أو $h(x)$ عنصر وحدة.

9.23 مثال لنبين أنّ $f(x) = x^3 + 3x + 2$ الموجودة في $\mathbb{Z}_5[x]$ غير مختزلة على $\mathbb{Z}_5$، إذا كانت $x^3 + 3x + 2$ تتحلل في $\mathbb{Z}_5[x]$ إلى كثيرتي حدود ذوات درجة أقل، فإنه يوجد على الأقل عامل خطي واحد لـ $f(x)$ على صورة $x - a$ لبعض $a \in \mathbb{Z}_5$. لكن $f(a)$ سيكون 0 باستخدام النتيجة 3.23، إلّا أنّ $f(0) = 2$، $f(1) = 1$، $f(-1) = -2$، $f(2) = 1$ و$f(-2) = 2$ يبيِّن أنّ $f(x)$ ليس لها أصفار في $\mathbb{Z}_5$؛ لذلك، $f(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Z}_5$، هذا الاختبار لغير الاختزال عن طريق إيجاد الأصفار، يعمل بصورة جيدة بالنسبة إلى كثيرات الحدود التربيعية والتكعيبية على حقل منتهٍ فيه عدد قليل من العناصر. ▲

كثيرات الحدود غير مختزلة ستؤدي دورًا مهمًّا في عملنا من الآن فصاعدًا، ومشكلة تحديد هل كثيرة حدود معطاة $f(x) \in F[x]$ هي غير مختزلة على F ربما تكون صعبة.

نقدم الآن بعض الاختبارات لعدم قابلية الاختزال ذات الأهمية لبعض الحالات الخاصة، وقد قُدِّمت تقنية واحدة لتحديد عدم القابلية للاختزال لكثيرة حدود تربيعية أو تكعيبية في المثالين 8.23 و9.23، وسنصوغها في مبرهنة.

10.23 مبرهنة لتكن $f(x) \in F[x]$، ولتكن $f(x)$ من الدرجة 2 أو 3، فإنّ $f(x)$ مختزلة على F، إذا وفقط إذا توافرت لها أصفار في F.

البرهان إذا كانت $f(x)$ مختزلة، حيث $f(x) = g(x)h(x)$، بحيث كل من درجة $g(x)$ ودرجة $h(x)$ أقل من رتبة $f(x)$، إذن؛ لأنَّ $f(x)$ إما تربيعية أو تكعيبية، إما $g(x)$ أو $h(x)$ من الدرجة 1. إذا– فرضًا– $g(x)$ من الدرجة 1، فإنه باستثناء العامل المحتمل من F، $g(x)$ على صورة $x - a$. إذن، $g(a) = 0$ الذي يؤدي إلى أنّ $f(a) = 0$؛ لذلك، $f(x)$ لها صفر في F.

في المقابل، توضح النتيجة 3.23 أنه إذا كان $f(a) = 0$ لـ $a \in F$، فإنّ $x - a$ هو أحد عوامل $f(x)$؛ لذلك، $f(x)$ مختزلة. ♦

سنتحول إلى بعض شروط اللااختزال على $\mathbb{Q}$ لكثيرات الحدود في $\mathbb{Q}[x]$. أهم شرط سنقدّمه موجود في المبرهنة القادمة، ولن نثبت هذه المبرهنة هنا؛ فهي تشمل إلغاء المقام، وتؤدي إلى قليل من الفوضى.

11.23 مبرهنة إذا كانت $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$، فإن $f(x)$ تتحلل إلى حاصل ضرب كثيرتي حدود ذوات درجات أقل r وs في $\mathbb{Q}[x]$، إذا وفقط إذا كان لها تحليل لكثيرات حدود من الدرجة r وs نفسها في $\mathbb{Z}[x]$.

البرهان البرهان محذوف هنا. ♦

12.23 نتيجة إذا كان $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ في $\mathbb{Z}[x]$، حيث $a_0 \neq 0$، وإذا $f(x)$ لها صفر في $\mathbb{Q}$، فإنّ لها صفر m في $\mathbb{Z}$ وm يقسم a_0.

البرهان إذا كانت $f(x)$ لها صفر a في $\mathbb{Q}$، فإن $f(x)$ لها عامل خطي $x-a$ في $\mathbb{Q}[x]$ باستخدام النتيجة 3.23، وباستخدام المبرهنة 11.23، فإنّ $f(x)$ تتحلل، بحيث يكون لها عامل خطي في $\mathbb{Z}[x]$؛ لذلك، يجب أن تكون لبعض $m \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = (x-m)(x^{n-1} + \ldots - a_0/m)$$

ولذلك، a_0/m في $\mathbb{Z}$، وعليه، فإنّ m تقسم a_0. ♦

13.23 مثال تعطينا النتيجة 12.23 برهانًا آخر لعدم اختزال x^2-2 على $\mathbb{Q}$، حيث x^2-2 تتحلل بصورة غير بدهية في $\mathbb{Q}[x]$، إذا وفقط إذا كان لها صفر في $\mathbb{Q}$ باستخدام المبرهنة 10.23، وباستخدام النتيجة 12.23، لها صفر في $\mathbb{Q}$، إذا وفقط إذا كان لها صفر في $\mathbb{Z}$، إضافة إلى ذلك، الاحتمالات هي فقط القواسم ±1 و ±2 لـ 2، ويبين الفحص أنَّه ليس أيّ من هذه الأعداد صفرًا لـ x^2-2. ▲

14.23 مثال لنستخدم المبرهنة 11.23 لنبين أنّ:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x + 1$$

الموجودة في $\mathbb{Q}[x]$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$، فإذا كانت $f(x)$ لها عامل خطي في $\mathbb{Q}[x]$، فإن لها صفرًا في $\mathbb{Z}$، وباستخدام النتيجة 12.23 هذا الصفر سيكون قاسمًا في $\mathbb{Z}$ لـ 1، أي إنَّه إما ±1. لكن $f(1) = 8$ و $f(-1) = -8$؛ لذلك، هذا التحليل مستحيل.

إذا كانت $f(x)$ تتحلل إلى عاملين تربيعيين في $\mathbb{Q}[x]$، فباستخدام المبرهنة 11.23 يكون لها التحليل:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

في $\mathbb{Z}[x]$. بمساواة المعاملات لقوى x، نجد أنَّ:

$$a + c = 0 \text{ و } bd = 1,\ ad + bc = 8, ac + b + d = -2$$

للأعداد الصحيحة $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. من $bd = 1$ نرى أنه إما $b = d = 1$ أو $b = d = -1$. في الأحوال جميعها، $b = d$، ومن $ad + bc = 8$، نستنتج أنَّ $d(a+c) = 8$، لكن هذا مستحيل؛ لأنّ $a + c = 0$؛ لذلك، التحليل إلى كثيرتي حدود تربيعتين أيضًا مستحيل، و $f(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$. ▲

ننهي خاصيتنا اللااختزالية بخاصية أيزنستاين المشهورة عن اللااختزال.

خاصية أخرى مفيدة جدًا مقدمة في التمرين 37.

15.23 مبرهنة (خاصية أيزنستاين): لتكن $p \in \mathbb{Z}$ عددًا أوليًّا، افترض أنَّ:

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ (مقياس p^2) في $\mathbb{Z}[x]$ و $a_n \not\equiv 0$ (مقياس p) لكن $a_i=0$ (مقياس p) لكل $i < n$، حيث $a_0 \not\equiv 0$ (مقياس p^2)، فإنّ $f(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

البرهان باستخدام المبرهنة 11.23 نحتاج فقط إلى إثبات أنّ $f(x)$ لا تتحلل إلى كثيرات حدود ذوات درجات أقل في $\mathbb{Z}[x]$. إذا كان:

$$f(x) = (b_r x^r + \ldots + b_0)(c_s x^s + \ldots + c_0)$$

هو تحليلها في $\mathbb{Z}[x]$، حيث $b_r \neq 0$ و $c_s \neq 0$ و $r, s < n$، فإن $a_0 \not\equiv 0$ (مقياس p^2)

تؤدي إلى أنّ كلًّا من c_0 و b_0 لا يطابقان 0 (مقياس p)، افترض أن $b_0 \not\equiv 0$ (مقياس p)

و $c_0 \equiv 0$ (مقياس p) الآن، $a_0 \not\equiv 0$ (مقياس p) يؤدي إلى $b_r, c_s \not\equiv 0$ (مقياس p)

لأنّ: $a_n = b_r c_s$.

لتكن m أصغر قيمة لـ k، بحيث $c_k \not\equiv 0$ (مقياس p). فإنّ:

$$a_m = b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + \ldots + \begin{cases} b_m c_0 & \text{عندما } r \geq m, \\ b_r c_{m-r} & \text{عندما } r < m \end{cases}$$

حقيقة أنَّ لا b_0 ولا c_m يطابق 0 (مقياس p)، بينما $c_{m-1}, \ldots, c_0$ كلها تطابق 0 (مقياس p) تؤدي إلى أنَّ $a_m \not\equiv 0$ (مقياس p) ؛ لذلك، $m = n$، وبناءً على ذلك، $s = n$ مناقض لافتراضنا أنّ $s < n$؛ أي إنّ تحليلنا ليس تافهًا. ♦

لاحظ أنه إذا أخذنا $p = 2$، فإن خاصية أيزنستاين تعطينا أيضًا إثباتًا آخر على أنّ $x^2 - 2$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

16.23 مثال بأخذ $p = 3$، من مبرهنة 15.23 نرى أنّ:

$$25x^5 - 9x^4 - 3x^2 - 12$$

غير مختزلة على $\mathbb{Q}$. ▲

17.23 نتيجة كثيرة الحدود

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$$

غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ لأي عدد أولي p.

البرهان مرة أخرى باستخدام المبرهنة 11.23 نريد فقط أن نعدّ التحليلات في $\mathbb{Z}[x]$، فقد أشرنا بعد مبرهنة 5.22، إلى أنَّ إثباتها حقيقةً يبيّن أنّ تشاكلات التعويض يمكن استخدامها فقط في الحلقات الإبدالية، ونريد هنا أن نستخدم التشاكل التعويضي $\phi_{x+1} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$. من الطبيعي لنا أن نرمز لـ $\phi_{x+1}(f(x))$ بـ $f(x+1)$ لـ $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. ليكن

$$g(x) = \Phi_p(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1)-1} = \frac{x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \ldots + px}{x}$$

معامل x^{p-r} لـ $0 < r < p$ هو المعامل الثنائي الحد $p!/[r!(p-r)!]$، وهو قابل للقسمة على p؛ لأن p يقسم $p!$، بينما لا يقسم $r!$ أو $(p-r)!$ عندما $0 < r < p$؛ لذلك:

$$g(x) = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \ldots + p$$

تحقق خاصية أيزنستاين للعدد الأولي p، وبهذا فهي غير مختزلة على $\mathbb{Q}$، لكن إذا كان:

$\Phi_p(x) = h(x)r(x)$ هو تحليل غير بدهي لـ $\Phi_p(x)$ في $\mathbb{Z}[x]$، فإنّ:

$$\Phi_p(x+1) = g(x) = h(x+1)r(x+1)$$

سيعطي تحليلًا غير بدهي لـ $g(x)$ في $\mathbb{Z}[x]$؛ لذلك $\Phi_p(x)$ يجب أن تكون غير مختزلة على $\mathbb{Q}$. ♦

كثيرة الحدود $\Phi_p(x)$ في النتيجة 17.23 تسمى **كثيرة الحدود الدورية من الرتبة p.**

وحدانية التحليل في $F[x]$.

كثيرات الحدود في $F[x]$ يمكن أن تتحلل إلى حاصل ضرب كثيرات حدود غير مختزلة في $F[x]$ بطريقة جوهرية فريدة. لـ $f(x), g(x) \in F[x]$ نقول: إنّ $g(x)$ **يقسم** $f(x)$ **في** $F[x]$، إذا وجد $q(x) \in F[x]$، بحيث $f(x)= g(x)q(x)$.

لاحظ التشابه بين المبرهنة الآتية والخاصية (1) لـ $\mathbb{Z}$ المؤطرة، التي جاءت بعد مثال9.6.

18.23 مبرهنة لتكن $p(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$، إذا كان $p(x)$ يقسم $r(x)s(x)$ لـ $r(x), s(x) \in F[x]$، فإنه إما $p(x)$ يقسم $r(x)$ أو $p(x)$ يقسم $s(x)$.

البرهان سنرجئ برهان هذه المبرهنة إلى الفصل 27 (انظر المبرهنة 27.27). ♦

19.23 نتيجة إذا كانت $p(x)$ غير مختزلة في $F[x]$ و$p(x)$ يقسم حاصل الضرب $r_1(x) \cdots r_n(x)$ لـ $r_i(x) \in F[x]$، فإنّ $p(x)$ يقسم $r_i(x)$ على الأقل لـ i واحدة.

البرهان نصل إلى النتيجة باستخدام الاستقراء الرياضي، ومن المبرهنة 18.23. ♦

مبرهنة 20.23 إذا كان F حقلًا، فإنّ كل كثيرة حدود غير ثابتة $f(x)\in F[x]$ يمكنها أن تتحلل في $F[x]$ إلى حاصل ضرب كثيرات حدود غير مختزلة، إذ إنّ كثيرات الحدود غير المختزلة هذه وحيدة، عدا الترتيب والضرب بعناصر وحدة (أي ثابت غير صفري) في F.

البرهان لتكن $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود غير ثابتة، فإذا كانت $f(x)$ اختزالية، فإنّ $f(x) = g(x)h(x)$، حيث رتبة $g(x)$ ورتبة $h(x)$ كلتاهما أقل من رتبة $f(x)$.

إذا كان كلا $g(x)$ و$h(x)$ غير مختزلة، نتوقف هنا، وإلاّ، على الأقل أحدهما يتحلل إلى كثيرات حدود من درجات أقل، وبالاستمرار في العمل نصل إلى التحليل:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)...p_r(x)،$$

حيث $p_i(x)$ غير مختزلة لـ $i= 1, 2, \dots , r$.

بقي علينا أن نثبت الوحدانية، افترض أنّ:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)...p_r(x) = q_1(x)q_2(x)....q_s(x)$$

هما تحليلان لـ $f(x)$ إلى كثيرات حدود غير مختزلة، فإنه باستخدام النتيجة 19.23، $p_1(x)$ يقسم بعض $q_j(x)$، ولنفترض أنه $q_1(x)$؛ لأنّ $q_1(x)$ غير مختزلة، فإنّ

$$q_1(x) = u_1p_1(x)$$

حيث $u_1 \neq 0$، لكن u_1 في F، ولهذا هو عنصر وحدة، وبتعويض $u_1p_1(x)$ بدلاً من $q_1(x)$ وبالحذف، نحصل على:

$$p_2(x)...p_r(\mathrm{X}) = u_1q_2(x)....q_s(x)$$

بأسلوب مشابه، قل: $q_2(x)= u_2p_2(x)$؛ لذلك،

$$p_3(x)...p_r(x) = u_1u_2q_3(x)...q_s(x).$$

وبالاستمرار بهذا النمط نصل فعليًّا إلى:

$$1 = u_1u_2..u_rq_{r+1}(x)...q_s(x)$$

هذا فقط ممكن إذا كان $s = r$؛ لذلك، المعادلة هي فعليًّا $u_1 u_2 \ldots u_r = 1$.

وهكذا، فإنّ العوامل غير المختزلة $p_i(x)$ و $q_j(x)$ هي نفسها، عدا احتمالية الترتيب وعوامل عناصر وحدة من F. ♦

21.23 مثال في المثال 4.23 تحليل لـ $x^4 + 3x^3 + 2x + 4$ إلى عواملها في $\mathbb{Z}_5[x]$ هو $(x - 1)^3(x+1)$، إذ إنّ هذه العوامل غير المختزلة في $\mathbb{Z}_5[x]$ وحيدة فقط لعناصر الوحدة في $\mathbb{Z}_5[x]$، أي للثوابت غير الصفرية في $\mathbb{Z}_5$. على سبيل المثال: $(x-1)^3(x+1) = (x-1)^2(2x-2)(3x+3)$ ▲

■ تمارين 23

حسابات

في التمارين 1 إلى 4، أوجد $q(x)$ و $r(x)$ كما وُصفتا في خوارزمية القسمة، بحيث:

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$، حيث $r(x) = 0$، أو درجتها أقل من درجة $g(x)$.

1. $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 + 2x - 3$ في $\mathbb{Z}_7[x]$.

2. $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$ و $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$ في $\mathbb{Z}_7[x]$.

3. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x - 5$ و $g(x) = 2x + 1$ في $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

4. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2$ و $g(x) = 5x^2 - x + 2$ في $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

في التمارين 5 إلى 8، أوجد مولدات الزمرة الضربية الدورية جميعها لعناصر الوحدة في الحقل المنتهي المعطى (راجع النتيجة 16.6).

5. $\mathbb{Z}_5$ **6.** $\mathbb{Z}_7$ **7.** $\mathbb{Z}_{17}$ **8.** $\mathbb{Z}_{23}$

9. كثيرة الحدود $x^4 + 4$ يمكن تحليلها إلى عوامل غير مختزلة في $\mathbb{Z}_5[x]$. أوجد هذا التحليل.

10. كثيرة الحدود $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ يمكن تحليلها إلى عوامل غير مختزلة في $\mathbb{Z}_7[x]$. أوجد هذا التحليل.

11. كثيرة الحدود $2x^3 + 3x^2 - 7x - 5$ يمكن تحليلها إلى عوامل غير مختزلة في $\mathbb{Z}_{11}[x]$. أوجد هذا التحليل.

12. هل $x^3 + 2x + 3$ كثيرة حدود غير مختزلة في $\mathbb{Z}_5[x]$؟ لماذا؟ عبِّر عنها بوصفها حاصل ضرب كثيرات حدود غير مختزلة في $\mathbb{Z}_5[x]$.

13. هل $2x^3 + x^2 + 2x + 2$ كثيرة حدود غير مختزلة في $\mathbb{Z}_5[x]$؟ لماذا؟ عبِّر عنها بوصفها حاصل ضرب كثيرات حدود غير مختزلة في $\mathbb{Z}_5[x]$.

14. بيّن أنّ $f(x) = x^2 + 8x - 2$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$. هل $f(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{R}$؟ على $\mathbb{C}$؟

15. أعد تمرين 14 لـ $g(x) = x^2 + 6x + 12$ بدلاً من $f(x)$.

16. تحقق من أنّ $x^3 + 3x^2 - 8$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

17. تحقق من أنّ $x^4 - 22x^2 + 1$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

في التمارين 18 إلى 21، حدّد فيما إذا كثيرة الحدود في $\mathbb{Z}[x]$ تحقق خاصية أيزنستاين للاختزالية على $\mathbb{Q}$.

18. $x^2 - 12$

19. $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$

20. $4x^{10} - 9x^3 + 24x - 18$

21. $2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30$

22. أوجد أصفار $6x^4 + 17x^3 + 7x^2 + x - 10$ في $\mathbb{Q}$ جميعها. (هذه مسألة جبرية مملّة للمرحلة الثانوية، ويمكن أن تستخدم القليل من الهندسة التحليلية وعلم التفاضل والتكامل لرسم الدالة، أو استخدم طريقة نيوتن لترى أفضل المرشحين ليكونوا أصفارًا).

مفاهيم

في التمرينين 23 و24، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

23. كثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$ غير مختزلة على الحقل F، إذا وفقط إذا كان $f(x) \neq g(x)h(x)$ لأي كثيرتي حدود $g(x)$, $h(x) \in F[x]$.

24. كثيرة الحدود غير الثابتة $f(x) \in F[x]$ غير مختزلة على الحقل F، إذا وفقط إذا كان أي تحليل لها في $F[x]$، أحد العوامل في F.

25. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. $x-2$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

________ ب. $3x - 6$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

________ جـ. $x^2 - 3$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

________ د. $x^2 + 3$ غير مختزلة على $\mathbb{Z}_7$.

________ هـ . إذا كان F حقل، فإن عناصر الوحدة في $F[x]$ هي بالضبط العناصر غير الصفرية في $F[x]$.

________ و. اذا كان F حقل، فإن عناصر الوحدة في $F[x]$ هي بالضبط العناصر غير الصفرية في F.

________ ز. كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة n، بحيث معاملاتها من الحقل F، يمكن أن يكون لها على الأكثر n من الأصفار في أي حقل E، حيث $F \leq E$.

________ حـ. كل كثيرة حدود من الدرجة 1 في $F[x]$ لها على الأقل صفر واحد في الحقل F.

________ ط. كل كثيرة حدود في $F[x]$ يمكن أن يكون لها على الأكثر عدد منتهٍ من الأصفار في الحقل F.

26. أوجد الأعداد الأولية p كلها، بحيث $x + 2$ أحد عومل $x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ في $\mathbb{Z}_p[x]$.

في التمارين 27 إلى 30، أوجد كثيرات الحدود غير المختزلة كلها من الدرجة المبينة في الحقل المعطى.

27. درجة 2 في $\mathbb{Z}_2[x]$.   **28**. درجة 3 في $\mathbb{Z}_2[x]$.

29. درجة 2 في $\mathbb{Z}_3[x]$.   **30**. درجة 3 في $\mathbb{Z}_3[x]$.

31. أوجد عدد كثيرات الحدود التربيعية غير المختزلة في $\mathbb{Z}_p[x]$، حيث p عدد أولي. [مساعدة: أوجد عدد كثيرات الحدود المختزلة التي صيغتها $x^2 + ax + b$، ثمّ عدد التربيعيات المختزلة، ثم اطرح هذا من العدد الكلي للتربيعيات].

براهين مختصرة

32. أعطِ برهانًا مختصرًا للنتيجة 5.23.

33. أعطِ برهانًا مختصرًا للنتيجة 6.23.

براهين

34. بيّن أنه لأيّ عدد أولي p، كثيرة الحدود $x^p + a$ في $\mathbb{Z}_p[x]$ مختزلة، لأي $a \in \mathbb{Z}_p$.

35. إذا كان F حقلًا، و$a \neq 0$ صفر لـ $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ في $F[x]$، فبيِّن أنّ $1/a$ صفر لـ $a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0x^n$.

36. (مبرهنة الباقي): لتكن $f(x) \in F[x]$، حيث F حقل، ولتكن $a \in F$. بيِّن أنّ الباقي $r(x)$ عندما تقسم $f(x)$ على $x - \alpha$، طبقًا لخوارزمية القسمة، هو $f(a)$.

37. لتكن $\sigma_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ التشاكل الطبيعي المعطى بـ ($\sigma_m(a) =$ باقي قسمة a على m) لـ $a \in \mathbb{Z}$.

أ. بيّن أنّ $\overline{\sigma_m} : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m[x]$ المعطى بـ

$$\overline{\sigma_m}(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = \sigma(a_0) + \sigma_m(a_1)x + \dots + \sigma_m(a_n)x^n$$

هو تشاكل غامر من $\mathbb{Z}[x]$ إلى $\mathbb{Z}_m[x]$.

ب. بيّن أنّه إذا كانت $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ و $\overline{\sigma_m}(f(x))$، كلتاهما من الدرجة n و $\overline{\sigma_m}(f(x))$ لا يتحلل في $\mathbb{Z}_m[x]$ إلى حاصل ضرب كثيرتي حدود من درجات أقل من n، فإن $f(x)$ غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$.

جـ. استخدم الجزء (ب) لتبين أنّ $x^3 + 17x + 36$ غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$. [مساعدة: جرب عددًا أوليًّا m الذي يبسط المعاملات].

أمثلة غير إبدالية Noncommutative Examples [1]

المثال الوحيد الذي قدّمناه سابقًا على حلقة غير إبدالية، هو: الحلقة $M_n(F)$ وتحوي المصفوفات كلها من الدرجة $n \times n$، بحيث المدخلات من الحقل F، وعلى الأغلب لن نفعل شيئًا للحلقات غير الإبدالية وحقول القسمة؛ لنبين أنه توجد حلقات غير إبدالية أخرى مهمّة وبصورة طبيعية جدًّا في الجبر، سنقدم أمثلة مختلفة على هذه الحلقات.

حلقات التشاكل الداخلية

لتكن A أيّ زمرة إبدالية، حيث يسمّى التشاكل من A إلى نفسها **تشاكلًا داخليًّا (endomorphism) على** A، ولتكن مجموعة التشاكلات الداخلية على A كلها $\mathrm{End}(A)$؛ لأنّ تركيب تشاكلين من A إلى نفسها هو مرة أخرى تشاكل، ونعرّف الضرب على $\mathrm{End}(A)$ باستخدام دالة التركيب، وبهذا يكون الضرب تجميعيًّا.

لتعريف الجمع، خذ $\phi, \psi \in \mathrm{End}(A)$، علينا أن نصف القيمة لـ $(\phi + \psi)$ على كل $a \in A$. عرّف

$$(\phi+\psi)(a)=\phi(a)+\psi(a)$$

لأن:

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(a+b)&=\phi(a+b)+\psi(a+b)\\&=[\phi(a)+\phi(b)]+[\psi(a)+\psi(b)]\\&=[\phi(a)+\psi(a)]+[\phi(b)+\psi(b)]\\&=(\phi+\psi)(a)+(\phi+\psi)(b)\end{aligned}$$

نرى أنّ $\phi + \psi$ هي مرة أخرى موجودة في $\mathrm{End}(A)$.

لأنّ A إبدالية، عندنا:

$$(\phi+\psi)(a)=\phi(a)+\psi(a)=\psi(a)+\phi(a)=(\psi+\phi)(a)$$

لكل $a \in A$؛ لذلك، $\phi + \psi = \psi + \phi$ والجمع على $\mathrm{End}(A)$ إبدالي، ونحصل على الخاصية التجميعية على الجمع من:

[1] لن يستخدم هذا الفصل في بقية الكتاب.

$$\begin{aligned}[\phi+(\psi+\theta)](a)&=\phi(a)+[\psi+\theta(a)]\\&=\phi(a)+\left[\psi(a)+\theta(a)\right]\\&=[\phi(a)+\psi(a)]+\theta(a)\\&=(\phi+\psi)(a)+\theta(a)\\&=\left[(\phi+\psi)+\theta\right](a).\end{aligned}$$

إذا كان e العنصر المحايد لعملية الجمع على A، فإن التشاكل 0 المعرف بـ

$$0(a)=\ e$$

لكل $a\in A$ يكون العنصر المحايد لعملية الجمع في End(A). أخيرًا، لـ

$$\phi\in \mathrm{End(A)},$$

$-\phi$ معرف بـ

$$(-\phi)(a)=-\phi(a)$$

موجود في $\mathrm{End}(A)$؛ لأنّ:

$$\begin{aligned}(-\phi)(a+b)&=-\phi(a+b)=-\left[\phi(a)+\phi(b)\right]\\&=-\phi(a)-\phi(b)=(-\phi)(a)+(-\phi)(b)\end{aligned}$$

و$\phi+(-\phi)=0$ ؛ لذلك: $\langle \mathrm{End}\ (A), +\rangle$ زمرة إبدالية.

لاحظ أنّنا لم نستخدم حقيقة أنّ دوالنا هي تشاكلات إلّا لنبيّن أنّ $\psi+\phi$ و ϕ- هي أيضًا تشاكلات؛ لذلك، المجموعة A^A المكونة من الدوال جميعها من A إلى A هي زمرة إبدالية تحت تعريف الجمع نفسه بالضبط، وبالطبع، التركيب الدالي يعطى أيضًا عملية تجميعية جميلة على الضرب في A^A، ومع ذلك، نحتاج حقيقة إلى أن هذه الدوال في $\mathrm{End}(A)$ هي تشاكلات الآن؛ لإثبات قانون التوزيع من اليسار على $\mathrm{End}(A)$، فباستثناء قانون التوزيع من اليسار هذا، فإن $\langle A^A,+,.\rangle$ تحقق مسلمات الحلقة جميعها، لتكن ψ و ϕ و θ في $\mathrm{End}(A)$، ولتكن $a\in A$، فإنّ:

$$(\theta(\phi+\psi))(a)=\theta((\phi+\psi)(a))=\theta(\phi(a)+\psi(a))$$

لأنّ θ تشاكل

$$\begin{aligned}\theta(\phi(a)+\psi(a))&=\theta(\phi(a))+\theta(\psi(a))\\&=(\theta\phi)(a)+(\theta\psi)(a)\\&=(\theta\phi+\theta\psi)(a).\end{aligned}$$

لذلك: $\theta(\phi+\psi) = \theta\phi + \theta\psi$، أمّا قانون التوزيع من اليمين، فلا يمثل أي مشكلة، حتى في A^A، ويأتي من:

$$((\psi+\theta)\phi)(a) = (\psi+\theta)(\phi(a)) = \psi(\phi(a)) + \theta(\phi(a))$$
$$= (\psi\phi)(a) + (\theta\phi)(a) = (\psi\phi + \theta\phi)(a).$$

وبذلك نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية:

1.24 مبرهنة المجموعة $\mathrm{End}(A)$ من التشاكلات الداخلية على الزمرة الإبدالية A تشكل حلقة بالنسبة إلى جمع التشاكلات وضربها (التركيب الدالي).

مرة أخرى، لنبين الصلة الوثيقة في هذا الفصل، علينا أن نقدم مثالاً موضحًا على أن $End\ (A)$ ليست بالضرورة إبدالية؛ لأنّ التركيب الدالي ليس على العموم إبداليًّا، وهذا من الممكن توقعه، لكن $End\ (A)$ ربما تكون إبدالية في بعض الحالات، بالفعل، فتمرين 15 يُقرّ بأنّ $\mathrm{End}\left(\langle \mathbb{Z}, +\rangle\right)$ إبدالية.

2.24 مثال لتكن الزمرة الإبدالية $\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +\rangle$ التي نوقشت في الفصل 11. من البدهي أن تتحقق من أنّ φ وψ عنصران في $\mathrm{End}\ \langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +\rangle$، والمعرفان بـ

$$\phi\left((m,\ n)\right) = (m+n, 0) \text{ و } \psi\left((m,\ n)\right) = (0,\ n)$$

لاحظ أنّ ϕ ترسل كل شيء بصورة غامرة إلى العامل الأول لـ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، و ψ تسحق العامل الأول؛ لذلك:

$$(\psi\phi)(m,n) = \psi(m+n, 0) = (0, 0)$$

بينما :

$$(\phi\psi)(m,n) = \phi(0,n) = (n, 0)$$

لذلك، $\phi\psi \neq \psi\phi$. ▲

3.24 مثال ليكن F حقلًا مميزه صفر، ولتكن $\langle F[x], +\rangle$ الزمرة الجمعية للحلقة $F[x]$ من كثيرات الحدود التي معاملاتها من F، ولهذا المثال دعنا نرمز للزمرة الجمعية بـ $F[x]$ لتبسيط المفهوم، إذ يمكننا أن نعدّ $\mathrm{End}\ (\mathrm{F}[x])$. أحد عناصر $\mathrm{End}\ (F[x])$ يؤثر في أي كثيرة حدود في $F[x]$، عن طريق ضربها بـ x، وليكن هذا التشاكل الداخلي هو X؛ لذلك،

$$X(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1}$$

عنصر آخر من $\text{End}\,(F[x])$ هو الاشتقاق الشكلي بالنسبة إلى x (الصيغة المشهورة "مشتقة حاصل الجمع هو حاصل جمع المشتقات" تضمن أنَّ الاشتقاق تشاكل داخلي على $F[x]$) ليكن Y هذا التشاكل، وبهذا

$$Y\ (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

يطلب منا تمرين 17 أن نبين أنّ $YX - XY = 1$، حيث 1 العنصر المحايد (الدالة المحايدة) في $End\ (F[x])$؛ لذلك، $YX \neq XY$، ضرب كثيرات الحدود في $F[x]$ في أيٍ عنصر من F يعطينا أيضًا عنصرًا في $End\ (F[x])$، الحلقة الجزئية من $End\ (F[x])$ المولَّدة من X و Y والضرب بعناصر من F هي جبر وايل **(Weyl algebra)**، وهي مهمة في ميكانيكا الكم. ▲

حلقات وجبريات الزمر

لتكن $G = \{g_i \mid i \in I\}$ زمرة ضربية، ولتكن R حلقة إبدالية فيها العنصر المحايد غير الصفري، ولتكن RG مجموعة أشكال الجمع

$$\sum_{i \in I} a_i g_i$$

لـ $a_i \in R$, $g_i \in G$، حيث a_i كلها عدا عدد منتهٍ منها صفر. عرِّف حاصل جمع عنصرين من RG بـ

$$\left(\sum_{i \in I} a_i g_i\right) + \left(\sum_{i \in I} b_i g_i\right) = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) g_i$$

تحقق من أنّ $(a_i + b_i) = 0$ عدا عدد منتهٍ من المؤشرات i؛ لذلك، $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) g_i$ في RG، ومن البدهي أنّ $\langle RG, + \rangle$ زمرة إبدالية، حيث العنصر المحايد للجمع $\sum_{i \in I} 0 g_i$.

ضرب عنصر في RG معرف باستخدام الضرب في G و R على النحو الآتي:

$$\left(\sum_{i \in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i \in I} b_i g_i\right) = \sum_{i \in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k\right) g_i$$

ببساطة نوزِّع شكليًّا المجموع $\sum_{i \in I} a_i g_i$ على المجموع $\sum_{i \in I} b_i g_i$، ونعيد تسمية الحدّ $a_j g_j b_k g_k$ بـ $a_j b_k g_i$ حيث $g_j g_k = g_i$ في G؛ لأن a_i و b_i كلها 0 عدا عدد منتهٍ من i،

المجموع $\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k$ يحوي فقط عددًا منتهيًا لمجاميع غير صفرية $a_j b_k \in R$، وبذلك يمكن رؤيتها بوصفها عنصرًا في R، ومرة أخرة عدد منتهٍ من المجاميع $\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k$ غير صفرية،

بهذا يكون الجمع مغلقًا على RG.

قانونا التوزيع يأتيان مباشرة من تعريف الجمع والطريقة الاعتيادية، التي نستخدم بها العملية التوزيعية لتعريف الضرب، بالنسبة إلى العملية التجميعية على الضرب:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)+\left[\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)\right] &= \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left[\sum_{i\in I}\left(\sum_{gjgk=gi} b_j c_k\right) g_i\right] \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_h g_j g_k = g_i} a_h b_j c_k\right) g_i \\
&= \left[\sum_{i\in I}\left(\sum_{g_h g_j = g_i} a_h b_j\right) g_i\right]\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right) \\
&= \left[\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\right]\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)
\end{aligned}$$

بهذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4.24 إذا كانت G أيّ زمرة ضربية، وR حلقة إبدالية فيها العنصر المحايد غير الصفري، فإنّ $\langle RG, +, .\rangle$ حلقة.

بالنسبة إلى أيّ $g \in G$، عندنا العنصر $1g$ في RG، وإذا عرّفنا (أعدنا تسمية) $1g$ بـ g، نرى أنّ $\langle RG, .\rangle$ يمكن أن نعدّها تحوي G بصورة طبيعية بوصفها نظامًا جزئيًّا ضربيًّا؛ لذلك، إذا كانت G ليست إبدالية، فإن RG حلقة غير إبدالية.

تعريف 5.24 الحلقة RG المعرفة في الأعلى هي حلقة الزمرة **(group ring)** لـ G **على** R. إذا كان F حقلًا، فإن FG جبر الزمرة **(group algebra)** لـG **على** F. ■

6.24 مثال لنقدم جداول الجمع والضرب لجبر الزمرة $\mathbb{Z}_2G$، حيث $G = \{e, a\}$ دورية من الرتبة 2، فعناصر Z_2G هي:

$$1e + 1a \text{ و } 1e + 0a \text{ ،}0e + 1a \text{ ،}0e + 0a$$

إذا رمزنا لهذه العناصر بطريقة طبيعية واضحة بـ

0، a، e، و $e + a$،

+	0	a	e	$e+a$
0	0	a	e	$e+a$
a	a	0	$e+a$	e
e	e	$e+a$	0	a
$e+a$	$e+a$	e	a	0

الجدول 7.24

	0	a	e	$e+a$
0	0	0	0	0
a	0	e	a	$e+a$
e	0	a	e	$e+a$
$e+a$	0	$e+a$	$e+a$	0

الجدول 8.24

على الترتيب، نحصل على الجدولين24. 7 و 8.24، على سبيل المثال: لترى أنّ

$(e + a)(e + a) = 0$، لدينا:

$$(1e + 1a)(1e + 1a) = (1 + 1)e + (1 + 1)a = 0e + 0a$$

هذا المثال يبين أنّ جبر الزمرة ربما فيه قواسم لـ 0، وبصورة فعلية، فإنّ هذه هي الحالة دائمًا. ▲

المرباعيات

لم نقدم مثالًا على حلقة قسمة غير إبدالية لغاية الآن، والمرباعيات لهاميلتون (Hamilton) مثال قياسي على حقل تخالفي قطعي.

■ **نبذة تاريخية**

اكتشف السيرويليام روان هاملتون (William Rowan Hamilton 1805–1865) المرباعيات عام 1843م، عندما كان يبحث عن طريقة لضرب ثلاثيات العدد (متجهات في $\mathbb{R}^3$).

قبل ست سنوات طوّر الأعداد المركبة بصورة مجردة بوصفها أزواجًا مرتبة (a, b) من الأعداد الحقيقية، حيث الجمع $(a, b) + (a' , b') = (a + a', b + b')$، والضرب $(a, b) . (a' , b') = (aa' - bb', ab' + a' b)$؛ بعدها بحث عن ضرب مشابه لثلاثة متجهات، بحيث يكون تجميعيًّا، ويكون طول المتجه الناتج عن حاصل الضرب هو حاصل ضرب أطوال العوامل، وبعد محاولات فاشلة عدة لضرب متجهات من الشكل $a + bi + cj$ (حيث $1, i, j$ متعامدة بصورة تبادلية)، وبينما كان يسير على طول القنال الملكي في دبلن، أدرك في 16 أكتوبر عام 1843م أنه محتاج إلى "رمز تخيلي" جديد k يكون عموديًّا على بقية العناصر الثلاث، فلم يستطع "أن يقاوم الاندفاع... ليكتب بسكين على حجر من جسر بروغام" الصيغ الأساسية المعرفة في صفحة 225 لضرب هذه المرباعيات.

كانت المرباعيات أول مثال معلوم عن حقل تخالفي قطعي، بعدها اكتُشفت أمثلة أخرى بصورة تتابعية، وقد لوحظ أنه ليس أي منها منتهيًّا، وعام 1909م قدّم جوزف هنري ماكلاجان ويدربيرن Joseph Henry

(MaclaganWedderburn 1882–1948) ومن بعده قدم مدرس في جامعة برينستون، أول إثبات للمبرهنة 10.24.

لتكن المجموعة $\mathbb{H}$ لهاميلتون هي $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. الآن، $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, + \rangle$ هي زمرة بالنسبة إلى عملية الجمع على المركبات؛ الضرب المباشر لـ $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع مع نفسها أربع مرات، وهذا يعطي عملية الجمع على $\mathbb{H}$، لنعيد تسمية عناصر محددة من $\mathbb{H}$.

سنجعل:

$$1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0)$$

$$j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1)$$

إضافة إلى ذلك، نوافق على أن نجعل:

$$a_1 = (a_1, 0, 0, 0), \quad a_2 i = (0, a_2, 0, 0).$$

$$a_3 j = (0, 0, a_3, 0), \quad a_4 k = (0, 0, 0, a_4)$$

من خلال تعريفنا للجمع، عندنا:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$$

لذلك:

$$(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) + (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)$$
$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3) j + (a_4 + b_4)k$$

ولتعريف الضرب على $\mathbb{H}$، نبدأ بتعريف

$1a = a1 = a$ لـ $a \in \mathbb{H}$،

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$،

$i j = k$، $jk = i$، $ki = j$، $ji = -k$، $k j = -i$، و $ik = -j$

لاحظ التشابه مع ما يُسمّى الضرب التصالبي على المتجهات، فهذه الصيغ سهلة التذكر إذا فكرنا في المتتالية :

i, j, k, i, j, k.

الضرب من اليسار إلى اليمين لعنصرين متتاليين هو العنصر الآتي من اليمين، والضرب من اليمين إلى اليسار لعنصرين متاليين هو سالب العنصر الآتي من اليسار، بعدها نعرّف الضرب كما يجب ليحقق قانوني التوزيع، وهو:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)&(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)\\ &= (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)i\\ &\quad + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) j\\ &\quad + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)k.\end{aligned}$$

يبين تمرين 19 أنّ المرباعيات تماثل حلقة جزئية من $M_2(\mathbb{C})$؛ لذلك، فالضرب تجميعي.

لأن $i j = k$ و $ji = -k$، نرى أنّ الضرب ليس إبداليًا؛ ولذلك، $\mathbb{H}$ بالتأكيد ليس حقلاً، وبالعودة إلى توافر المعكوس الضربي، ليكن $a = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$، حيث ليس كل $a_i = 0$، فالحساب يبين أنَّ

$$(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k) = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + a_4^{\,2}$$

إذا افترضنا

$$\bar{a} = a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k \text{ و } |a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

نرى أنَّ

$$\frac{\bar{a}}{|a|^2} = \frac{a_1}{|a|^2} - \left(\frac{a_2}{|a|^2}\right)i - \left(\frac{a_3}{|a|^2}\right)j - \left(\frac{a_4}{|a|^2}\right)k$$

المعكوس الضربي لـ a. وبذلك نعدّ أنفسنا قد وضّحنا المبرهنة الآتية:

9.24 مبرهنة المرباعيات $\mathbb{H}$ تشكل حقلًا تخالفيًّا قطعيًّا بالنسبة إلى الجمع والضرب.

لاحظ أنّ $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ هي زمرة من الرتبة 8 تحت الضرب الرباعي.

هذه الزمرة تتولد من i و j، حيث :

$$ji = i^3 j \text{ ،} j^2 = i^2 \text{ ،} i^4 = 1$$

ووجد حقول تخالفية منتهية قطعًا، وهذا هو محتوى المبرهنة الشهيرة لويبدربيرن (Wedder-burn) التي سنذكرها من غير برهان.

10.24 مبرهنة (مبرهنة ويدربيرن) كل حلقة قسمة منتهية حقل.

البرهان انظر آرتن، نيسبت وثرال [24] لإثبات مبرهنة ويدربيرن. ◆

■ تمارين 24

حسابات

في التمارين 1 إلى 3، لتكن $G = \{e, a, b\}$ زمرة دورية من الرتبة 3، حيث العنصر المحايد e. اكتب العنصر في جبر الزمرة $\mathbb{Z}_5G$ على صورة:

$$re + sa + tb \text{ لـ } r, s, t \in \mathbb{Z}_5$$

1. $(2e + 3a + 0b) + (4e + 2a + 3b)$

2. $(2e + 3a + 0b)(4e + 2a + 3b)$

3. $(3e + 3a + 3b)^4$

في التمارين 4 إلى 7، اكتب العنصر في $\mathbb{H}$ على صورة $a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$ لـ $a_i \in \mathbb{R}$.

4. $(i + 3j)(4 + 2j - k)$

5. $i^2j^3kji^5$

6. $(i + j)^{-1}$

7. $[(1 + 3i)(4j + 3k)]^{-1}$

8. بالرجوع إلى الزمرة S_3، المعطاة في مثال 7.8 احسب حاصل ضرب:

$$(0\rho_0 + 1\rho_1 + 0\rho_2 + 0\mu_1 + 1\mu_2 + 1\mu_3)(1\rho_0 + 1\rho_1 + 0\rho_2 + 1\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3)$$

في جبر الزمرة $\mathbb{Z}_2S_3$.

9. أوجد مركز الزمرة $\langle \mathbb{H}^*, . \rangle$، حيث $\mathbb{H}^*$ هي مجموعة المرباعيات غير الصفرية.

مفاهيم

10. أوجد مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{H}$ مختلفتين عن $\mathbb{C}$ وعن بعضهما، كل منهما حقل مماثل لـ $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الجمع والضرب المشتقين من $\mathbb{H}$.

11. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_______ أ. لا يوجد قواسم لـ 0 في $M_n(F)$ لأيّ n ولأيّ حقل F.

_______ ب. كل عنصر غير صفري في $M_2(\mathbb{Z}_2)$ عنصر وحدة.

_______ جـ. $\mathrm{End}(A)$ دائمًا حلقة فيها العنصر المحايد $\neq 0$ لأي زمر إبدالية A.

_______ د. $\mathrm{End}(A)$ ليست أبدًا حلقة فيها العنصر المحايد $\neq 0$ لأي زمرة إبدالية A.

________ هـ. المجموعة الجزئية $\text{Iso}(A)$ من $\text{End}(A)$ ـ تحوي التماثلات الغامرة من A إلى A ـ تشكل حلقة جزئية من $\text{End}(A)$ لأيّ زمرة إبدالية A.

________ و. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ R تماثل $\langle \mathbb{Z}, +, . \rangle$ لأيّ حلقة إبدالية R فيها العنصر المحايد.

________ ز. حلقة الزمرة RG للزمرة الإبدالية G، هي حلقة إبدالية لأي حلقة إبدالية R فيها العنصر المحايد.

________ ح. تشكل المرباعيات حقلًا.

________ ط. $\langle \mathbb{H}^*, . \rangle$ زمرة، حيث $\mathbb{H}^*$ مجموعة المرباعيات غير الصفرية.

________ ي. ليست أي حلقة جزئية من $\mathbb{H}$ حقلًا.

12. وضّح كلاً مما يأتي بمثال:

أ. كثيرة حدود من الدرجة n، حيث معاملاتها من حقل تخالفي قطعي، يمكن أن يكون لها أكثر من n من الأصفار في الحقل التخالفي.

ب. زمرة جزئية ضربية منتهية من حقل تخالفي قطعي، ممكن ألا تكون دورية.

براهين

13. لتكن ϕ العنصر في $\text{End}\left(\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +\rangle\right)$ المعطى في المثال 2.24، الذي بيَّن أنّ ϕ قاسم لـ 0 من اليمين. بيِّن أنّ ϕ أيضًا قاسم لـ 0 من اليسار.

14. بيِّن أنّ $M_2(F)$ فيها على الأقل ستة عناصر وحدة لأي حقل F. أوجد عناصر الوحدة هذه. [مساعدة: في F على الأقل عنصران: 0 و 1].

15. بيِّن أنّ $\text{End}\left(\langle \mathbb{Z}, +\rangle\right)$ تماثل طبيعي (قانوني) $\langle \mathbb{Z}, +, . \rangle$، و $\text{End}\left(\langle \mathbb{Z}_n, +\rangle\right)$ تماثل طبيعي $\left(\langle \mathbb{Z}_n, +, . \rangle\right)$.

16. بيِّن أنّ $\text{End}(\langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, + \rangle)$ لا تماثل $\langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, . \rangle$.

17. بالعودة إلى مثال 3.24، بيِّن أنّ $YX - XY = 1$.

18. إذا كانت $G = \{e\}$ زمرة من عنصر واحد، بيِّن أنّ RG تُماثل R لأي حلقة R.

19. توجد مصفوفة $K \in M_2(\mathbb{C})$، بحيث $\phi : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ المعرفة بـ

$$\phi(a+bi+ci+dk) = a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix} + dk$$

لكل $a, b, c, d \in \mathbb{R}$، تعطي تماثلًا من $\mathbb{H}$ إلى $\phi[\mathbb{H}]$.

أ. أوجد المصفوفة K.

ب. ما المرباعيات الثمانية التي يجب فحصها، لنرى أنّ ϕ هي حقيقةً تشاكل؟

جـ. ما الشيء الآخر الذي يجب فحصه، لنبيِّن أنّ ϕ تعطي تماثلًا من $\mathbb{H}$ إلى $\phi[\mathbb{H}]$؟

الحلقات والحقول المرتبة[3] Orderd Rings and Fields

نحن خبراء بعلاقة التباين > على المجموعة $\mathbb{R}$ وعلى أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

(نذكرك بأنّ العلاقات نوقشت في الفصل 0، انظر تعريف 7.0). نلاحظ أنّ > تعطينا ترتيبًا على الأعداد الحقيقية، وفي هذا الفصل، سندرس الترتيبات على الحلقات والحقول، حيث سنفترض خلاله أنّ الحلقات التي سنناقشها فيها العنصر المحايد غير الصفري 1.

في الأعداد الحقيقية، $a<b$، إذا وفقط إذا كان $b-a$ موجبًا؛ لذلك، فإنّ علاقة الترتيب > على $\mathbb{R}$ مفهومة تمامًا، إذا علمنا ما الأعداد الموجبة.

سنستخدم فكرة وصف عناصر محددة بالموجبة لتعريف مفهوم الحلقة المرتبة.

1.25 تعريف **الحلقة المرتبة (ordered ring)** هي حلقة R مع مجموعة جزئية ليست خالية P من R وتحقق الخاصيتين الآتيتين:

إغلاق (closure) لكل $a, b \in P$، كلا $a+b$ و ab في P.

تثليث (trichotomy) لأي $a \in R$، واحد وفقط واحد من هذه الأمور يتحقق:

$a \in P$، $a = 0$، $-a \in P$.

تسمّى عناصر P "موجبة" **(positive)**. ■

من السهولة أن ترى أنه إذا كانت R حلقة مرتبة، حيث المجموعة P هي العناصر الموجبة، و S حلقة جزئية من R، فإن $P \cap S$ تحقق متطلبات مجموعة العناصر الموجبة في الحلقة S، وهذا يعطي ترتيبًا على S. (انظر تمرين 26). هذا هو **الترتيب المحدث (induced ordering)** من الترتيب المعطى على R.

نلاحظ من الوهلة الأولى أنّ للحلقات $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ مجموعة العناصر التي نعدّها دائمًا موجبة، يتحقق فيها شرطا الإغلاق والتثليث، سنشير إلى هذا الترتيب المألوف لهذه الحلقات والترتيب المحدث للحلقات الجزئية منها **بالترتيب الطبيعي**، وسنقدم الآن مفهومًا غير مألوف.

2.25 مثال لتكن R حلقة مرتبة والمجموعة P من العناصر الموجبة، هناك طريقان طبيعيان لتعريف الترتيب على حلقة كثيرة الحدود $R[x]$، حيث سنصف مجموعتين محتملتين، P_{low} و P_{high} من العناصر الموجبة، وكثيرة الحدود غير الصفرية في $R[x]$ تكتب على صورة:

---
[3] هذا الفصل لا يستخدم في باقي الكتاب.

$$f(x) = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \ldots + a_n x^n$$

حيث $a_r \neq 0$ و $a_n \neq 0$ لذلك، $a_r\ x^r$ و $a_n x^n$ هما الحدّان غير الصفريين لأقل وأعلى ر تبة على الترتيب، لتكن P_{low} هي مجموعة $f(x)$ كلها، حيث $a_r \in P$، و لتكن P_{high} هي مجموعة $f(x)$ كلها، حيث $a_n \in P$. إن متطلبات الإغلاق والتثليث التي يجب على P_{low} و P_{high} تحقيقها لتعطي ترتيبًا على $R[x]$، تنبع من الوهلة الأولى من الخصائص نفسها على P وتعريف الجمع والضرب في $R[x]$، وبالتطبيق على $\mathbb{Z}[x]$، حيث الترتيب معطًى بـ P_{low}، فكثيرة الحدود

$f(x) = -2x + 3x^4$ ليست موجبة؛ لأن -2 ليس موجبًا في $\mathbb{Z}$، وباستخدام الترتيب المعطى بـ P_{high}، كثيرة الحدود نفسها، ستكون موجبة؛ لأن 3 موجب في $\mathbb{Z}$. ▲

افترض أنّ P هي مجموعة العناصر الموجبة في الحلقة المرتبة R، وليكن a عنصرًا غير صفري من R، فإنه إما a أو $-a$ في P؛ لذلك، باستخدام الإغلاق $a^2 = (-a)^2$ أيضًا في P؛ ولذلك، مربعات العناصر غير الصفرية من R موجبة. بوجه خاص، $1=1^2$ موجب، باستخدام الإغلاق، نرى أنّ $1 + 1 + \cdots + 1$ لأي عدد منته من الجمع دائمًا في P؛ لذلك، ليس صفرًا أبدًا، وعليه، فإنّ الحلقة المرتبة مميزها صفر؛ ولأنّ مربعات العناصر غير الصفرية يجب أن تكون موجبة، نرى أنّ الترتيب الطبيعي على $\mathbb{R}$ هو الترتيب الوحيد الممكن، والأعداد الحقيقية الموجبة هي بالضبط مربعات الأعداد الحقيقية غير الصفرية، وهذه المجموعة لا يمكن توسيعها دون تدمير التثليث؛ ولأن $1+1\ldots+1$ يجب أن تكون موجبة، فإنّ الترتيب الممكن على $\mathbb{Z}$ هو الترتيب الطبيعي أيضًا، فالحلقات المرتبة كلها مميزها صفر؛ لذلك، يمكننا عن طريق إعادة التعريف (التسمية)، أن نعدّ كل حلقة مرتبة تحوي $\mathbb{Z}$ بوصفها حلقة جزئية مرتبة.

إذا كانت a و b عناصر غير صفرية من P، فإنه إما a أو $-a$ في P وإما b أو $-b$ في P، وبوصفها نتيجة منطقية من الإغلاق، فإنه إما ab أو $-ab$ في P، إذ لا يمكن أن يكون ab صفرًا باستخدام التثليث، وعليه، فإنّ الحلقة المرتبة ليست لها قواسم للصفر.

نلخص هذه الاستنتاجات في مبرهنة ونتيجة.

3.25 مبرهنة لتكن R حلقة مرتبة. مربعات العناصر جميعها غير الصفرية في R موجبة، R مميزها 0، ولا توجد فيها قواسم للصفر.

4.25 نتيجة يمكننا أن نعدّ $\mathbb{Z}$ مدخلة في أي حلقة مرتبة R، والترتيب المحدث على $\mathbb{Z}$ من R هو الترتيب الطبيعي على $\mathbb{Z}$، الترتيب الوحيد الممكن على $\mathbb{R}$ هو الترتيب الطبيعي.

توضّح المبرهنة 3.25 أنّ الحقل $\mathbb{C}$ من الأعداد المركبة لا يمكن أن يكون مرتبًا؛ لأن كلًّا من $1=1^2$ و $-1=i^2$ مربعان، وتوضح أيضًا، أنه لا توجد حلقة منتهية يمكن أن تكون مرتبة؛ لأن مميز أي حلقة مرتبة صفر.

المبرهنة القادمة تعرّف العلاقة $<$ في حلقة مرتبة، وتقدم خصائصها .

تعريف $<$ مشتقة من المفهوم الذي ينصّ على أنه في الأعداد الحقيقية، $a<b$ إذا وفقط إذا كان $b-a$ موجبًا، توضّح المبرهنة أيضًا، أنّ الترتيب يمكن تعريفه بدلالة علاقة $<$ ذات الخصائص المذكورة أدناه.

5.25 مبرهنة لتكن R حلقة مرتبة، حيث P مجموعة العناصر الموجبة، لتكن $<$، وتقرأ "أقلّ من"، علاقة على R معرفة بـ $a < b$ إذا وفقط إذا كان $(b - a) \in P$ (1)

لـ R $a, b \in R$. العلاقة $<$ لها الخصائص الآتية لكل $a, b, c \in R$.

التثليث (Trichotomy) واحد وفقط واحد من هذ الأمور تتحقق:

$a < b, a = b, b < a$.

التعدي (Transitivity) إذا كانت $a < b$ و $b < c$، فإن $a < c$.

التواتر (Isotonicity) إذا كانت $b < c$، فإن $a + b < a + c$

وإذا كانت $b < c$ و $0 < a$، فإنّ $ab < ac$ و $ba < ca$.

وبالعكس، إذا أُعْطيت علاقة $<$ على حلقة غير صفرية R تحقق هذه الشروط الثلاثة، فإنّ المجموعة $P = \{x \in R \mid 0 < x\}$ تحقق خاصيتين لمجموعة العناصر الموجبة في تعريف 1.25، والعلاقة $<_P$ المعرفة في الشرط (1) بالنسبة إلى P هي العلاقة $<$ المعطاة.

البرهان لتكن R حلقة مرتبة، حيث P مجموعة العناصر الموجبة، ولتكن $a < b$ تعني $(b - a) \in P$. سنثبت الخصائص الثلاث لـ $<$.

التثليث: لتكن $a,b \in R$، باستخدام خاصية التثليث على P في تعريف 1.25 ومطبقةً على $b-a$، بالضبط واحد من:

$$(b - a) \in P, b - a = 0, (a - b) \in P$$

متحقق: تترجم هذه بدلالة $<$ إلى

$$a < b, a = b, b < a$$

على الترتيب.

التعدي: لتكن $a < b$ و $b < c$، فإنّ $(b - a) \in P$ و $(c - b) \in P$، وباستخدام الإغلاق على P تحت الجمع، يكون لدينا:

$$(b - a) + (c - b) = (c - a) \in P$$

لذلك، $a < c$.

التواتر: لتكن $b < c$، إذن $(c - b) \in P$، وهكذا، فإنّ $(a + c) - (a + b) = (c - b) \in P$ إذن $a + b < a + c$. كذلك، إذا كان $a > 0$، فباستخدام الإغلاق على P، كلّ من $a(c - b)$ $= ac - ab$ و $(c - b)a = ca - ba$ في P، إذن، $ab < ac$ و $ba < ca$.

سنترك الجزء "وبالعكس" من المبرهنة بوصفه تمرينًا سهلًا ومماثلًا. (انظر تمرين 27). ◆

باستعراض المبرهنة 5.25، سنشعر الآن بحرية لاستخدام $>$ لترمز إلى الحلقة مرتبة الرموز $<$، $\leq$ و $\geq$ معرّفة عادة بدلالة $>$ و$=$. أي إنّ

$b > a$ تعني $a < b$، $a \leq b$ تعني إما $a{=}b$ أو $a < b$،

$a \geq b$ تعني إما $b < a$ أو $b{=}a$.

6.25 مثال لتكن R حلقة مرتبة، إنَّه لأمر توضيحي بأن نفكر فيما تعنيه الترتيبات على $R[x]$ المعطاة بـ P_{low} و P_{high} في المثال 2.25 بدلالة العلاقة $>$ في المبرهنة 5.25.

بأخذ P_{low} في الحسبان، نلاحظ أنَّه لأي $a > 0$ في R، $a - x$ موجب إذن، $a > 0$، كذلك، $x = x - 0$ موجبة، إذن، $0 < x$ ؛ لذلك $0 < x < a$ لكل a في R، ولدينا $(x^i - x^j) \in P_{low}$ عندما $i < j$، إذن، $x^j < x^i$ إذ كان $i < j$. وحيدات الحدّ لها الترتيب:

$$0 < \dots x^6 < x^5 < x^4 < x^3 < x^2 < x < a$$

لأي عدد موجب $a \in R$. بأخذ $R = \mathbb{R}$، نرى أنه في هذا الترتيب على $\mathbb{R}[x]$ يوجد عدد لا نهائي من العناصر الموجبة، التي هي أقل من أي عدد حقيقي موجب!

سنترك النقاش المشابه لـ $>$ بالنسبة إلى الترتيب على $R[x]$ المعطى بـ P_{high} إلى تمرين 1. ▲

7.25 تعريف المثال السابق مهم؛ لأنه يقدم ترتيبًا غير أرخميدي، وسنقدم تعريفًا يوضّح هذا المفهوم، تذكر أنه يمكننا أن نعدّ $\mathbb{Z}$ حلقة جزئية من أيّ حلقة مرتبة.

الترتيب على الحلقة R الذي له هذه الخاصية:

لأي عنصرين موجبين a و b في R، يوجد عدد صحيح موجب n، بحيث $na > b$ هو ترتيب أرخميدي (Archimedian ordering). ■

الترتيب الطبيعي على $\mathbb{R}$ أرخميدي، بينما الترتيب على $\mathbb{R}[x]$ المعطى بـ P_{low} الذي نوقش في مثال6.25 ليس أرخميديًا؛ لأنه لأي عدد صحيح موجب n لدينا $(17 - nx) \in P_{low}$، إذن $nx < 17$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

سنقدم مثالين نصف بهما أنواع الحلقات المرتبة والحقول، التي تهمنا في عملٍ أكثر تطورًا.

مثال 8.25 (**حلقات متسلسلة القوى الشكلية**): لتكن R حلقة، وقد عرّفنا كثيرة الحدود في الفصل 22 في $R[x]$ على أنها المجموع الشكلي، $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ حيث كل a_i أصفار عدا عدد منتهٍ من a_i ليس صفرًا، وإذا لم نشترط أيًّا من a_i صفرًا، فسنحصل على **متسلسلة القوى الشكلية في** x، حيث المعاملات من الحلقة R. (الصفة شكلي، تستخدم بصورة عرفية؛ لأننا لا نتعامل مع المتسلسلات المتقاربة). بالضبط الصيغ نفسها التي سنستخدمها لتعريف الجمع والضرب على هذه المتسلسلات، هي المستخدمة على كثيرات الحدود في الفصل 22. مارس معظمنا جمع المتسلسلات وضربها عند دراسة التفاضل والتكامل، فهذه المتسلسلات تمثل حلقة يرمز لها بـ $R\,[[x]]$، التي تحوي $R\,[x]$ بوصفها حلقة جزئية.

إذا كانت R حلقة مرتبة، فيمكننا توسيع الترتيب على $R\,[[x]]$، بالضبط كما وسّعنا الترتيب على $R\,[x]$ مستخدمين المجموعة P_{low} للعناصر الموجبة. (لا يمكننا أن نستخدم P_{high}. لم لا؟) ووحيدات الحدّ لها الترتيب نفسه الذي عرضناه في المثال 6.25. ▲

مثال 9.25 (**حقول متسلسلات لورنت الشكلية Formal Laurent Series Fields**): بالاستمرار في فكرة مثال 8.25، نفترض F حقلًا، ولتكن المتسلسلة الشكلية $\sum_{i=N}^{\infty} a_i x^i$ ، حيث N أي عدد صحيح موجب، صفر أو سالب، و$a_i \in F$. (بالتماثل، يمكننا أن نعدّ $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i$ حيث a_i كلها – عدا عدد نهائي من a_i– صفر للقيم السالبة من i، إذ إننا خلال دراسة التفاضل والتكامل لدوال المتغيرات التخيلية، نواجه متسلسلات من هذا النوع المسماة "متسلسلات لورنت")، وبالجمع والضرب الطبيعي على هذه المتسلسلات نحصل فعليًّا على حقل يرمز له بـ $F((x))$. معكوس x هي المتسلسلة $x^{-1} + 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$ معكوسات العناصر والكسور يمكن حسابها باستخدام قسمة المتسلسلات، وسنحسب أول ثلاثة حدود لـ $(x^{-1} - 1 + x - x^2 + x^3 + \cdots)/(x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \cdots)$ في $\mathbb{R}\,((x))$ للتوضيح.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^{-4} - 3x^{-3} + 4x^{-2} + \cdots \\
\hline
x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \cdots & x^{-1} - 1 + x - x^2 + x^3 + \cdots \\
 & \underline{x^{-1} + 2 + 3x + \cdots} \\
 & \quad -3 - 2x + \cdots \\
 & \quad \underline{-3 - 6x - 9x^2 + \cdots} \\
 & \qquad 4x + \cdots
\end{array}
$$

إذا كان F حقلا مرتبًا، فيمكننا أن نستخدم التناظر الموضح لـ P_{low} في $R\ [[x]]$ لنعرف الترتيب على $F\ ((x))$. وسنطلب منك في تمرين 2 رمزيًّا ترتيب وحيدات الحد $\cdots x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0 = 1, x, x^2, x^3, \cdots$ كما فعلنا لـ $R[x]$ في مثال 6.25.

لاحظ أنّ $F((x))$ تحوي– بوصفه حقلًا جزئيًّا– حقل خوارج القسمة على $F[x]$، وبذلك نشتق ترتيبًا على حقل خوارج القسمة هذا. ▲

لتكن R حلقة مرتبة، ولتكن $\phi: R \to R'$ تماثل حلقات. إنه لأمر واضح بصورة بدهية مع إعادة التعريف (إعادة التسمية)، أنّه يمكن استخدام الدالة ϕ لحمل الترتيب على R إلى الترتيب على R' . نلخص ذلك على صورة مبرهنة، ويجب إثباتها لمنع الشك، حيث نترك الإثبات إلى التمرين 25.

10.25 مبرهنة لتكن R حلقة مرتبة، حيث P هي مجموعة العناصر الموجبة، وليكن $\phi: R \to R'$ تماثل حلقات، حيث تحقق المجموعة الجزئية $P'=\phi[P]$ متطلبات تعريف 1.25 لمجموعة العناصر الموجبة لـ R'، إضافة إلى ذلك، في الترتيب على R' المعطى من P'، عندنا $\phi(a) <' \phi(b)$ في R'، إذا وفقط إذا كان $a < b$ في R.

لنُسَمِّ الترتيب على R' الموصوف في المبرهنة السابقة "**الترتيب المحدث عن طريق**" ϕ من الترتيب على R.

11.25 مثال نصَّ مثال 9.22 على أنّ تشاكل التعويض ، $\phi_\pi: \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ حيث:

$$\phi(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_0 + a_1\pi + \ldots + a_n\pi^n$$

هو واحد لواحد، وبذلك، فهو يزوّدنا بتماثل من $\mathbb{Q}[x]$ إلى $\phi\ [\mathbb{Q}[x]]$. نرمز إلى هذه الحلقة المصورة بـ $\mathbb{Q}[\pi]$. إذا زودنا $\mathbb{Q}[x]$ بترتيب مستخدمين المجموعة P_{low} للمثالين 2.25 و6.25، فإنّ الترتيب على $\mathbb{Q}[\pi]$ المشتق من φ_π مختلف تمامًا عن الترتيب الطبيعي (الوحيد) على $\mathbb{R}$ ، ففي الترتيب P_{low}، π أقل من أي عنصر في $\mathbb{Q}$! ▲

أي تماثل من حلقة R على نفسها يسمى **تماثلًا ذاتيًا** (**automorphism**) على R، حيث يمكن استخدام المبرهنة 10.25 لتقديم ترتيبات مختلفة على حلقة مرتبة R، إذا توافر تماثل ذاتي على R لا ينقل المجموعة P من العناصر الموجبة إلى نفسها. نقدم هذا المثال:

12.25 مثال يبيّن تمرين 11 في الفصل 18 أنّ: $\{m + n\sqrt{2} \ |m, n \in \mathbb{Z}\}$ حلقة.

لنرمز لهذه الحلقة بـ $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$، إذ إنّ لها ترتيبًا طبيعيًّا مشتقًّا من $\mathbb{R}$، حيث $\sqrt{2}$ موجب، لكن، ندّعي أنّ $\phi : \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \to \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$، معرّفة بـ $\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$ هي تماثل ذاتي، ومن الواضح أنها واحد لواحد وغامر على $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$، سنترك التحقق من خاصية التشاكل إلى تمرين 17؛ ولأن $\phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$، نرى أنّ الترتيب المحدث من ϕ سيكون واحدًا، حيث $-\sqrt{2}$ موجب! في الترتيب الطبيعي على $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$، العنصر $m + n\sqrt{2}$ موجب، إذا كان m و n كلاهما موجبًا، أو إذا كان m موجب و $2n^2 < m^2$، أو إذا كان m موجبًا و$m^2 < 2n^2$. سنطلب إليك في تمرين 3 أن تعطينا الصفات المناظرة للعناصر الموجبة في الترتيب على $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ المحدث من ϕ. ▲

باستعراض المثالين 11.25 و 12.25؛ اللذين قدّما ترتيبين على حلقتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ ليس هما الترتيبين المحدثين، نتساءل فيما إذا كانت $\mathbb{Q}$ تقبل ترتيبًا آخر غير الترتيب الطبيعي، مبرهنتنا الأخيرة توضِّح أنَّ هذا مستحيل.

13.25 مبرهنة لتكن D حلقة تامة مرتبة، حيث P مجموعة العناصر الموجبة، وليكن F حقل خوارج القسمة على D. المجموعة

$$P' = \{x \in F \mid x = a/b \text{ حيث } a, b \in D \text{ و } ab \in P\}$$

حسنة التعريف، وتقدِّم ترتيبًا على F المشتق من الترتيب المعطى على D، إضافة إلى ذلك، P' هي المجموعة الجزئية الوحيدة من F التي لها هذه الخاصية.

البرهان لتوضيح أنّ P' حسنة التعريف، افترض أنّ $x = a/b = a'/b'$ لـ $a, b, a', b' \in D$

و$ab \in P$، علينا أن نوضّح $a'b' \in P$. من $a/b = a'/b'$، نحصل على $ab' = a'b$، وبالضرب في b، نحصل على $(ab)\, b' = a'\, b^2$ الآن $b^2 \in P$، وبافتراض $ab \in P$.

باستخدام التثليث والخصائص $a\,(-b) = (-a)b = -(ab)$ للحلقة، نرى أنّه إما a' و b' كلاهما في P أو كلاهما ليس في P، وفي كل حالة، نحصل على $a'\, b' \in P$. نبدأ بالإغلاق على P'، لتكن $x = a/b$ و $y = c/d$ عنصرين من P'، إذن، $ab \in P$ و $cd \in P$. الآن، $x + y = (ad + bc)/bd$ و $(ad + bc)bd = (ab)d^2 + b^2(cd)$ في P؛ لأنَّ المربعات أيضًا في P و P مغلقة على الجمع والضرب؛ لذلك $(x + y) \in P'$. أيضًا $xy = ac/bd$ في P'؛ لأنّ $acbd = (ab)(cd)$ هي حاصل ضرب عنصرين من P، وبهذا هي في P.

بالنسبة إلى التثليث، نريد فقط أن نلاحظ أنَّه لـ $x = a/b$، حاصل الضرب ab يحقق فقط واحدًا من

$$ab \in P,\ ab = 0,\ ab \notin P$$

باستخدام التثليث على P. بالنسبة إلى P' تترجم هذه إلى $x \in P'$، $x=0$، و$x \notin P'$ على الترتيب.

أوضحنا أنّ P' تقدم ترتيبًا على F. بالنسبة إلى $a \in D$، نرى أنَّ $a = a/1$ في P'، إذا وفقط إذا كان $a1=a$ في P؛ لذلك، الترتيب المعطى على D هو بالفعل الترتيب المحدث من F عن طريق P'.

أخيرًا، افترض أنّ P'' هي مجموعة العناصر الموجبة من F، التي تحقق شروط التعريف 1.25، بحيث $P'' \cap D = P$. لتكن $x = a/b \in P''$، حيث $a, b \in D$، فإن $xb^2 = ab$ يجب أن يكون في P''؛ لذلك،

$ab \in (P'' \cap D) = P$. إذن $x \in P'$، ولذلك $P'' \subseteq P'$.

يوضح قانون التثليث أنَّه يجب أن يكون عندنا بعدها $P'= P''$؛ لذلك، تعطينا P' الترتيب الوحيد على F الذي يحافظ على الترتيب الأصلي لعناصر D. ♦

■ تمارين 25

حسابات

1. لتكن R حلقة مرتبة. صف ترتيب عنصر موجب في R ووحيدات الحدّ $x, x^2, x^3, \cdots, x^n$، في $R[x]$، كما فعلنا في مثال 6.25، باستخدام المجموعة P_{high} للمثال 25. 6 على أنها مجموعة العناصر الموجبة في $R[x]$.

2. ليكن F حقلًا مرتبًا، وليكن $F((x))$ حقل متسلسلات لورنت الشكلية، حيث المعاملات من F، التي نوقشت في المثال 9.25. صف ترتيب وحيدات الحدّ $\cdots x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0 = 1, x, x^2, x^3, \cdots$ باستخدام الترتيب على $F((x))$ الموصوف في ذلك المثال.

3. وصف مثال 12.25 الترتيب على $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$، بحيث $-\sqrt{2}$ موجب. صف بدلالة m وn، العناصر الموجبة جميعها في $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ باستخدام ذلك الترتيب.

في التمارين 4 إلى 9، لتكن $\mathbb{R}[x]$ عليها الترتيب المعطى بـ

i. P_{low} ii. P_{high}

الموصوف في المثال 2.25 في كل حالة (i) و (ii)، رتّب الرموز أ، ب، ج، د، هـ لكثيرات الحدود المعطاة بترتيب يتبع الترتيب التصاعدي لكثيرات الحدود، كما وصف بالعلاقة > للمبرهنة 25.5.

4. أ. $-5 + 3x$ ب. $5 - 3x$ ج. $-x + 7x^2$ د. $x - 7x^2$ هـ. $2 + 4x^2$

5. أ. -1 ب. $3x - 8x^3$ جـ. $-5x + 7x^2 - 11x^4$ د. $8x^2 + x^5$ هـ. $-3x^3 - 4x^5$

6. أ. $-3 + 5x^2$ ب. $-2x + 5x^2 + x^3$ جـ. -5 د. $6x^3 + 8x^4$ هـ. $8x^4 - 5x^5$

7. أ. $-2x^2 + 5x^3$ ب. $x^3 + 4x^4$ جـ. $2x - 3x^2$ د. $-3x - 4x^2$ هـ. $2x - 2x^2$

8. أ. $4x - 3x^2$ ب. $4x + 2x^2$ جـ. $4x - 6x^3$ د. $5x - 6x^3$ هـ. $3x - 2x^2$

9. أ. $x - 3x^2 + 5x^3$ ب. $2 - 3x^2 + 5x^3$ جـ. $x - 3x^2 + 4x^3$ د. $x + 3x^2 + 4x^4$ هـ. $x + 3x^2 - 4x^3$

في التمارين 10 إلى 13، لتكن $\mathbb{Q}((x))$ لها الترتيب الموصوف في المثال 9.25 رتّب الرموز أ، ب، جـ، د، هـ للعناصر المعطاة بترتيب يتبع الترتيب التصاعدي لتلك العناصر، كما هو موصوف بالعلاقة < للمبرهنة 5.25.

10. أ. $\dfrac{1}{x}$ ب. $\dfrac{-5}{x^2}$ جـ. $\dfrac{2}{x}$ د. $\dfrac{-3}{x^2}$ هـ. $4x$

11. أ. $\dfrac{1}{1-x}$ ب. $\dfrac{x^2}{1+x}$ جـ. $\dfrac{1}{x-x^2}$ د. $\dfrac{-x}{1+x^2}$ هـ. $\dfrac{3-2x}{x^3+4x}$

12. أ. $\dfrac{5-7x}{x^2+3x^3}$ ب. $\dfrac{-2+4x}{4-3x}$ جـ. $\dfrac{7+2x}{4-3x}$ د. $\dfrac{9-3x^2}{2+6x}$ هـ. $\dfrac{3-5x}{-6+2x}$

13. أ. $\dfrac{1-x}{1+x}$ ب. $\dfrac{3-5x}{3+5x}$ جـ. $\dfrac{1}{4x+x^2}$ د. $\dfrac{1}{-3x+x^2}$ هـ. $\dfrac{4x+x^2}{1-x}$

مفاهيم

14. يمكن إثبات أنَّ أصغر حقل جزئي من $\mathbb{R}$ يحوي $\sqrt[3]{2}$ يماثل أصغر حقل جزئي من $\mathbb{C}$ يحوي $\sqrt[3]{2}\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. وضّح لمَ يُبين لنا ـ على الرغم من أنه لا يوجد ترتيب على $\mathbb{C}$ـ أنّه يمكن إيجاد ترتيب على حقل جزئي من $\mathbb{C}$ يحوي عناصر لَيست أعدادًا حقيقية؟

15. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. هناك ترتيب وحيد ممكن على الحلقة $\mathbb{Z}$.

________ ب. يمكن ترتيب الحقل $\mathbb{R}$ فقط بطريقة وحيدة.

________ جـ. أي حقل جزئي من $\mathbb{R}$ يمكن ترتيبه فقط بطريقة وحيدة.

________ د. يمكن ترتيب الحقل $\mathbb{Q}$ فقط بطريقة وحيدة.

________ هـ. إذا كانت R حلقة مرتبة، فإنه يمكن ترتيب $R[x]$ بطريقة مشتقة من الترتيب على R.

________ و. الترتيب على الحلقة R أرخميدي، إذا كان لكل $a, b \in R$ يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$، بحيث $b < na$.

________ ز. الترتيب على الحلقة R أرخميدي، إذا كان لكل $a, b \in R$، بحيث $0 < a$ يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$، وبحيث $b < na$.

________ ح. إذا كانت R حلقة مرتبة و $a \in R$، فإن $-a$ لا يمكن أن تكون موجبة.

________ ط. إذا كانت R حلقة مرتبة و $a \in R$، فإنه إمّا a أو $-a$ موجبة.

________ ي. كل حلقة مرتبة فيها عدد لا نهائي من العناصر.

16. صف الترتيب على الحلقة $\mathbb{Q}[\pi]$ الموصوفة في المثال 11.25 بحيث π أكبر من كل عدد نسبي.

براهين

17. بالعودة إلى المثال 12.25، وضِّح أنَّ الدالة $\phi : \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}$، حيث $\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$، تشاكل.

في التمارين 18 إلى 24، لتكن R حلقة مرتبة، حيث المجموعة P مجموعة العناصر الموجبة، ولتكن $<$ العلاقة على R المعرفة في المبرهنة 25.5، أثبت العبارة المعطاة.

(الإثباتات جميعها يجب أن تكون بدلالة تعريف 1.25 والمبرهنة 5.25، على سبيل المثال: يجب عليك ألا تقل: "نعلم أنَّ سالب ضرب موجب هو سالب؛ لذلك، إذا كان $a < 0$ و $0 < b$، فإن $ab < 0$").

18. إذا كان $a \in P$، فإن $0 < a$.

19. إذا كان $a, b \in P$ و $ac = bd$، فإنه إما $c = d = 0$ أو $cd \in P$.

20. إذا كان $a < b$، فإنّ $-b < -a$.

21. إذا كان $a < 0$ و $b > 0$، فإنّ $ab < 0$.

22. إذا كان R حقلًا و b, a موجبين، فإنّ a/b موجب.

23. إذا كان R حقلًا و $0 < a < 1$، فإنّ $1/a > 1$.

24. إذا كان R حقلًا و $-1 < a < 0$، فإنّ $1/a < -1$.

25. أثبت المبرهنة 10.25 في الكتاب.

26. بيِّن أنه إذا كانت R حلقة مرتبة والمجموعة P مجموعة العناصر الموجبة وS حلقة جزئية من R، فإن

$P \cap S$ تحقق متطلبات العناصر الموجبة في الحلقة S، وبذلك تعطينا ترتيبًا على S.

27. بيِّن أنه إذا كانت العلاقة $>$ على الحلقة R تحقق خصائص التثليث، والتعدي والتواتر المنصوص عليها في المبرهنة 5.25، فإنه توجد مجموعة جزئية P من R، تحقق شروط مجموعة العناصر الموجبة في التعريف 1.25 بحيث إن العلاقة $<_P$، والمعرفة بـ $a <_P b$ إذا وفقط إذا كانت $b - a \in P$ هي نفسها العلاقة $>$.

28. لتكن R حلقة تامة مرتبة. بيِّن أنه إذا كان $a^{2n+1} = b^{2n+1}$، حيث $a, b \in R$ و n عدد صحيح موجب، فإنّ $a=b$.

29. لتكن R حلقة مرتبة، ولتكن الحلقة $R[x, y]$ من كثيرات الحدود في متغيرين، حيث المعاملات من R. يصف المثال 2.25 طريقتين لترتيب $R[x]$، وفي كل واحد منها، يمكننا الاستمرار وترتيب $(R[x])[y]$ بطريقتين متناظرتين بإعطاء أربع طرق للوصول إلى ترتيب $R[x, y]$. توجد هناك أربع طرق أخرى للوصول إلى ترتيب على $R[x, y]$ إذا رتّبنا $R[y]$ بدايةً، وبعدها $(R[y])[x]$. بيِّن أنَّ الترتيبات الثمانية على $R[x, y]$ كلها مختلفة. [مساعدة: يمكن لك أن تبدأ بأن تعدّ إما $x < y$ أو $y < x$ في كلّ من هذه الترتيبات، واستمر في هذا الأسلوب].

الوحدة الخامسة

المثاليات وحلقات العامل
Ideals and Factor Rings

1 الفصل 28 ليس متطلبًا لما بقي من الكتاب.

التشاكلات وحلقات العامل Homomorphisms and Factor Rings

التشاكلات

عَرَّفنا مفاهيم وللحلقات في الفصل 18؛ لأننا نود الحديث عن تشاكلات تعويض لكثيرات حدود وعن الحلقات المتماثلة، ونعيد بعض التعريفات؛ لتسهيل المراجعة.

تذكر أنّ التشاكل هو دالة تحافظ على التركيب، وتشاكل الحلقات يربط بين البنية الجمعية وبين البنية الضربية لكل منهما.

1.26 تعريف الدالة ϕ من حلقة R إلى حلقة R' هي **تشاكل (homomorphism)** إذا كان:

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(\mathrm{b})$$

و

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

لكل العناصر a و b في R. ■

عَرَّفنا في المثال 10.18 تشاكلات التعويض، وقد بيّن المثال 11.18 أنّ الدالة $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$، حيث $\phi\ (m)$ هو باقي قسمة m على n - هي تشاكل، وهذا مثالٌ آخر بسيط لتشاكل، لكنه أساسي جدًّا.

2.26 مثال **(تشاكلات الإسقاط (projection homomorphisms))** لتكن R_n ، ... ، R_2 ، R_1 حلقات، ولكل i، الدالة $\pi_i : R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n \longrightarrow R_i$ المعرفة بـ $\pi_i\ (r_1, r_2, \cdot\cdot\cdot, r_n) = r_i$ هي تشاكل إسقاط غامر الى المركبة R_i، فالخاصيتان المطلوبتان متحققتان للتشاكل π_i؛ لأنّ الجمع والضرب في الضرب المباشر يحسب من خلال الجمع والضرب لكل مركبة بصورة منفصلة. ▲

خصائص التشاكلات

سنعمل بطريقتنا خلال الشرح للفصل 13، لكن لتشاكلات حلقات.

3.26 مبرهنة **(رديف المبرهنة 12.13)**: ليكن ϕ تشاكلاً من حلقة R إلى R'، فإذا كان 0 هو المحايد الجمعي في R، فإنّ $\phi\ (0) = 0'$ هو المحايد الجمعي في R'، وإذا كان $a \in R$، فإنّ $\phi\ (-a) = -\ \phi\ (a)$، وإذا كانت S حلقة جزئية من R، فإنّ $\phi\ [S]$ حلقة جزئية من R'، وفي المقابل، إذا كانت S' حلقة جزئية من R'، فإنّ $\phi^{-1}\ [S']$ حلقة جزئية من R، أخيرًا، إذا كان لـ R عنصر محايد 1، فإنّ $\phi\ (1)$ عنصر محايد لـ $\phi\ [R]$، باختصار: حلقات جزئية تناظر حلقات جزئية، وحلقات بعنصر محايد تناظر حلقات بعنصر محايد بالنسبة إلى تشاكل حلقات.

البرهان ليكن ϕ تشاكلاً من حلقة R إلى حلقة R'؛ لأن – بوصفها حالة خاصة – ϕ يمكن أن ينظر إليه على أنه تشاكل زمرٍ من $\langle R, +\rangle$ إلى $\langle R', +'\rangle$. تخبرنا المبرهنة 12.13 أنّ $\phi(0) = 0'$ هو العنصر المحايد للجمع لـ R'، وأنّ $\phi(-a) = -\phi(a)$، وتخبرنا أيضًا بأنه إذا كانت S حلقة جزئية من R، فإنه باعتبار زمرة الجمع $\langle S, +\rangle$، فالمجموعة $\langle \phi[S], +'\rangle$ تمثّل زمرة جزئية لـ $\langle R', +'\rangle$. وإذا كان $\phi(s_1)$ و $\phi(s_2)$ عنصرين من $\phi[S]$، فإنّ:

$$\phi(s_1)\,\phi(s_2) = \phi(s_1 s_2)$$

و $\phi(s_1s_2) \in \phi[S]$. وعليه، $\phi(s_1)\phi(s_2) \in \phi[S]$، وهكذا $\phi[S]$ مغلقة بالنسبة إلى الضرب، بناءً على ذلك، $\phi[S]$ حلقة جزئية من R'. في المقابل، تبيِّن المبرهنة 12.13 أيضًا، أنه إذا كانت S' حلقة جزئية من R'، فإنّ $\langle \phi^{-1}[S'],+\rangle$ حلقة جزئية من $\langle R, +\rangle$. ليكن $a, b \in \phi^{-1}[S']$، وهكذا $\phi(a) \in S'$ و $\phi(b) \in S'$ عندئذ:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

لأنّ $\phi(a)\phi(b) \in S'$، نرى أنّ $ab \in \phi^{-1}[S']$ وهكذا $\phi^{-1}[S']$ مغلقة بالنسبة إلى الضرب، وعليه فإن $\phi[S]$ حلقة جزئية من R.

أخيرًا، إذا كان لـ R عنصر محايد 1، فإنّ لكل $r \in R$،

$$\phi(r) = \phi(1r) = \phi(r1) = \phi(1)\phi(r) = \phi(r)\phi(1)،$$

وهكذا $\phi(1)$ عنصر محايد لـ $\phi[R]$. ♦

في المبرهنة 3.26، لاحظ أنّ $\phi(1)$ هو عنصر محايد لـ $\phi[R]$، لكن ليس بالضرورة لـ R'، وسنطلب إليك أن تبيّن ذلك في التمرين 9.

4.26 تعريف لتكن الدالة $\phi : R \to R$ تشاكل حلقات، الحلقة الجزئية

$$\phi^{-1}[0'] = \{r \in R \mid \phi(r) = 0'\}$$

هي النواة **(Kernel)** لـ ϕ، ويرمز لها بالرمز $\mathrm{Ker}(\phi)$. ■

الآن، $\mathrm{Ker}(\phi)$ هي النواة نَفْسُها لتشاكل الزمر من $\langle R, +\rangle$ إلى $\langle R', +\rangle$ المعطاة من خلال ϕ، المبرهنة 15.13 والنتيجة 18.13 لتشاكلات الزمر تعطينا مباشرة نتائج مُناظِرة لتشاكلات حلقات.

5.26 مبرهنة (ردیف المبرهنة 15.13) ليكن $\phi : R \to R'$ تشاكل حلقات، ولتكن $H = \mathrm{Ker}(\phi)$، وليكن $a \in R$. عندئذ $\phi^{-1}[\phi(a)] = a + H = H + a$، حيث $a + H = H + a$ هي مجموعة المشاركة التي تحوي a لزمرة الجمع الإبدالية $\langle H, +\rangle$.

6.26 نتيجة (رديف النتيجة 18.13) تشاكل حلقات $\phi : R \to R$ هو دالة أحادية إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.

حلقات (خوارج القسمة) العامل

إننا جاهزون الآن لوصف النتائج الرديفة لحلقات الفصل 14، ونبدأ بمناظِرةٍ للمبرهنة 1.14.

7.26 مبرهنة (رديف المبرهنة 1.14) ليكن $\phi : R \to R$ تشاكل حلقات نواته H، عندئذ تُشَكِّلُ مجموعات المشاركة مع الجمع لـ H حلقة R/H، تُعَرَّف عملياتها الثنائية باختيار الممثلين، أي إنّ مجموعَ مجموعتي مشاركة مُعرَّف بـ

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H,$$

وضَرْب مجموعتي مشاركة مُعرَّف بـ

$$(a + H)(b + H) = (ab) + H.$$

أيضًا، الدالة $\mu : R/H \to \phi[R]$، المعرفة بـ $\mu(a + H) = \phi(a)$ هي تماثل.

البرهان مرة أخرى، أنجز جزء الجمع لمبرهنتنا في المبرهنة 1.14، ونكمل بفحص ظواهر الضرب.

يجب أن نبيّن أولاً أنّ ضرب مجموعات المشاركة باختيار الممثلين حسن التعريف، ولعمل ذلك، ليكن $h_1\ h_2 \in H$، وعليه، فإنّ $a + h_1$ مُمَثِّلٌ لـ $a + H$ و $b + h_2$ مُمَثِّلٌ لـ $b + H$. ليكن

$$c = (a+h_1)(b+ h_2) = ab + ah_2 + h_1b + h_1h_2$$

يجب أن نثبت أنّ هذا العنصر c يقع في مجموعة المشاركة $ab + H$ ولأن

$ab+H = \phi^{-1}[\phi(ab)]$ نحتاج فقط إلى إثبات أنّ $\phi(c) = \phi(ab)$. ولأن ϕ تشاكل و $\phi(h) = 0'$

نحصل لـ $h \in H$ على:

$$\begin{aligned}\phi(c) &= \phi(ab + ah_2 + h_1b + h_1h_2)\\ &= \phi(ab) + \phi(ah_2) + \phi(h_1b) + \phi(h_1h_2)\\ &= \phi(ab) + \phi(a)0' + 0'\phi(b) + 0'0'\\ &= \phi(ab) + 0' + 0' + 0' = \phi(ab). \qquad (1)\end{aligned}$$

وعليه، الضرب باختيار الممثلين حسن التعريف.

لإثبات أنّ R / H حلقة، بقي أن نثبت أنّ الخاصية التجميعية للضرب وقانوني التوزيع متحققة في R/H؛ لأنّ الجمع والضرب يحسب باختيار المُمَثلين، وهذه الخصائص تنتج مباشرة من الخصائص المقابلة في R.

تبيّن المبرهنة 1.14 أنّ الدالة μ المعرَّفة في نَصِّ المبرهنة 4.26 حسنة التعريف، وأحادية، وغامرة لـ $\phi\ [R]$، وتحقق خاصية الجمع للتشاكل، فمن ناحية الضرب، لدينا:

$$\begin{aligned}\mu[(a+H)(b+H)] &= \mu(ab+H) = \phi(ab)\\ &= \phi(a)\ \phi(b) = \mu(a+H)\mu(b+H)\end{aligned}$$

هذه تُكْمِلُ إثبات أنّ μ تماثل. ♦

8.26 مثال المثال 11.18 يبيّن أنّ الدالة $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ المُعرَّفة بـ $\phi(m) = r$ هي تشاكل ، حيث r هو باقي m عند قسمته على n؛ لأن $\text{Ker}(\phi) = n\mathbb{Z}$، وتبيّن المبرهنة 7.26 أنّ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ حلقة، حيث إنّه يمكن حساب العمليات على صفوف البواقي باختيار المُمَثلين، وبعمل العملية المقابلة في $\mathbb{Z}$، وتبيّن المبرهنة أيضًا، أنّ هذه الحلقة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_n$. ▲

بقي فقط أن نَصفَ تلك الحلقات الجزئية H من حلقة R، بحيث إنّ ضرب مجموعات المشاركة مع الجمع لـ H باختيار الممثلين حسن التعريف. وقد أُثْبِتَ ضرب مجموعات المشاركة في المبرهنة 7.26 في المعادلة (1) بأنه حسن التعريف، ويُعزى نجاح المعادلة (1) إلى حقيقة أنّ، $\phi(ah_2) = \phi(h_1b) = \phi(h_1h_2) = 0'$ أي إنه إذا كان $h \in H$، حيث $H = \text{Ker}(\phi)$. فإنّ لكل $a, b \in R$ لدينا $ah \in H$ و $hb \in H$، وهذا تقترحه المبرهنة 9.26 في الأسفل، التي هي مناظرة للمبرهنة 4.14.

9.26 مبرهنة **(رديف المبرهنة 4.14)**: لتكن H حلقة جزئية من الحلقة R. ضرب مجموعات المشاركة مع الجمع لـ H حسن التعريف من خلال المعادلة:

$$(a + H)(b + H) = ab + H$$

إذا وفقط إذا كان $ah \in H$ و $hb \in H$ لكل $a,b \in R$ و $h \in H$.

البرهان افترض أولاً أنّ $ah \in H$ و $hb \in H$ لكل $a,b \in R$ ولكل $h \in H$. ليكن $h_1, h_2 \in H$؛ ولذلك، $a + h_1$ و $b + h_2$ هما أيضًا مُمَثِّلان لمجموعتي المشاركة $a + H$ و $b + H$ تحويان a و b، عندئذٍ:

$$(a + h_1)(b + h_2) = ab + ah_2 + h_1b + h_1h_2$$

لأنّنا نرى من المعطيات ah_2 ، h_1b ، و h_1h_2 جميعها في H ، أنّ $(a + h_1)(b + h_2) \in ab + H$.

في المقابل، افترض أنّ ضرب مجموعات المشاركة مع الجمع من خلال الممثلين حسن التعريف، وليكن $a \in R$ وخذ في الحسبان ضرب مجموعات المشاركة $(a + H)\,H$، فباختيار المُمَثِّلَيْن $a \in (a + H)$ و $0 \in H$، نرى أنّ $(a + H)\,H = a0 + H = 0 + H = H$؛ ولأنه يمكننا أيضًا حساب $(a+H)\,H$، باختيار $a \in (a + H)$ وأي $h \in H$ نرى أنّ $ah \in H$ لأي $h \in H$ ، ويبيّن برهانٌ مشابه يبدأ مع الضرب $H(b + H)$ أنّ $hb \in H$ لأي $h \in H$. ♦

الزمر الجزئية الناظمية في مبرهنة الزمر هي بالتحديد نوع البنية الجزئية للزمر المطلوبة لتشكيل زمرة عامل مع عملية حسنة التعريف على مجموعات مشاركة معطاة بالتعامل مع ممثلين مختارين، حيث تُبَيِّن المبرهنة 9.26 أنّ البنية الجزئية المناظرة في مبرهنة الحلقات، يجب أن تكون حلقة جزئية H من حلقة R بحيث إنّ: $aH \subseteq H$ و $Hb \subseteq H$ لكل $a, b, \in R$، حيث $aH = \{ah \mid h \in H\}$ و $Hb = \{hb \mid h \in H\}$، من الآن فصاعدًا سنرمز عادة لبنية جزئية كهذه بـ N بدل H، وتذكر أننا في الفصل 15 بدأنا باستخدام N لنعني زمرة جزئية ناظمية.

10.26 تعريف نقول: إن زمرة الجمع الجزئية N من حلقة R **مثالي (ideal)** إذا حققت الخصائص:

$aN \subseteq N$ و $Nb \subseteq N$ لكل $a,b \in R$ ■

مثال 11.26 نرى أنّ $n\mathbb{Z}$ مثالي من الحلقة $\mathbb{Z}$ ؛ لأننا نعلم أنها حلقة جزئية و $s(nm) = (nm)s = n(ms) \in n\mathbb{Z}$ لكل $s \in \mathbb{Z}$. ▲

مثال 12.26 لتكن F حلقة الدوال جميعها من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن C الحلقة الجزئية من F المتكوّنة من جميع الدوال الثابتة في F. هل C مثالي من F؟ لماذا؟

الحل ليس صحيحًا أنّ الضرب لدالة ثابتة مع كل دالة هو مرة أخرى دالة ثابتة، فمثلاً: الضرب لـ $\sin x$ و 2 هو الدالة $2\sin x$، وعليه، C ليست مثاليًا من F. ▲

نبذة تاريخية

قَدَّم إرنست إدوارد كُمر (Ernst Eduard Kummer 1810 – 1893) عام 1847م مفهوم "عدد مركب مثالي" حتى يحافظ على مفهوم التحليل الوحيد في حلقات معينة لأعداد صحيحة جبرية، وبوجه خاص، أراد كُمر أن يكون قادرًا على أن يحلل إلى أعداد أولية على الشكل $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{p-1}\alpha^{p-1}$، حيث α جذر مركب لـ $x^p = 1$ (p أولي)، و a_i أعداد صحيحة عادية، وقد لاحظ كُمر أنّ التعريف البسيط للأعداد الأولية "بوصفها أعدادًا غير قابلة للتحليل" لا يقود إلى النتائج المرجوَّة؛ فالضرب لاثنين من مثل هذه الأعداد "غير القابلة للتحليل" يمكن بحق أن يكون قابلاً للقسمة على أعدادٍ أخرى "غير قابلة للتحليل"، عَرَّف كُمر "العوامل الأولية المثالية" و "الأعداد المثالية" بدلالة علاقات تطابق معينة؛ وهذه "العوامل المثالية" استخدمت بعد ذلك على أنها القواسم الضرورية للحفاظ على التحليل الوحيد، وباستخدامها، كان كُمر في الحقيقة قادرًا على إثبات حالات معينة من المبرهنة الأخيرة لفيرما، التي تنصّ على أنّ $x^n + y^n = z^n$ ليس لها حلول $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ إذا كان $n > 2$.

أثبت في النهاية أنّ "عددًا مثاليًا" – الذي هو بوجه عام ليس "عددًا" – حُدِّدَ بصورة حديدة عن طريق مجموعة الأعداد الصحيحة التي "يقسمها"، أمّا ريتشارد ديديكيند (Richard Dedekind)، فقد أخذ فائدة من هذه الحقيقة ليطابق العامل المثالي مع هذه المجموعة؛ لذلك سمّى المجموعة نفسها مثاليًا، وواصل لإثبات أنه يحقق التعريف المعطى في هذا الكتاب، أصبح ديديكيند بعد ذلك قادرًا على تعريف مفهومي المثالي الأولي وضرب مثاليين، وبيَّن أنّ أيّ مثالي في حلقة الأعداد الصحيحة لأيّ حقل أعداد جبري، يمكن كتابته على نحو وحيد على صورة ضرب مثاليات أولية.

مثال 13.26 لتكن F كما في المثال السابق، ولتكن N الحلقة الجزئية للدوال f جميعها، بحيث إنّ $f(2) = 0$. هل N مثالي من F؟ لماذا أو لماذا لا؟

الحل ليكن $f \in N$، وليكن $g \in F$. عندئذ $(fg)(2) = f(2)g(2) = 0g(2) = 0$، وهكذا $fg \in N$. بالمثل نجد أنّ $gf \in N$؛ لهذا السبب N مثالي من F. يمكننا أيضًا إثباتها فقط بملاحظة أنّ N هي النواة لتشاكل التعويض $\phi_2 : F \to \mathbb{R}$. ▲

علمنا أنّ الضرب باختيار الممثلين حسن التعريف على مجموعات المشاركة مع الجمع لحلقة جزئية N من R، القانون التجميعي للضرب وقانونا التوزيع لمجموعات المشاركة هذه تنتج مباشرة عن الخصائص نفسها في R، فلدينا مباشرة هذه النتيجة للمبرهنة 9.26.

14.26 نتيجة **(رديف النتيجة 5.14)** ليكن N مثاليًّا من حلقة R، عندئذٍ: مجموعات المشاركة مع الجمع لـِ N تُشَكِّل حلقة R/N مع عمليات ثنائية معرَّفة بـِ

$$(a+N)+(b+N)=(a+b)+N$$

و

$$(a+N)(b+N)=ab+N$$

15.26 تعريف الحلقة R/N في النتيجة السابقة هي **حلقة العامل (factor ring)** (**أو الحلقة الخارجة (quotient ring)**) لـِ $\boldsymbol{R}$ **عن طريق** N. ■

إذا استخدمت مصطلح الحلقة الخارجة، فتأكد من عدم خلطك له مع مفهوم الحقل لخوارج القسمة لحلقة تامة، الذي نوقش في الفصل 21.

مبرهنة التشاكل الأساسية (Fundamental Homomorphism Theorem)

لإكمال مُناظرتنا مع الفصلين 13 و 14 نعطي مناظِرَتين للمبرهنتين 9.14 و 11.14.

16.26 مبرهنة **(رديف المبرهنة 9.14)** ليكن N مثاليًّا من حلقة R. عندئذ $\gamma : R \to R/N$ المعطى بـِ $\gamma(x)=x+N$ هو تشاكل حلقاتٍ نواته N.

البرهان جزء الجمع أُنجز في المبرهنة 9.14، وبالعودة إلى مسألة الضرب، نرى أنّ:

$$\gamma(xy)=(xy)+N=(x+N)(y+N)=\gamma(x)\gamma(y). \qquad ♦$$

17.26 مبرهنة **(مبرهنة التشاكل الأساسية؛ رديف المبرهنة 11.14)** ليكن $\phi : R \to R'$ تشاكل حلقات نواته N. عندئذ: $\phi[R]$ حلقة، والدالة $\mu : R/N \to \phi[R]$ المعطاة بـ $\mu(x+N)=\phi(x)$ هي تماثل. إذا كان $\gamma : R \to R/N$ هو التشاكل المعطى بـِ $\gamma(x)=x+N$، فلكل $x \in R$، لدينا $\phi(x)=\mu\gamma(x)$.

البرهان تنتج هذه مباشرة عن المبرهنتين 7.26 و 16.26، والشكل 18.26 مناظر للشكل 10.14. ♦

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \phi[R] \arrow[dl, "\mu"] \\
& R/N &
\end{tikzcd}$$

الشكل 18.26

19.26 مثال يبيّن المثال 11.26 أنّ $n\mathbb{Z}$ مثالي من $\mathbb{Z}$، وهكذا يمكننا تشكيل حلقة العامل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$، ويبيّن المثال 11.18 أن $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ حيث $\phi(m)$ باقي m مقياس n، هو تشاكل، ونرى أن $\text{Ker}(\phi) = n\mathbb{Z}$. بعد ذلك، تبيّن المبرهنة 17.26 أنّ الدالة $\mu : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ – حيث $\mu(m + n\mathbb{Z})$ باقي m مقياس n، هي تماثل وحسنة التعريف. ▲

بوجه عام، كل تشاكل حلقات مجاله R ينشئ حلقة عامل R / N ، وكل حلقة عامل R / N تنشىء دالة تشاكل من R إلى R / N. والمثالي في مبرهنة الحلقات يناظر الزمرة الجزئية الناظمية وكلاهما هو نوع البنية الجزئية الضروري لتشكيل بنية العامل.

يجب علينا الآن أن نضيف إضافة للمبرهنة 3.26 على خصائص التشاكلات. ليكن $\phi: R \longrightarrow R'$ تشاكلاً، وليكن N مثاليًا من R، عندئذ: $\phi[N]$ مثالي من $\phi[R]$، مع أنه ليس بالضرورة مثاليًا من R' أيضًا، إذا كان N' مثاليًا من $\phi[R]$ أو من R'، فإنّ $\phi^{-1}[N']$ مثالي من R. نترك برهانها إلى التمرين 22.

تمارين 26

حسابات

1. صِفْ جميع تشاكلات الحلقات من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ [لاحظ: أنه إذا كان ϕ تشاكلاً، فإنّ $\phi((1,0))=\phi((1,0))\phi((1,0))$ و $\phi((0,1))=\phi((0,1))\phi((0,1))$. خذ في الحسبان أيضًا $\phi\ ((1,0)(0,1))$].
2. أوجد الأعداد الصحيحة الموجبة n جميعها، بحيث إنّ $\mathbb{Z}_n$ تحوي حلقة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_2$.
3. أوجد المثاليات N من $\mathbb{Z}_{12}$ جميعها، واحسب في كل حالة $\mathbb{Z}_{12}/N$ ؛ أي أوجد حلقة معروفة تماثلها الحلقة الخارجة.
4. أعطِ جداول الجمع والضرب لـِ $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. هل $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_4$ حلقات متماثلة؟

مفاهيم

في التمارين من 5 إلى 7، صحِّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إن كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

5. *التماثل* من حلقة R إلى حلقة R' هو تشاكلٌ $\phi : R \to R'$ ، بحيث إنّ $\text{Ker}\ (\phi) = \{0\}$.
6. *المثالي* N من حلقة R هو زمرة جمع جزئية من $\langle R, +\rangle$، بحيث إنه لكل $r \in R$ ولكل $n \in N$ لدينا $rn \in N$ و $nr \in N$.

7. النواة لتشاكل ϕ يربط الحلقة R بالحلقة R' هي $\{\phi(r) = 0' \mid r \in R\}$

8. لتكن F حلقة الدوال كلها من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ولها مشتقات من الرتب كلها، والاشتقاق يعطي دالة $\delta: F \to F$، حيث $\delta(f(x))=f'(x)$. هل δ تشاكل؟ لماذا؟ اربط بين هذا التمرين والمثال 12.26.

9. أعطِ مثالاً لتشاكل حلقات $\phi: R \to R'$، حيث R لها عنصر محايد 1 و $\phi(1) \neq 0'$، لكن $\phi(1)$ ليس عنصرًا محايدًا لـ R'.

10. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. مفهوم تشاكل الحلقات مرتبط إلى حدٍّ بعيد بفكرة حلقة العامل.

______ ب. تشاكل الحلقات $\phi: R \to R'$ يحمل المثاليات من R إلى مثاليات من R'.

______ جـ. تشاكل الحلقات أحادي إذا وفقط إذا كانت النواة هي $\{0\}$.

______ د. $\mathbb{Q}$ مثالي من $\mathbb{R}$.

______ هـ. كل مثالي من حلقة هو حلقة جزئية من الحلقة.

______ و. كل حلقة جزئية من كل حلقة هي مثالي من الحلقة.

______ ز. كل حلقة خارجة من كل حلقة إبدالية هي مرة أخرى حلقة إبدالية.

______ ح. الحلقات $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_4$ متماثلة.

______ ط. مثالي N من حلقة R مع عنصر محايد 1 هو R جميعها إذا وفقط إذا كان $1 \in N$.

______ ي. مفهوم المثالي لمفهوم الحلقة مثل مفهوم الزمرة الجزئية الناظمية لمفهوم الزمرة.

11. لتكن R حلقة. لاحظ أنّ $\{0\}$ و R كلايهما مثاليان من R. هل حلقتا العامل R/R و $R/\{0\}$ لهما أهمية حقيقية؟ لماذا؟

12. أعط مثالاً يبيّن أنّ حلقة عامل من حلقة تامة يمكن أن تكون حقلاً.

13. أعطِ مثالاً يبيّن أنّ حلقة عامل من حلقة تامة يمكن أن يكون لها قواسم لـ 0.

14. أعط مثالاً يبيّن أنّ حلقة عامل من حلقة مع قواسم لـ 0 يمكن أن تكون حلقة تامة.

15. أوجد حلقة جزئية من الحلقة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ لا تكون مثاليًا من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

16. سُئل طالب ليثبت أنّ الحلقة الخارجة من حلقة R مقياس مثالي N هي إبدالية إذا وفقط إذا كان $(rs - sr) \in N$ لكل $r, s \in R$. بدأ الطالب بـ:

افترض أنّ R/N إبدالية، عندئذٍ: $rs = sr$ لكل $r, s \in R/N$.

أ. لماذا كانت قراءة المدرس لذلك تجعله يتوقع عدم المنطقية لما بعدها؟

ب. ماذا كان يجب على الطالب أن يكتب؟

جـ. أثبت الادعاء. (لاحظ "إذا وفقط إذا").

براهين

17. لتكن $R = \{a+b\sqrt{2}\ |a,b \in \mathbb{Z}\}$، ولتكن R' تتكوّن من المصفوفات كلها من الدرجة 2×2 على الشكل $\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ لـ $a, b \in \mathbb{Z}$. أثبت أنّ R حلقة جزئية من $\mathbb{R}$، وأنّ R' حلقة جزئية من $M_2(\mathbb{Z})$ بعد ذلك أثبت أن $\phi : R \to R'$، حيث $\phi(a + b\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ هو تماثل.

18. أثبت أنّ كل تشاكل من حقل إلى حلقة إما أحاديًا أو يرسل كل شيء بصورة غامرة إلى 0.

19. أثبت أنه إذا كانت R ، و R' ، و R'' حلقات، وإذا كان $\phi : R \to R'$ و $\psi : R' \to R''$ تشاكلين، فإن دالة التركيب $\psi\phi : R \to R''$ هي تشاكل. (استخدم التمرين 49 للفصل 13).

20. لتكن R حلقة إبدالية مع عنصر محايد بمميز أولي p. أثبت أنّ الدالة $\phi_p : R \to R$ المعطاة بـ $\phi_p(a) = a^p$ هي تشاكل (تشاكل فروبينس **(Frobenius homomorphism)**).

21. لتكن R و R' حلقتين، وليكن $\phi : R \to R'$ تشاكل حلقات، بحيث إنّ $\phi[R] \neq \{0'\}$. أثبت أنه إذا كان لـ R عنصر محايد 1، و R' ليس لها قواسم لـ 0، فإنّ $\phi(1)$ عنصر محايد لـ R'.

22. ليكن $\phi : R \to R'$ تشاكل حلقات، وليكن N مثاليًا من R.

أ. أثبت أنّ $\phi[N]$ مثالي من $\phi[R]$.

ب. أعْطِ مثالاً يُثبت أنّ $\phi[N]$ ليس بالضرورة مثاليًا من R'.

جـ. ليكن N' مثاليًا إما من $\phi[R]$ أو من R'. أثبت أن $\phi^{-1}[N']$ مثاليًا من R.

23. ليكن F حقلاً، ولتكن S أي مجموعة جزئية من $F \times F \times \ldots \times F$ لـ n عامل. أثبت أنّ المجموعة N_S لكل $f(x_1, \cdots, x_n) \in F[x_1, \cdots, x_n]$ التي لها كل عنصر $(a_1, \ldots, a_n)$ في S بوصفه صفرًا (انظر التمرين 28 للفصل 22) هي مثالي من $F[x_1,\ldots, x_n]$ هذه ذات أهمية في علم الهندسة الجبرية.

24. أثبت أنّ حلقة العامل من حقل إما حلقة تافهة (صفر) من عنصر واحد أو تماثل الحقل.

25. أثبت أنه إذا كانت R حلقة مع عنصر محايد و N مثالي من R، بحيث إنّ $N \neq R$، فإنّ R/N حلقة مع عنصر محايد.

26. لتكن R حلقة إبدالية، وليكن $a \in R$. أثبت أن $I_a = \{x \in R \mid ax = 0\}$ مثالي من R.

27. أثبت أنّ تقاطع مثاليات من حلقة R هو أيضًا مثالي من R.

28. لتكن R و R' حلقتين، وليكن N و N' مثاليين من R و R' على الترتيب. ليكن ϕ تشاكلاً من R إلى R'. أثبت أنّ ϕ ينشئ تشاكلاً طبيعيًا $\phi_* : R/N \to R'/N'$ إذا كانت $\phi[N] \subseteq N'$ (استخدم التمرين 39 للفصل 14) .

29. ليكن ϕ تشاكلاً من حلقة R مع عنصر محايد وبصورة غامرة إلى حلقة غير صفرية R'. ليكن u عنصر وحدة في R. أثبت أنّ $\phi(u)$ عنصر وحدة في R'.

30. يسمى العنصر a من حلقة R **متلاشي القوى (nilpotent)**، إذا كان $a^n = 0$ لعنصر ما $n \in \mathbb{Z}^+$. أثبت أنّ مجموعة جميع العناصر متلاشية القوى من حلقة إبدالية R هي مثالي – **متلاشي الجذر لـ (nilradical of)** R.

31. بالرجوع إلى التعريف المعطى في التمرين 30، أوجد متلاشي الجذر للحلقة $\mathbb{Z}_{12}$، ولاحظ أنه إحدى المثاليات من $\mathbb{Z}_{12}$ التي تم إيجادها في التمرين 3. ما متلاشي الجذر لـ $\mathbb{Z}$؟ لـ $\mathbb{Z}_{32}$؟

32. بالرجوع إلى التمرين 30، أثبت أنه إذا كان N هو متلاشي الجذر لحلقة إبدالية R، فإنّ متلاشي الجذر لـ R/N هو المثالي التافه $\{0 + N\}$.

33. لتكن R حلقة إبدالية وليكن N مثاليًا من R. بالرجوع إلى التمرين 30، أثبت أنه إذا كان كل عنصر في N متلاشي القوى، وكان متلاشي الجذر لـ R/N هو R/N، فإن متلاشي الجذر لـ R هو R.

34. لتكن R حلقة إبدالية وليكن N مثاليًا من R. أثبت أنّ المجموعة $\sqrt{N}$ لكل $a \in R$، بحيث إنّ $a^n \in N$ لعنصرٍ ما $n \in \mathbb{Z}^+$، هي مثالي من R، **الجذر لـ (radical of)** N.

35. بالرجوع إلى التمرين 34، أثبت بأمثلة أنه لمثاليات فعلية N من حلقة إبدالية R

أ. $\sqrt{N}$ ليست بالضرورة أن تساوي N.

ب. $\sqrt{N}$ ممكن أن تساوي N.

36. ما علاقة المثالي $\sqrt{N}$ – من التمرين 34– بمتلاشي الجذر لـ R/N (انظر التمرين 30)؟ صغ كلمات إجابتك بحذر.

37. أثبت أنّ $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ المعطى بـ:

$$\phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

لـ $a, b \in \mathbb{R}$ يعطي تماثلاً لـ $\mathbb{C}$ مع الحلقة الجزئية $\phi[\mathbb{C}]$ من $M_2(\mathbb{R})$.

38. لتكن R حلقة مع عنصر محايد، ولتكن $\text{End}(\langle R, +\rangle)$ حلقة التشاكلات الداخلية الموصوفة في الفصل 24. ليكن $a \in R$، وليكن $\lambda_a : R \longrightarrow R$ معطى بـ

$$\lambda_a(x) = ax$$

لـ $x \in R$.

أ. أثبت أنّ λ_a تشاكل داخلي لـ $\langle R, +\rangle$.

ب. أثبت أنّ $R' = \{\lambda_a \mid a \in R\}$ حلقة جزئية من $\text{End}(\langle R, +\rangle)$.

جـ. أثبت المناظرة لمبرهنة كايلي (Cayley's theorem) لـ R بإثبات أنّ R' للفرع (ب) تماثل R.

الفصل 27 المثاليات الأولية والأعظمية Prime and Maximal Ideals

طلبت التمارين من 12 إلى 14 في الفصل السابق، أن نزوّد بأمثلة لحلقات العامل R/N، حيث R و R/N لهما خصائص بنائية مختلفة جدًا، وسنبدأ مع أمثلة لهذا الوضع، وسنزوّد بحلول لتلك التمارين في أثناء تقدمنا.

1.27 مثال كما أُثبت في النتيجة 12.19 لعدد أولي p الحلقة $\mathbb{Z}_p$ – التي تماثل $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$– هي حقل. ▲

2.27 مثال الحلقة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ليست حلقة تامة؛ لأن:

$$(0, 1)(1, 0) = (0, 0),$$

تبيّن أنّ $(0,1)$ و $(1,0)$ قواسم لـ 0، لكن $N = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. الآن، N مثالي من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/N$ يماثل $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى التقابل $[(m,0)+N] \leftrightarrow m$، حيث $m \in \mathbb{Z}$. وعليه، حلقة العامل من حلقة يمكن أن تكون حلقة تامة على الرغم من أنّ الحلقة الأصلية ليست كذلك. ▲

3.27 مثال من السهل رؤية أن المجموعة الجزئية $N = \{0,3\}$ من $\mathbb{Z}_6$ تمثّل مثاليًّا من $\mathbb{Z}_6$ و $\mathbb{Z}_6/N$ لها ثلاثة عناصر، $0 + N$ ، $1 + N$ ، و $2 + N$، حيث تجمع، وتضرب بنمطٍ مُعَيَّنٍ كأنك تبيّن أنّ: $\mathbb{Z}_6/N \simeq \mathbb{Z}_3$ بالنسبة إلى التقابل

$$(0+N) \leftrightarrow 0, \quad \text{و} \quad (1+N) \leftrightarrow 1, \quad (2 + N) \leftrightarrow 2.$$

وتبين هذه أنه إذا كانت R ليست حتى حلقة تامة – أي إذا كانت R تحوي قواسم للصفر – فما زال محتملاً لـ R/N أن تكون حقلًا. ▲

4.27 مثال لاحظ أنّ $\mathbb{Z}$ حلقة تامة، لكن $\mathbb{Z}/6N \simeq \mathbb{Z}_6$ ليست كذلك، وقد بيّنت الأمثلة السابقة أنّ حلقة العامل يمكن أن تكون لها بنية تبدو أفضل من تلك التي للحلقة الأصلية، ويشير هذا المثال إلى أنّ بنية حلقة العامل قد تبدو أكثر سوءًا من تلك التي للحلقة الأصلية. ▲

كل حلقة غير صفرية R لها على الأقل مثاليان: **المثالي غير الفعلي (improper ideal)** R و**المثالي التافه (trivial ideal)** $\{0\}$، ولهذين المثاليين حلقتا العامل، هما: R/R – التي لها عنصر واحد فقط – و $R/\{0\}$ – والتي تماثل R، وهاتان الحالتان غير مشوقتين، كما هو للزمرة الجزئية من زمرة، **ومثالي غير تافه فعلي (proper nontrivial ideal)** من حلقة R هو مثالي N من R، بحيث إنّ $N \neq \{0\}$ و $N \neq R$.

بينما حلقات العامل لحلقات ولحلقات تامة يمكن أن تكون ذات فائدة كبيرة، كما أشارت إليه الأمثلة في الأعلى، فالنتيجة 6.27 التي تعقب مبرهنتنا الآتية تبين أنّ حلقة العامل لحقل في الحقيقة ليست مفيدة لنا.

5.27 مبرهنة إذا كانت R حلقة مع عنصر محايد، وكان N مثاليًّا من R يحوي عنصر وحدة، فإنّ $N = R$.

البرهان ليكن N مثاليًّا من R، وافترض أنَّ $u \in N$ عنصر وحدة في R، عندئذ: الشرط $rN \subseteq N$ لكل $r \in R$ يتضمن - إذا أخذنا $r = u^{-1}$ و $u \in N$، أنّ $u^{-1}u = 1$ في N، لكن $r\,N \subseteq N$ لكل $r \in R$ تؤدي إلى أنّ $r1 = r$ هو في N لكل $r \in R$، وهكذا $N = R$. ♦

6.27 نتيجة لا يحوي الحقل فعليًّا مثاليات غير تافهة.

البرهان لأنّ كل عنصر غير صفري في حقل هو عنصر وحدة، فينتج مباشرة عن المبرهنة 5.27 أنّ المثالي من حقل F، هو إما $\{0\}$ أو F كلها. ♦

المثاليات الأوّلية والأعظمية

نطرح السؤال: متى تكون حلقة العامل حقلاً؟ ومتى تكون حلقة تامة؟

يمكن أن يوسع التناظر مع الفصل 15 بقدر بسيط ليغطي هذه الحالة، حيث حلقة العامل هي حقل.

7.27 تعريف **المثالي الأعظمي من حلقة (maximal ideal of a ring)** R هو مثالي M يختلف عن R، بحيث إنه لا يوجد مثالي فعلي N من R يحوي M فعليًّا. ■

8.27 مثال ليكن p عددًا صحيحًا موجبًا أوليًّا، ونعلم أنّ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_p$، وبالتغاضي عن الضرب لحظة وأن نعدّ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_p$ زمر جمع، نعلم أنّ $p\mathbb{Z}$ زمرة بسيطة، بناءً على ذلك ومن خلال المبرهنة 18.15، $p\mathbb{Z}$ يجب أن تكون زمرة جزئية ناظمية أعظمية من $\mathbb{Z}$؛ ولأنّ $\mathbb{Z}$ زمرة إبدالية وكل زمرة جزئية هي زمرة جزئية ناظمية، نرى أنّ $p\mathbb{Z}$ هي زمرة جزئية فعلية أعظمية من $\mathbb{Z}$؛ ولأنّ $p\mathbb{Z}$ مثالي من الحلقة $\mathbb{Z}$، فينتج أنّ $p\mathbb{Z}$ مثالي أعظمي من $\mathbb{Z}$، ونعلم أنّ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ تماثل الحلقة $\mathbb{Z}_p$ ، وأنّ $\mathbb{Z}_p$ في الحقيقة حقلاً، وعليه، تكون $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ حقلاً. وهذه توضح المبرهنة الآتية. ▲

9.27 مبرهنة **(رديف المبرهنة 15.18)**: لتكن R حلقة إبدالية مع عنصر محايد، عندئذٍ: M مثالي أعظمي من R إذا وفقط إذا كان R/M حقلاً.

البرهان افترض أنّ M مثالي أعظمي من R. لاحظ أنه إذا كانت R حلقة إبدالية مع عنصر محايد، فإنَّ R/M أيضًا حلقة إبدالية غير صفرية مع عنصر محايد، ولأن $M \neq R$، والتي هي الحالة إذا كان M أعظميًّا. ليكن $(a + M) \in R/M$ مع $a \notin M$، حيث إنّ $a + M$ ليس العنصر المحايد للجمع لـ R/M. افترض أنّ $a + M$ ليس له معكوسٌ ضربي في R/M، عندئذ: المجموعة $(R/M)(a + M) = \{(r + M)(a + M) \mid (r + M) \in R/M\}$ لا تحوي $1 + M$. نرى بسهولة أن $(a{+}M)$ R/M مثالي غير تافه من R/M؛ لأنّ $a \notin M$، وهو أيضاً مثالي فعلي؛ لأنه لا يحوي $1 + M$. من خلال الفقرة الأخيرة للفصل 26، إذا كان $\gamma : R \to R/M$ هو التشاكل القانوني، فإن $\gamma^{-1}[(R/M)(a + M)]$ مثالي فعلي من R يحوي فعليًّا M، لكنّ هذه تناقض فرضنا أنّ M مثالي أعظمي، وهكذا $a + M$ يجب أن يكون له معكوس ضربي في R/M.

في المقابل، افترض أنّ R/M حقل، ومن خلال الفقرة الأخيرة للفصل 26، إذا كان N أي مثالي من R، بحيث إنّ $M \subset N \subset R$ و γ هو التشاكل القانوني من R وبصورة غامرة إلى R/M، فإن $\gamma[N]$ مثالي من R/M مع $\{(0+M)\} \subset \gamma[N] \subset R/M$؛ لكن هذه تناقض النتيجة 6.27 – التي تنصّ على أنّ الحقل R/M لا يحوي مثاليات غير تافهة فعلية، وعليه، إذا كان R/M حقلاً، فإنّ M أعظمي. ♦

10.27 مثال لأنّ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}_n$ حقل إذا وفقط إذا كان n أوليًّا، نرى أنّ المثاليات الأعظمية من $\mathbb{Z}$ هي بالضبط المثاليات $p\mathbb{Z}$ للأعداد الصحيحة الموجبة الأولية p. ▲

11.27 نتيجة الحلقة الإبدالية مع عنصر محايد هي حقل إذا وفقط إذا كان ليس لها مثاليات غير تافهة فعلية.

البرهان النتيجة 6.27 تبيّن أنّ الحقل ليس له مثاليات غير تافهة فعلية.

في المقابل، إذا كانت R حلقة إبدالية مع عنصر محايد، وليس لها مثاليات غير تافهة فعلية، فإنّ $\{0\}$ مثالي أعظمي و $R/\{0\}$ – الذي يماثل R – هو حقل من خلال المبرهنة 9.27. ♦

نعود الآن إلى سؤال الوَصْف – لحلقة إبدالية R مع عنصر محايد – للمثاليات $N \neq R$، بحيث إنّ R/N حلقة تامة، في الواقع الإجابة هنا واضحة، فحلقة العامل R/N ستكون حلقة تامة، إذا وفقط إذا كان $(a+N)(b+N) = N$ تضمن إما

$$a + N = N \quad \text{أو} \quad b + N = N.$$

هذه بالضبط هي العبارة: R/N ليس لها قواسم لـ 0؛ لأنّ مجموعة المشاركة N تؤدي دَوْرَ الـ 0 في R/N، وبالنظر إلى الممثلين، نرى أنّ هذا الشرط يكافئ القول: إنّ $ab \in N$ إما أن يؤدي إلى $a \in N$ أو $b \in N$.

12.27 مثال جميع المثاليات من $\mathbb{Z}$ هي على الصورة $n\mathbb{Z}$. لـ $n = 0$، لدينا $n\mathbb{Z} = \{0\}$ و $\mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$ التي هي حلقة تامة، ولـ $n > 0$، لدينا $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}_n$ حلقة تامة، إذا وفقط إذا كان n أوليًّا، وعليه، المثاليات غير الصفرية $n\mathbb{Z}$، حيث إنّ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ حلقة تامة هي على الصورة $p\mathbb{Z}$، حيث p أولي، وبالتأكيد $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ في الواقع حقل؛ لذلك، $p\mathbb{Z}$ مثالي أعظمي من $\mathbb{Z}$. لاحظ أنه ليكون ضرب أعداد صحيحة rs في $p\mathbb{Z}$، فإنّ العدد الأولي p يجب أن يقسم إما r أو s. دور الأعداد الأولية في هذا المثال يجعل استخدام كلمة أولي في التعريف الآتي ذا معنى. ▲

13.27 تعريف المثالي $N \neq R$ من حلقة إبدالية R هو **مثالي أولي (prime ideal)** إذا كان $ab \in N$ تضمن أنه إما $a \in N$ أو $b \in N$ لـ $a, b \in R$. ■

لاحظ أنّ $\{0\}$ مثالي أولي من $\mathbb{Z}$، وفي الواقع من أيّ حلقة تامة.

14.27 مثال لاحظ أنّ $\mathbb{Z} \times \{0\}$ مثالي أولي من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$؛ لأنه إذا كان $(a,b)(c,d) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$، فيجب أن نحصل على $bd = 0$ في $\mathbb{Z}$. هذا يضمن أنه إما $b = 0$ وهكذا $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ أو $d = 0$ وهكذا $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$. لاحظ أنّ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times \{0\})$ تماثل $\mathbb{Z}$، الذي هو حلقة تامة. ▲

تتضمن الملحوظات قبل المثال 12.27 برهانًا للمبرهنة الآتية، التي وُضِّحَتْ من خلال المثال 14.27.

15.27 مبرهنة لتكن R حلقة إبدالية مع عنصر محايد، وليكن $N \neq R$ مثاليًّا من R، عندئذٍ: R/N حلقة تامة إذا وفقط إذا كان N مثاليًّا أوليًّا من R.

16.27 نتيجة كل مثالي أعظمي من حلقة إبدالية R مع عنصر محايد هو مثالي أولي.

البرهان إذا كان M أعظميًّا من R، فإنّ R/M حقل، ومن ثَمَّ حلقة تامة، ولهذا السبب M مثالي أولي من خلال المبرهنة 15.27. ♦

المادة التي عرضت توًّا المتعلقة بالمثاليات الأولية والأعظمية مهمّة جدًّا، وسوف نستخدمها بكثرة، ويجب علينا أن نحفظ الأفكار الرئيسة جيدًا في أذهاننا، ويجب أيضًا أن نَعْرِفَ تعريفات المثاليات الأولية والأعظمية، ونفهمها، ويجب كذلك تذكر الحقائق الآتية التي أثبتناها.

لحلقة إبدالية R مع عنصر محايد: 1. المثالي M من R أعظمي إذا وفقط إذا كان R/M حقلًا. 2. المثالي N من R هو أولي إذا وفقط إذا كانت R/N حلقة تامة. 3. كل مثالي أعظمي من R هو مثالي أولي.

الحقول الأولية

سنكمل لبيان أنّ الحلقتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_n$ تشكلان أساسًا تبنى عليه جميع الحلقات مع عنصر محايد، وأنّ $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_p$ تؤديان دورًا مشابهًا للحقول كلها. لتكن R أي حلقة مع عنصر محايد 1، تذكر أنه لـ $n.1$ نعني $1+ \ldots +1+1$ لـ n حد لـِ $n > 0$ ، و $(-1)+\ldots+(-1)+(-1)$ لـِ $|n|$ حد لـِ $n < 0$، بينما $n.\ 1 = 0$ لـِ $n = 0$.

17.27 مبرهنة إذا كانت R حلقة مع عنصر محايد 1، فإنّ الدالة $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ المعطاة بـِ:

$$\phi(n) = n \cdot 1$$

لـِ $n \in \mathbb{Z}$ هي تشاكل من $\mathbb{Z}$ إلى R.

البرهان لاحظ أنّ

$$\phi(n+m) = (n+m) \cdot 1 = (n \cdot 1) + (m \cdot 1) = \phi(n) + \phi(m)$$

قانونا التوزيع في R يبيّنان أنّ:

$$\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n \text{ حد}}\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{m \text{ حد}} = \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{nm \text{ حد}}.$$

وعليه، $(n.1)\ (m.1) = (nm).1$ لـِ $n,m > 0$. وبصورة مشابهة مع قانوني التوزيع نرى أنه لكل $n,m \in \mathbb{Z}$، لدينا:

$$(n \cdot 1)(m \cdot 1) = (nm) \cdot 1.$$

وعليه،

$$\phi(nm) = (nm) \cdot 1 = (n \cdot 1)(m \cdot 1) = \phi(n)\phi(m)$$ ♦

18.27 نتيجة إذا كانت R حلقة مع عنصر محايد وبمميز $n > 1$، فإنّ R تحوي حلقة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_n$، وإذا كانت R لها مميز 0، فإنّ R تحوي حلقة جزئية تماثل $\mathbb{Z}$.

البرهان من خلال المبرهنة 17.27 يتبين أن الدالة $\phi{:}\mathbb{Z} \longrightarrow R$ المعطاة بـ $\phi\ (m) = m\ .1$ لـ $m \in \mathbb{Z}$ تمثل تشاكلًا ويجب أن تكون النواة مثاليّة من $\mathbb{Z}$، والمثاليات جميعها من $\mathbb{Z}$ هي على الصورة $s\mathbb{Z}$ لعنصر ما $s \in \mathbb{Z}$، ومن خلال المبرهنة 15.19 نرى أنه إذا كانت R لها مميز $n > 0$، فإنّ النواة لـ ϕ هي $n\mathbb{Z}$، عندئذ: الصورة $\phi\ [\mathbb{Z}] \leq R$ تماثل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$. أما إذا كان المميز لـ R هو 0، فإنّ $m.1 \neq 0$ لكل $m \neq 0$، وهكذا النواة لـِ ϕ هي $\{0\}$. وعليه، الصورة $\phi[\mathbb{Z}] \leq R$ تماثل $\mathbb{Z}$. ♦

19.27 مبرهنة الحقل F إما بمميز أولي p ويحوي حقلًا جزئيًا يماثل $\mathbb{Z}_p$ أو بمميز 0 ويحوي حقلًا جزئيًا يماثل $\mathbb{Q}$.

البرهان إذا كان المميز لـ F ليس 0، فالنتيجة في الأعلى تبيّن أنّ F يحوي حلقة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_n$ وعندئذ n يجب أن يكونَ أوليًّا p، وإلا فإن F يكون له قواسم لـ 0. إذا كان F بمميز 0، فإن F يجب أنّ يحوي حلقة جزئية تماثل $\mathbb{Z}$، وفي هذه الحالة النتيجتان 8.21 و 9.29 تُبيِّنان أنّ F يجب أن يحوي حقلاً للخوارج من هذه الحلقة الجزئية، وأنّ هذا الحقل يجب أن يماثل $\mathbb{Q}$. ♦

20.27 تعريف الحقلان $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Q}$ حقلان أوّليّان **(prime fields)**. ■

بنية المثالي من $F[x]$

خلال ما بقي من هذا الفصل، نفترض أنّ F حقل، ونعطي التعريف الآتي لحلقة إبدالية عامة R مع عنصر محايد، على الرغم من اهتمامنا فقط بالحالة $R= F[x]$. لاحظ أنه لحلقة إبدالية R مع عنصر محايد و $a \in R$، المجموعة $\{\ ra \mid r \in R\}$ هي مثالي من R يحوي العنصر a.

21.27 تعريف إذا كانت R حلقة إبدالية مع عنصر محايد و $a \in R$، فالمثالي $\{\ ra \mid r \in R\}$ لكل مضاعفات a هو **المثالي الرئيس المولَّد بـ (principal ideal generated by)** العنصر a، ويرمز له بالرمز $\langle a \rangle$، ومثالي N من R هو مثالي رئيس، إذا كان $N = \langle a \rangle$ لعنصر ما $a \in R$. ■

22.27 مثال كل مثالي من الحلقة $\mathbb{Z}$ هو على الصورة $n\mathbb{Z}$ ، وهو مولَّد بالعنصر n، وهكذا كل مثالي من $\mathbb{Z}$ هو مثالي رئيس. ▲

23.27 مثال المثالي $\langle x \rangle$ من $F[x]$ يتكون من جميع كثيرات الحدود في $F[x]$، التي حدّها الثابت صفر. ▲

المبرهنة الآتية هي تطبيق بسيط؛ لكنه مهم جدًّا لخوارزمية القسمة في $F[x]$ (انظر المبرهنة 1.23)، ومقام إثبات هذه المبرهنة بالنسبة إلى خوارزمية القسمة في $F[x]$ كإثبات أنّ زمرة جزئية من زمرة دورية هي دورية بالنسبة إلى خوارزمية القسمة في $\mathbb{Z}$.

24.27 مبرهنة إذا كان F حقلاً، فكل مثالي من $F[x]$ هو مثالي رئيس.

البرهان ليكن N مثاليًّا من $F[x]$، فإذا كان $N=\{0\}$، فإنّ $N=\langle 0\rangle$. افترض أنّ $N\neq\{0\}$، وليكن $g(x)$ عنصرًا غير صفري في N ذا درجة صغرى، فإذا كانت درجة $g(x)$ هي 0، فإنّ $g(x)\in F$ وهو عنصر وحدة، وهكذا من خلال المبرهنة 5.27، $N=F[x]=\langle 1\rangle$، وعليه، فإنّ N رئيس. إذا كانت الدرجة لـ $g(x)$ أكبر أو تساوي 1، وكان $f(x)$ أي عنصر في N، فعندئذ: ومن خلال المبرهنة 1.23 $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$، حيث $r(x)=0$ أو (درجة $g(x)$) $<$ (درجة $r(x)$). الآن، $f(x)\in N$ و $g(x)\in N$ تؤديان إلى أنّ $f(x)-g(x)\,q(x)=r(x)$ في N من خلال تعريف المثالي؛ ولأن $g(x)$ عنصر غير صفري في N ذو درجة صغرى، فيجب أن يكون لدينا $r(x)=0$. وعليه، $f(x)=g(x)q(x)$ و $N=\langle g(x)\rangle$. ♦

يمكننا الآن وصف المثاليات الأعظمية من $F[x]$. هذه خطوة حاسمة في إنجاز **هدفنا الأساسي**: لإثبات أنّ أيّ كثيرة حدود غير ثابتة $f(x)$ في $F[x]$ لها صفر في حقل ما E يحوي F.

25.27 مبرهنة المثالي $\langle p(x)\rangle\neq\{0\}$ من $F[x]$ هو أعظمي إذا وفقط إذا كان $p(x)$ غير مختزل على F.

البرهان افترض أنّ $\langle p(x)\rangle\neq\{0\}$ مثالي أعظمي من $F[x]$، عندئذ: $\langle p(x)\rangle\neq F[x]$، وهكذا $p(x)\notin F$. ليكن $p(x)=f(x)g(x)$ تحليلاً لـ $p(x)$ في $F[x]$؛ لأنّ $\langle p(x)\rangle$ مثالي أعظمي، فهو أيضًا مثالي أولي، وعليه $(f(x)g(x))\in\langle p(x)\rangle$ تؤدي إلى أنّ $f(x)\in\langle p(x)\rangle$ أو $g(x)\in\langle p(x)\rangle$؛ أي إن $p(x)$ إما عاملاً لـ $f(x)$ أو عاملاً لـ $g(x)$؛ لكن لا يمكن عندئذ أن يكون لدينا درجتا $f(x)$ و $g(x)$ أقل من درجة $p(x)$، وهذه تثبت أنّ $p(x)$ غير مختزل على F.

في المقابل، إذا كان $p(x)$ غير مختزل على F، افترض أنّ N مثالي، حيث إنّ $\langle p(x)\rangle\subseteq N\subseteq F[x]$، ومن خلال المبرهنة 24.27، N هو مثالي رئيس، وهكذا $N=\langle g(x)\rangle$ لعنصر ما $g(x)\in N$، عندئذ: $p(x)\in N$ تؤدي إلى أنّ $p(x)=g(x)q(x)$ لعنصر ما $q(x)\in F[x]$. لكن $p(x)$ غير مختزل، التي تؤدي إلى أنه إما $g(x)$ أو $q(x)$ درجته 0. فإذا كان $g(x)$ درجته 0 − أي إنه ثابت غير صفري في F − فإنّ $g(x)$ عنصر وحدة في $F[x]$، وهكذا $\langle g(x)\rangle=N=F[x]$، وإذا كان $q(x)$ درجته 0، فإنّ $q(x)=c$، حيث $c\in F$ و $g(x)=(1/c)p(x)$ في $\langle p(x)\rangle$، وهكذا $N=\langle p(x)\rangle$. وعليه، فمن المستحيل أنّ $\langle p(x)\rangle\subset N\subset F[x]$، وهكذا $\langle p(x)\rangle$ أعظمي. ♦

26.27 مثال يبين المثال 9.23 أنّ x^3+3x+2 غير مختزل في $\mathbb{Z}_5[x]$، وهكذا $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^3+3x+2\rangle$ حقل، وبالمثل، المبرهنة 11.22 تُبَيِّنُ أنّ x^2-2 غير مختزل في $\mathbb{Q}[x]$، وهكذا $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle$ حقل. سوف نفحص لاحقًا مثل هذه الحقول بتفصيل أكثر. ▲

تطبيق على وحدانية التحليل في $F[x]$

في الفصل 23 ذكرنا المبرهنة 27.27 الآتية من غير برهان. (انظر المبرهنة 18.23) . بافتراض صحة هذه المبرهنة، وأثبتنا في الفصل 23 أنّ تحليل كثيرات الحدود في $F[x]$ إلى كثيرات حدود غير مختزلة هو وحيد، باستثناء ترتيب العوامل وعناصر الوحدة في F، وقد أخَّرْنَا إثبات المبرهنة 27.27 لغاية الآن؛ لأنّ الآلية التي طورناها تُمَكِّنُنَا من إعطاء برهان بسيط من أربعة أسطر، ويملأ الفجوة في برهان وحدانية التحليل في $F[x]$.

27.27 مبرهنة لتكن $p(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$، فإذا كانت $p(x)$ تقسم $r(x)s(x)$ لـ $r(x), s(x) \in F[x]$، فإما $p(x)$ تقسم $r(x)$ أو $p(x)$ تقسم $s(x)$.

البرهان افترض أنّ $p(x)$ تقسم $r(x)s(x)$، عندئذ: $r(x)s(x) \in \langle p(x)\rangle$، الذي هو أعظمي من خلال المبرهنة 25.27، لهذا السبب $\langle p(x)\rangle$ مثالي أولي من خلال النتيجة 16.27، إذن، $r(x)s(x) \in \langle p(x)\rangle$ تؤدي إما إلى $r(x) \in \langle p(x)\rangle$ وهي تعطي أنّ $p(x)$ تقسم $r(x)$ – أو أن $s(x) \in \langle p(x)\rangle$ وهي تعطي أنّ $p(x)$ تقسم $s(x)$. ◆

عرض أولي لهدفنا الأساسي

نختم هذا الفصل بمخطط لإثبات هدفنا الأساسي في الفصل 29. لدينا الأفكار جميعها للبرهان، وربما بإمكانك أن تكملَ التفاصيل من هذا المخطط.

الهدف الأساسي: ليكن F حقلاً، ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$. أثبت أنه يوجد حقل E يحوي F، ويحوي صفرًا α لـ $f(x)$.

مخطط البرهان

1– ليكن $p(x)$ عاملًا غير مختزل لـ $f(x)$ في $F[x]$.

2– ليكن E $F[x] / \langle p(x)\rangle$. (انظر المبرهنتين 5.27 و 9.27).

3– أثبت أنه لا يوجد عنصران مختلفان من F في مجموعة المشاركة نفسها في $F[x]/\langle p(x)\rangle$، واستنتج أنه يمكننا أن نَعدّ F (تبعاً للتماثل) حقلاً جزئيًا من E.

4– لتكن α مجموعة المشاركة $x + \langle p(x)\rangle$ في E. أثبت أنه لتشاكل التعويض $\phi_\alpha : F[x] \to E$، لدينا $\phi_\alpha(f(x)) = 0$. أي إنّ: α صفر لـ $f(x)$ في E.

سيعطى مثال لحقل يبنى وفق هذا المخطط في الفصل 29، وسنعطي جدولي الجمع والضرب للحقل $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$ ، ونثبت أنّ هذا الحقل له أربعة عناصر، مجموعات المشاركة

$$0 + \langle x^2 + x + 1\rangle ، 1 + \langle x^2 + x + 1\rangle ، x + \langle x^2 + x + 1\rangle$$

و

$$(x + 1) + \langle x^2 + x + 1\rangle$$

نعيد تسمية مجموعات المشاركة هذه لتصبح 0، 1، α و $\alpha + 1$ على الترتيب، ولنحصل على الجدولين 20.29 و 21.29 للجمع والضرب في هذا الحقل ذي العناصر الأربعة، لنرى كيف بُني هذان الجدولان، تذكر أننا في حقل مميزه 2؛ ولذلك، $\alpha + \alpha = \alpha(1+1) = \alpha 0 = 0$، وتذكر أيضًا، أنّ α هي صفر لـ $x^2 + x + 1$ ؛ ولذلك، $\alpha^2+\alpha+1=0$، وبناءً على ذلك، $\alpha^2 = -\alpha - 1 = \alpha + 1$.

■ تمارين 27

حسابات

1. أوجد جميع المثاليات الأوّلية وجميع المثاليات الأعظمية من $\mathbb{Z}_6$.

2. أوجد جميع المثاليات الأوّلية وجميع المثاليات الأعظمية من $\mathbb{Z}_{12}$.

3. أوجد جميع المثاليات الأوّلية وجميع المثاليات الأعظمية من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4. أوجد جميع المثاليات الأوّلية وجميع المثاليات الأعظمية من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

5. أوجد جميع العناصر $c \in \mathbb{Z}_3$، حيث إنّ $\mathbb{Z}_3[x] / \langle x^2 + c \rangle$ حقل.

6. أوجد جميع العناصر $c \in \mathbb{Z}_3$، حيث إنّ $\mathbb{Z}_3[x] / \langle x^3 + x^2 + c \rangle$ حقل.

7. أوجد جميع العناصر $c \in \mathbb{Z}_3$، حيث إنّ $\mathbb{Z}_3[x] / \langle x^3 + cx^2 + 1 \rangle$ حقل.

8. أوجد جميع العناصر $c \in \mathbb{Z}_5$، حيث إنّ $\mathbb{Z}_5[x] / \langle x^2 + x + c \rangle$ حقل.

9. أوجد جميع العناصر $c \in \mathbb{Z}_5$، حيث إنّ $\mathbb{Z}_5[x] / \langle x^2 + cx + 1 \rangle$ حقل.

مفاهيم

في التمارين من 10 إلى 13 صَحِّح الحدّ المكتوب بخط مائل، دون الرجوع إلى الكتاب– إن كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

10. المثالي الأعظمي من حلقة R هو مثالي غير مُحْتَوَى في أيّ مثالي آخر من R.

11. المثالي الأولي من حلقة إبدالية R هو مثالي على الصورة $pR = \{pr \mid r \in R\}$ لعنصر ما أولي p.

12. المثالي الأولي هو حقل ليس له حقل جزئي فعلي.

13. المثالي الرئيس من حلقة إبدالية مع عنصر محايد هو مثالي N، مع الخاصية أنه يوجد $a \in N$، بحيث إنّ N هو المثالي الأصغر الذي يحوي a.

14. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_____ أ. كل مثالي أولي من كل حلقة إبدالية مع عنصر محايد هو مثالي أعظمي.

_____ ب. كل مثالي أعظمي من كل حلقة إبدالية مع عنصر محايد هو مثالي أولي.

_____ جـ. $\mathbb{Q}$ هي الحقل الجزئي الأولي من ذاتها.

_____ د. الحقل الجزئي الأولي من $\mathbb{C}$ هو $\mathbb{R}$.

_____ هـ. كل حقل يحوي حقلاً جزئيًا يماثل حقلاً أوليًا.

_____ و. الحلقة مع قواسم للصفر يمكن أن تحوي أحد الحقول الأولية بوصفها حلقة جزئية.

______ ز. كل حقل مميزه صفر يحوي حقلاً جزئيًا يماثل $\mathbb{Q}$.

______ ح. ليكن F حقلاً، ولأن $F[x]$ ليس له قواسم لـ 0، فكل مثالي من $F[x]$ هو مثالي أولي.

______ ط. ليكن F حقلاً. كل مثالي من $F[x]$ هو مثالي رئيس.

______ ي. ليكن F حقلاً. كل مثالي رئيس من $F[x]$ هو مثالي أعظمي.

15. أوجد مثاليًا أعظميًا من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

16. أوجد مثاليًا أوليًا من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ لا يكون أعظميًا.

17. أوجد مثاليًا فعليًا غير تافه من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ لا يكون أوليًا.

18. هل $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 5x + 6\rangle$ حقل؟ لماذا؟

19. هل $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 6x + 6\rangle$ حقل؟ لماذا؟

براهين مختصرة

20. أعطِ اختصارًا بجملة أو جملتين لجزء "فقط إذا" للمبرهنة 9.27.

21. أعطِ اختصارًا بجملة أو جملتين لجزء "إذا" للمبرهنة 9.27.

22. أعطِ اختصارًا بجملة أو جملتين للمبرهنة 24.27.

23. أعطِ اختصارًا بجملة أو جملتين لجزء "فقط إذا" للمبرهنة 25.27.

براهين

24. لتكن R حلقة إبدالية منتهية مع عنصر محايد. أثبت أنّ كل مثالي أولي من R هو مثالي أعظمي.

25. تخبرنا النتيجة 18.27 بأنّ كلّ حلقة مع عنصر محايد تحوي حلقة جزئية تماثل إما $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{Z}_n$ لعنصر ما n. فهل من الممكن أنّ حلقة مع عنصر محايد تحوي في آنٍ واحد حلقتين جزئيتين تماثلان $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}_m$ لـ $n \neq m$؟ إذا كانت ممكنة، فأعطِ مثالاً. وإذا كانت مستحيلة فأثبتها.

26. بإكمال التمرين 25، هل من الممكن أنّ حلقة مع عنصر محايد تحوي في آن واحد حلقتين جزئيتين تماثلان الحلقين $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Z}_q$ لأوليين مختلفين p و q. أعطِ مثالاً أو أثبت أنها مستحيلة.

27. باتباع الفكرة في التمرين 26، هل من الممكن أنّ حلقة تامّة تحوي حلقتين جزئيتين تماثلان $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Z}_q$ لـ $p \neq q$ و p و q كلاهما أولي؟ أعطِ سببًا أو توضيحًا.

28. أثبت مباشرة من تعريفي المثاليات الأولية والأعظمية أنّ كل مثالي أعظمي من حلقة إبدالية R مع عنصر محايد هو مثالي أولي. [افترض أنّ: M أعظمي من R، $ab \in M$ و $a \notin M$. ناقش الآتي: أصغر مثالي $\{ra + m \mid r \in R, m \in M\}$ يحوي a و M يجب أن يحوي 1، عبّر عن 1 على الصورة $ra+m$، واضرب بـ b].

29. أثبت أنّ N مثالي أعظمي من حلقة R إذا وفقط إذا كانت R/N حلقة بسيطة **(simple ring)** – أي إنه غير تافه، وليس له مثاليات غير تافهة فعلية (قارن بالمبرهنة 18.15).

30. أثبت أنه إذا كان F حقلاً، فإنّ كل مثالي أولي غير تافهٍ فعلي من $F[x]$ هو أعظمي.

31. ليكن F حقلاً و $f(x),\ g(x) \in F[x]$. أثبت أنّ $f(x)$ يقسم $g(x)$ إذا وفقط إذا كان $g(x) \in \langle f(x) \rangle$.

32. ليكن F حقلاً، وليكن $f(x), g(x) \in F[x]$. أثبت أنّ:

$$N = \{r(x)f(x) + s(x)g(x) \mid r(x), s(x) \in F[x]\}$$

مثالي من $F[x]$. أثبت أنه إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ لهما درجتان مختلفتان و $N \neq F[x]$، فإنّ $f(x)$ و $g(x)$ ليس كلاهما غير مختزل على F.

33. استخدم المبرهنة 24.27 في إثبات تكافؤ هاتين المبرهنتين:

المبرهنة الأساسية في الجبر (Fundamental Theorem of Algebra): كل كثيرة حدود غير ثابتة في $\mathbb{C}[x]$ لها صفر في $\mathbb{C}$.

مبرهنة المواقع الصفرية لـ $\mathbb{C}[x]$ (Nullstellensatz for $\mathbb{C}[x]$): ليكن $f_1(x), \ldots, f_r(x) \in \mathbb{C}[x]$، وافترض أنّ كل صفر $\alpha \in \mathbb{C}$ لكثيرات الحدود هذه جميعها هو أيضًا صفر لكثيرة حدود $g(x)$ في $\mathbb{C}[x]$. عندئذ، قوة ما لـ $g(x)$ هي في المثالي الأصغر من $\mathbb{C}[x]$، الذي يحوي كثيرات الحدود $f_r(x), \ldots, f_1(x)$

هناك نوع من الحساب للمثاليات في الحلقة. التمارين الثلاثة الآتية تُعَرِّفُ جمع، وضرب، وخارج قسمة مثاليات.

34. إذا كان A و B مثاليين من حلقة R، **الجمع (sum)** $A + B$ لـ A و B مُعَرَّف بـ:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

أ. أثبت أنّ $A + B$ مثالي. **ب.** أثبت أنّ $A \subseteq A + B$ و $B \subseteq A + B$.

35. ليكن A و B مثاليين من حلقة R. **الضرب (product)** AB لـ A و B مُعَرَّف بـ:

$$AB = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A,\ b_i \in B,\ n \in Z^+ \right\}.$$

أ. أثبت أنّ AB مثالي من R . **ب.** أثبت أنّ $AB \subseteq (A \cap B)$.

36. ليكن A و B مثاليين من حلقة R. **خارج القسمة (quotient)** $A : B$ لـ A على B مُعَرَّف بـ:

$$A{:}B = \{r \in R \mid rb \in A \text{ لكل } b \in B\}$$

أثبت أنّ $A : B$ مثالي من R.

37. أثبت أنّ لحقل F، المجموعة S للمصفوفات على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لـ $a, b \in F$ هي **مثالي أيمن (right ideal)** لكن ليست **مثاليًا أيسر (left ideal)** من $M_2(F)$ أيْ أنْ تثبت أنَّ S حلقة جزئية مغلقة بالنسبة إلى الضرب من اليمين بأيّ عنصر من $M_2(F)$، ولكن ليست مغلقة بالنسبة إلى الضرب من اليسار.

38. أثبت أنّ حلقة المصفوفات $M_2(\mathbb{Z}_2)$ هي حلقة بسيطة – أي إنّ $M_2(\mathbb{Z}_2)$ ليس لها مثاليات غير تافهة فعلية.

الفصل 28 أساسيات جروبنر للمثاليات[1] Gröbner Bases for Ideals

يعطي هذا الفصل مقدّمة مختصرة في علم الهندسة، وبوصفها حالة خاصة، نحن مهتمون بمسألة إيجاد وصف بأبسط ما نستطيع لمجموعة الأصفار المشتركة لعدد منتهٍ من كثيرات الحدود، وحتى نكمل هدفنا في فصل واحد من هذا الكتاب، سنبدأ بسرد بعض المبرهنات من غير برهان، وللدراسة الإضافية والبراهين ننصح بكتاب (Adams and Loustaunau [23]).

المتنوعات الجبرية والمثاليات

ليكن F حقلاً، تذكر أنّ $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ هي حلقة كثيرات الحدود لـ n من غير المعينات x_1، x_2، ...، x_n بمعاملات في F، لنجعل F^n هو الضرب الديكارتي $F \times F \times \dots \times F$ لـ n عامل؛ ولنُسهِّل الكتابة، سنرمز للعنصر $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ من F^n بـ $\mathbf{a}$، بحرف غامق. باستخدام تنظيم مشابه، لنجعل $F[\mathbf{x}] = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$، لكل $\mathbf{a} \in F^n$، لدينا تشاكل تعويض $\phi_{\mathbf{a}}: F[\mathbf{x}] \longrightarrow F$ كما هو في المبرهنة 4.22، أي إنه لـ $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[\mathbf{x}]$ نُعَرِّف $\phi_{\mathbf{a}}(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{a}) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$، برهان أنَّ $\phi_{\mathbf{a}}$ تشاكل ينتج من الخصائص التجميعية، والإبدالية، والتوزيعية للعمليات في $F[\mathbf{x}]$ وF، وكما في حالة غير المعين الواحد، العنصر $\mathbf{a}$ من F^n هو صفر لـ **(zero of)** $f(\mathbf{x}) \in F[\mathbf{x}]$ إذا كان $f(\mathbf{a}) = 0$، إضافة إلى ذلك، سنختصر فيما سيأتي كثيرة الحدود $f(\mathbf{x})$ بـ "f".

في هذا الفصل نناقش مسألة إيجاد أصفار مشتركة في F^n لعدد منتهٍ من كثيرات الحدود $f_1, f_2, \dots, f_r$ في $F[\mathbf{x}]$، إذ إنَّ إيجاد الخصائص الهندسية لمجموعة هذه الأصفار المشتركة جميعها ودراستها هما موضوع الهندسة الجبرية.

1.28 تعريف لتكن S مجموعة جزئية منتهية من $F[\mathbf{x}]$. **المتنوعة الجبرية (algebraic variety)** $V(S)$ في F^n، هي مجموعة جميع الأصفار المشتركة في F^n لكثيرات الحدود في S. ■

في أمثلتنا التوضيحية – التي عادة تتضمن على الأكثر ثلاثة غير معينات – نستخدم x، y، z بدلاً من x_1، x_2 و x_3.

2.28 مثال لتكن $S = \{2x + y - 2\} \subset \mathbb{R}[x,y]$. المتنوعة الجبرية $V(S)$ في $\mathbb{R}^2$ هي خط مستقيم مقطعه السيني 1 ومقطعه الصادي 2. ▲

نترك للتمرين 29 البرهان المباشر بأنه لـ r عنصر $f_1, f_2, \dots, f_r$ من حلقة إبدالية R مع عنصر محايد، المجموعة:

$$I = \{c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_r f_r \mid c_i \in R, i = 1, \dots, r\}$$

هي مثالي من R، نرمز لهذا المثالي بـ $\langle f_1, f_2, \dots, f_r \rangle$. نحن مهتمون بالحالة

$R = F[\mathbf{x}]$ حيث c_i و f_i جميعها كثيرات حدود في $F[\mathbf{x}]$. نعدّ الـ c_i "بوصفها معاملات كثيرات حدود". فمن خلال بنيته، هذا المثالي I هو أصغر مثالي يحوي كثيرات الحدود $f_1, f_2, \dots, f_r$ يمكن أيضًا أن يوصف بأنه تقاطع جميع المثاليات التي تحوي كثيرات الحدود هذه.

---

[1] لن يستخدم هذا الفصل في بقية الكتاب

3.28 تعريف ليكن I مثاليًا من حلقة إبدالية R مع عنصر محايد. مجموعة جزئية $\{b_1, b_2, \ldots , b_r\}$ من I هي أساس (**basis**) لـ I، إذا كان $I = \langle b_1, b_2, \cdots , b_r\rangle$. ■

بخلاف الوضع في الجبر الخطي، ليس هناك حاجة لاستقلالية العناصر في الأساس، أو وحدانية التمثيل لعنصر من المثالي بدلالة الأساس.

4.28 مبرهنة ليكن $f_1, f_2, \ldots f_r \in F[\mathbf{x}]$. مجموعة الأصفار المشتركة في F^n لكثيرات الحدود f_i لـ $i = 1, 2, \ldots, r$ هي مجموعة الأصفار نفسها المشتركة في F^n لكل كثيرات الحدود في كامل المثالي $I = \langle f_1, f_2, \cdots , f_r\rangle$.

البرهان ليكن:

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_r f_r \qquad (1)$$

أي عنصر في I وليكن $\mathbf{a} \in F^n$ صفرًا مشتركًا لـ $f_1, f_2, \ldots, f_r$ بتطبيق تشاكل التعويض $\phi_{\mathbf{a}}$ على المعادلة (1) نحصل على:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}) &= c_1(\boldsymbol{a})f_1(\boldsymbol{a}) + c_2(\boldsymbol{a})f_2(\boldsymbol{a}) + \cdots + c_r(\boldsymbol{a})f_r(\boldsymbol{a}) \\ &= c_1(\boldsymbol{a})0 + c_2(\boldsymbol{a})0 + \cdots + c_r(\boldsymbol{a})0 = 0, \end{aligned}$$

وهذه تُبيّن أنّ **a** أيضًا صفر لكل كثيرة حدود f في I، وبالطبع، صفر لكل كثيرة حدود في I سيكون صفرًا لكل f_i؛ لأنّ كل $f_i \in I$. ♦

لمثالي I من $F[\mathbf{x}]$ جعلنا $V(I)$ مجموعة الأصفار المشتركة لكل العناصر في I. يمكننا أن نجمل المبرهنة 4.28 على النحو:

$$V(\{f_1, f_2, \cdots, f_r\}) = V(\langle f_1, f_2, \cdots, f_r\rangle)$$

نذكر مبرهنة أساس هلبرت من غير برهان. (انظر [23] Adams and Loustaunau)

5.28 مبرهنة (**مبرهنة أساس هلبرت (Hilbert Basis Theorem)**) كل مثالي من $F[x_1, x_2, \cdots , x_n]$ له أساس منتهٍ.

هدفنا: إذا أعطيت أساس لمثالي I من $F[\mathbf{x}]$، عَدِّله إن أمكن ليصبح أساسًا يُظْهِرُ بصورة أفضل تركيب I وهندسة المتنوعة الجبرية المرافقة $V(I)$.

تزوّد المبرهنة الآتية بأداة لهذه الغاية، عليك ملاحظة أنَّ المبرهنة تعطي معلومات عن خوارزمية القسمة التي لم نذكرها في المبرهنة 1.23، وهنا قد استخدمنا الرمز نفسه كما في المبرهنة 1.23، لكن استخدمنا **x** بدلاً من x. إذا كان: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,h(\mathbf{x})$ في $F(\mathbf{x})$، فإنّ $g(\mathbf{x})$ و $h(\mathbf{x})$ يسميان **"قواسم (divisors)"** أو **"عوامل (factors)"** لـ $f(\mathbf{x})$.

6.28 مبرهنة (خاصية خوارزمية القسمة) لتكن $f(\mathbf{x})$، $g(\mathbf{x})$، $q(\mathbf{x})$ و$r(\mathbf{x})$ وكثيرات حدود في $F[\mathbf{x}]$، بحيث إنّ $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\, q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$. الأصفار المشتركة في F^n لـ $g(\mathbf{x})$ و $f(\mathbf{x})$ هي نفسها الأصفار المشتركة لـ $r(\mathbf{x})$ و $g(\mathbf{x})$، أيضًا القواسم المشتركة في $F[\mathbf{x}]$ لـ $f(\mathbf{x})$ و $g(\mathbf{x})$ هي نفسها القواسم المشتركة لـ $g(\mathbf{x})$ و $r(\mathbf{x})$.

إذا كان $f(\mathbf{x})$ و $g(\mathbf{x})$ عنصرين في أساسٍ لمثالي I من $F[\mathbf{x}]$، فإن استبدال $f(\mathbf{x})$ بـ $r(\mathbf{x})$ في الأساس سيبقى يعطي أساسًا لـ I.

البرهان إذا كان $\mathbf{a} \in F^n$ صفرًا مشتركًا لـ $g(\mathbf{x})$ و $r(\mathrm{x})$، فإنه بتطبيق $\phi_{\mathbf{a}}$ لطرفي المعادلة $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\, q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$، نحصل على: $f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})\, q(\mathbf{a}) + r(\mathbf{a}) = 0q(\mathbf{a}) + 0 = 0$، وهكذا $\mathbf{a}$ صفر مشترك لـ $g(\mathbf{x})$ و $f(\mathbf{x})$. إذا كان $\mathbf{b} \in F[\mathbf{x}]$ صفرًا مشتركًا لـ $f(\mathbf{x})$ و $g(\mathbf{x})$، فإنّ تطبيق $\phi_{\mathbf{b}}$ يعطي $f(\mathbf{b}) = g(\mathbf{b})\, q(\mathbf{b}) + r(\mathbf{b})$، وهكذا $0 = 0q(\mathbf{b}) + r(\mathbf{b})$ ونرى أنّ $r(\mathbf{b}) = 0$، إضافة إلى أنّ $g(\mathbf{b}) = 0$.

البرهان المتعلق بالقواسم المشتركة هو بصورة جوهرية البرهان في الأعلى نفسه، ويترك للتمرين 30.

أخيرًا، ليكن B أساسًا لمثالي I، وليكن $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \in B$، وليكن، $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$، ولتكن B' المجموعة الناتجة عن B باستبدال $f(\mathbf{x})$ بـ $r(\mathbf{x})$، وليكن I' المثالي الذي أساسه هو B'. ولتكن S المجموعة الناتجة عن B بضم $r(\mathbf{x})$ إلى B، لاحظ أيضًا أنّ S يمكن الحصول عليها بضم $f(\mathbf{x})$ إلى B'. المعادلة $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\, q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$ تبيّن أنّ $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{I}'$؛ وهكذا لدينا $B' \subseteq S \subseteq I$. وعليه، S أساس لـ المعادلة $r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})$ تبيّن أنّ $r(\mathbf{x}) \in I$، وهكذا لدينا $B \subseteq S \subseteq I$. وعليه، S أساس لـ I؛ لهذا السبب $I' = \mathrm{I}$ و B' أساس لـ I. ♦

توضيح خطي مألوف

الأسلوب الأساسي لحل مسألة في الجبر الخطي هو إيجاد جميع الحلول المشتركة لعدد منتهٍ من المعادلات الخطية، سنتخلى في هذه اللحظة عن عادتنا في عدم كتابة "$f(\mathbf{x}) = 0$" لكثيرة حدود غير صفرية، وسنحل مسألة نموذجية، كما نفعل في مقرر دراسي للجبر الخطي.

7.28 مثال **(الحل كما في مقرر دراسي للجبر الخطي)** أوجد جميع الحلول في $\mathbb{R}^3$ للنظام الخطي

$$x + y - 3z = 8$$

$$2x + y + z = -5.$$

الحل نضرب المعادلة الأولى بـ 2-، ونضيفها للمعادلة الثانية، فنحصل على النظام الجديد:

$$x + y - 3z = 8$$

$$-y + 7z = -21$$

الذي له مجموعة الحل نفسها في $\mathbb{R}^3$ كما للنظام السابق. ولأيّ قيمة z، نستطيع أن نجد قيمة y المقابلة، وذلك من المعادلة الثانية، ومن ثم نحدد x من المعادلة الأولى، بإبقاء z غير مُعَين نحصل على $\{(-4z - 13,\ 7z + 21,\ z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ بوصفها مجموعة حل، التي هي خط مستقيم يمرّ من خلال النقطة (0, 21, 13-) في فضاء إقليدس ثلاثي الأبعاد. ▲

باستخدام رموز هذا الفصل، المسألة في المثال السابق يمكن أن يعبر عنها على النحو الآتي:

$$\text{صِفْ } V(\langle x + y - 3z - 8,\ 2x + y + z + 5\rangle) \text{ في } \mathbb{R}^3$$

وقد حللناها بإيجاد أساس أكثر نفعًا، نعني:

$$\{x + y - 3z - 8, -y + 7z + 21\}$$

لاحظ أنّ العنصر الثاني $-y + 7z + 21$ من هذا الأساس الجديد يمكن الحصول عليه من كثيرتي الحدود في الأساس الأصلي بوصفه باقي $r\ (x, y, z)$ لعملية القسمة، أي إنّ:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & & & \\ \hline x + y - 3z - 8 & 2x + & y + & z + & 5 \\ & 2x + & 2y - & 6z - & 16 \\ \hline & & -y + & 7z + & 21 \end{array}$$

وعليه، $2x + y + z + 5 = (x + y - 3z - 8)(2) + (-y + 7z + 21)$ هو تعبيرٌ على الصورة $f\ (x, y, z) = g(x, y, z)\ q(x, y, z) + r(x, y, z)$. نستبدل كثيرة الحدود f بكثيرة الحدود r كما في المبرهنة 6.28، التي تضمن لنا أنّ $V\ (\langle f, g\rangle) = V\ (\langle g, r\rangle)$ وأن $\langle f, g\rangle = \langle g, r\rangle$، وقد اخترنا في المثال 7.28 مسألة بسيطة جدًّا من خطوة واحدة، على أيّ حال، من الواضح أنَّ الطريقة المقدمة في مقرر دراسي للجبر الخطي لحل نظام خطي، يمكن أن يُعَبَّر عنها بدلالة تطبيق عملية متكررة لخوارزمية القسمة، لتغيير أساس مثالي معطًى إلى أساس يوضح الهندسة للمتنوعة الجبرية المرافقة بصورة أفضل.

توضيح غير معين مفرد

افترض أننا نريد إيجاد المتنوعة $V(I)$ في F ، المرافقة لمثالي I من $F[x]$، حلقة كثيرات الحدود لغير معين مفرد x من خلال المبرهنة 24.27، كل مثالي من $F[x]$ هو رئيس، وهكذا يوجد $f(x) \in F[x]$، حيث إنّ $I = \langle f(x) \rangle$، وعليه، $V(I)$ يتكوّن من أصفار كثيرة حدود مفردة، و$\{f(x)\}$ من المحتمل أنه أساس لـ I بوصفه أبسط ما يمكننا أن نطلب، ونعطي مثالاً يوضّح الحساب لمثل هذا المولِّد المفرد $f(x)$ لـ I، في حالة كان الأساس المعطى لـ I يحوي أكثر من كثيرة حدود واحدة، فلأن كثيرة الحدود في $\mathbb{R}[x]$ لها فقط عدد منتهٍ من الأصفار في $\mathbb{R}$، نتوقع ألا يكون هناك أصفار مشتركة لكثيرتي حدود أو أكثر اختيرت بصورة عشوائية في $\mathbb{R}[x]$؛ لكننا بنينا الأساس في مثالنا بحذر!

8.28 مثال لنَصِفَ المتنوعة الجبرية V من $\mathbb{R}$ المتكوّنة من الأصفار المشتركة لـ:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \text{ و } g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8.$$

نريد إيجاد أساس جديد لـ $\langle f, g \rangle$ يحتوي على كثيرات حدود درجتها أصغر ما أمكن؛ لذلك، نستخدم خوارزمية القسمة $f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ في المبرهنة 1.23، حيث $r(x)$ ستكون درجتها على الأكثر 2، عندئذٍ: نستبدل الأساس $\{f, g\}$ بالأساس $\{g, r\}$.

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\ \hline
x^3 + 3x^2 - 6x - 8 & x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\
 & x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 8x \\ \cline{2-2}
 & -2x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \\
 & -2x^3 - 6x^2 + 12x + 16 \\ \cline{2-2}
 & 9x^2 - 9x - 18
\end{array}$$

لأن أصفار $9x^2 - 9x - 18$ هي نفسها أصفار $x^2 - x - 2$ ، جعلنا $r(x) = x^2 - x - 2$، وأخذنا الأساس الجديد

$$\{g, r\} = (x^3 + 3x^2 - 6x - 8,\ x^2 - x - 2)$$

بقسمة $g(x)$ على $r(x)$ نحصل على الباقي $r_1(x)$، سنكون الآن قادرين على إيجاد أساس $\{r(x), r_1(x)\}$ يتألف من كثيرتي حدود درجتاهما على الأكثر 2.

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 4 \\ \hline
x^2 - x - 2 & x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \\
 & x^3 - x^2 - 2x \\ \cline{2-2}
 & 4x^2 - 4x - 8 \\
 & 4x^2 - 4x - 8 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

أساسُنا الجديد $\{r(x), r_1(x)\}$ أصبح الآن $\{x^2 - x - 2\}$، وعليه:

$I = \langle f(x), g(x) \rangle = \langle x^2 - x - 2 \rangle = \langle (x-2)(x+1) \rangle$ ونرى أنّ $V = \{-1, 2\}$.

تخبرنا المبرهنة 6.28 بأنّ القواسم المشتركة لـ $f(x)$ و $g(x)$ في المثال السابق هي نفسها القواسم المشتركة لـ $r(x)$ و $r_1(x)$؛ ولأن $r(x)\ (0) = 0$ ، فنرى أنّ $r(x)$ يقسم 0، وهكذا القواسم المشتركة لـ $f(x)$ و $g(x)$ هي فقط تلك القواسم لـ $r(x)$، التي بالطبع تشمل $r(x)$ نفسها. وعليه، $r(x)$ يسمى "قاسمًا مشتركًا أكبر" (اختصِرَ gcd) لـ $f(x)$ و $g(x)$.

أساسات جروبنر

سنعالج مسألة إيجاد أساس متقن لمثالي I من $F[\mathbf{x}] = F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. بالنظر إلى توضيحنا لحالات غير معين واحد خطي، إنه يبدو من المعقول محاولة استبدال كثيرات حدود في الأساس بكثيرات حدود درجاتها أقل، أو تحوي غير معينات أقل. إنه من الحاسم أن يكون لدينا طريقة نظامية لإتمام ذلك. كل مدرس للجبر الخطي يصادف أحيانًا طالبًا غير قادر على إتقان اختزال المصفوفات، حيث يصنع مدخلات صفرية في أعمدة المصفوفة بنمط عشوائي تقريبًا، بدلًا من إنهاء العمود الأول ثم الانتقال إلى العمود الثاني، وهكذا كخطوة أولى في إتجاه هدفنا سنعالج مسألة تحديد ترتيب لكثيرات الحدود.

كثيرات الحدود في $F[\mathbf{x}]$ حدودها على الشكل $ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$، حيث $a \in F$.

خصائص الترتيب لضروب القوى
1. $1 < P$ لكل ضروب القوى $P \neq 1$.
2. لضربي قوى P_i و P_j تتحقق واحدة فقط من الآتية: $P_j < P_i$, $P_i = P_j$, $P_i < P_j$.
3. إذا كان $P_i < P_j$ و$P_j < P_k$، فإنّ $P_i < P_k$.
4. إذا كان $P_i < P_j$، فإنّ $PP_i < PP_j$ لأيّ ضرب قوى P.

لنَعدّ **ضرب القوى** في $F[\mathbf{x}]$ بوصفه مقدارًا جبريًّا على الصورة:

$P = x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ حيث $0 \leq m_i$ في $\mathbb{Z}$ لكل i.

لاحظ تمثيل جميع x_i ومن المحتمل أن يكون بعضها لأُسٍ صفري. ومن ثم في $F[x,y,z]$، يجب أن تكتب xz^2 بوصفه ضرب قِوى على النحو xy^0z^2. نرغب بوصف ترتيب كلي $<$ على مجموعة جميع ضروب القوى، وذلك حتى نعلم فقط معنى أن نقول $P_i < P_j$، وليزوّدنا برمز الحجم النسبي لضروب القوى، بعد ذلك يمكننا محاولة تغيير أساس لمثالي بطريقة نظامية لصنع أساس كثيرات حدود فيه، ذوات حدود على الصورة a_iP_i تكون فيه ضروب القوى P_i أصغر ما يمكن. سنرمز لضرب القوى الذي فيه جميع الأُسُس صفرية بالرمز 1، وسنشترط تحقيق الترتيب لضروب القوى الخصائص المذكورة في الصندوق، افترض أنّ ترتيب كهذا قد وُصِفَ، وأنّ $P_i \neq P_j$ وP_i تقسم P_j؛ بحيث $P_j = PP_i$، حيث $1 < P$. الخاصية 4 في الصندوق، تؤدي إلى أن $1P_i < PP_i = P_j$، وهكذا $P_i < P_j$. إذاً P_i تقسم P_j فإنها تؤدي إلى أن $P_i < P_j$، في التمرين 28 نطلب أن تُثبت بمثال مضاد أنّ $P_i < P_j$ لا تؤدي إلى أنَّ P_i تقسم P_j.

من الممكن إثبات أنّ هذه الخصائص تضمن أنّ أي عملية تدريجية لتعديل أساس منته لمثالي، التي لا تزيد الحجم لأي ضرب قوًى أكبر في عنصر الأساس، وفي كل خطوة تستبدلُ واحدًا بشيء أصغر، سوف تنتهي بعدد محدود من الخطوات.

في $F[x]$ مع غير المعين الوحيد x، يتوافر ترتيب ضرب قوًى واحد فقط؛ لأنه من خلال الخاصية 1، يجب أن يكون لدينا $1< x$، وبالضرب بصورة متكررة بـ x وباستخدام الخاصية 4، لدينا $x<x^2, x^2<x^3$ ، ... إلخ، بعدئذ تبيّن الخاصية 3 أنّ $1<x<x^2<x^3<\cdots$ هو الترتيب الممكن الوحيد، لاحظ أنّنا عَدَّلنا الأساسَ في المثال 8.28، باستبدال كثيرات حدود الأساس بكثيرات حدود تحوي ضروب قوًى أصغر.

هناك عدد من الترتيبات المحتملة لضروب القوى في $F[\mathbf{x}]$ مع n غير معين، وسنقدم واحدًا فقط، (*lexicographical order*) (يرمز له بـ "lex"). في lex، حيث نُعرِّف:

$$x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} < x_1^{t_0} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} \qquad (2)$$

إذا وفقط إذا كان $s_i < t_i$ لأول رمز دليلي i – بالقراءة من اليسار إلى اليمين– بحيث إنّ $s_i \neq t_i$. وعليه، إذا كتبنا في $F[x,y]$ ضرب قوًى بترتيب $x^n y^m$، فلدينا $y = x^0 y^1 < x^1 y^0 = x$ و $xy < xy^2$ ، وباستخدام lex، فإنّ الترتيب لـ n غير معيّن يكون $1 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1$ ، اختزالنا في المثال 7.28 حيث تخلصنا أولاً قدر استطاعتنا من كل x "كبيرة" ، وبعدئذ y "الأصغر" المقابلة للترتيب lex: $z < y < x$، أي لتكتب ضروب القوى جميعها على الترتيب $x^m y^n z^s$ لحالة غير معينين مع $y < x$ ، مخطط ترتيب حدود lex الكلي هو:

$$1 < y < y^2 < y^3 \cdots < x < xy < xy^2 < xy^3 < \cdots < x^2 < x^2 y < x^2 y^2 < \cdots$$

يُحدثُ ترتيبٌ لضروب قوى P ترتيبًا واضحًا لحدود كثيرة حدود في $F[\mathbf{x}]$ حدودها aP، الذي سنشير إليه بوصفه **ترتيب حدود (term order)**، ومن الآن فصاعدًا، إذا أُعطينا ترتيبًا لضروب قوًى، فسنعُدّ أنّ كل كثيرة حدود f في $F[\mathbf{x}]$ كُتبَت بترتيب حدود متناقص؛ ولذلك، الحدّ القائد (الأول) درجته الأعلى، حيث نرمز بـ $1\text{t}(f)$ للحدّ القائد لـ f ، ونرمز بـ $1\text{p}(f)$ لضرب القوى للحد القائد، فإذا كانت f و g كثيرتي حدود في $F[\mathbf{x}]$ ، حيث إنّ $1\text{p}(g)$ يقسم $1\text{p}(f)$، فإنه يمكننا أن نجري قسمة f على g، كما وُضحت في الحالتين الخطية وغير معين واحد – لنحصل على $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\, q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$، حيث $1\text{p}(r) < 1\text{p}(f)$. لاحظ لم نقل: $1\text{p}(r) < 1\text{p}(g)$. المثال الآتي يوضّح ذلك.

9.28 مثال من خلال القسمة، اختزل الأساس $\{xy^2, y^2 - y\}$ للمثالي $I = \langle xy^2, y^2 - y\rangle$ من $\mathbb{R}[x,y]$ إلى أساس ذي أصغر حجمٍ لأكبر حدّ، بافتراض الترتيب lex مع $y < x$.

الحل

نرى أنّ y^2 يقسم xy^2 ، ونحسب:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline y^2 - y & xy^2 \\ & \underline{xy^2 - xy} \\ & \qquad xy \end{array}$$

لأنّ y^2 لا يقسم xy لا نستطيع الاستمرار في القسمة، لاحظ أنّ $\mathrm{lp}\ (xy) = xy$ ليس أقلّ من $\mathrm{lp}(y^2 - y) = y^2$. على أي حال، لدينا $\mathrm{lp}(xy) < \mathrm{lp}(xy^2)$، أساسنا الجديد لـ I هو $\{xy, y^2 - y\}$. ▲

عند التعامل مع أكثر من غير معين واحد، فإنه سيكون أكثر سهولة عمل اختزال أساس بضرب كثيرة حدود $g(\mathbf{x})$ للأساس بكثيرة حدود $-q\ (\mathbf{x})$ وإضافتها لكثيرة حدود $f(\mathbf{x})$؛ للحصول على $r(\mathbf{x})$، إضافة إلى أننا نعمل اختزال المصفوفات في الجبر الخطي، بدل كتابة القسمة بصورتها الظاهرة كما عملنا في المثال السابق، فالبدء بكثيرتي حدود xy^2 و y^2-y في أساس، يمكننا اختزال xy^2 بضرب y^2-y بـ $-x$ وإضافة الناتج $-xy^2 + xy$ إلى xy^2، نحصل على البديل xy لـ xy^2 يمكننا عمل ذلك في أذهاننا وكتابة النتيجة مباشرة.

بالرجوع مرة أخرى إلى المثال 9.28، سينتج مما ذكرناه آنفًا أنه لأيّ كثيرة حدود معطاة $f\,(x, y) = c_1(x, y)(xy) + c_2(x, y)(y^2 - y)$ في $\langle xy, y^2 - y\rangle$، إما xy أو y^2 سيقسم $\mathrm{lp}(f)$. (انظر التمرين 31)، هذه توضح الخاصية المُعَرِّفَةُ لأساس جروبنر

10.28 تعريف المجموعة $\{g_1, g_2, \ldots , g_r\}$ لكثيرات حدود غير صفرية في $F[x_1, x_2, \ldots , x_n]$، مع ترتيب حدود >، هي **أساس جروبنر (Gröbner basis)** للمثالي $I = \langle g_1, g_2, \cdots , g_r\rangle$ إذا وفقط إذا كان لكل $f \in I$ غير صفري يوجد i، $1 \le i \le r$، حيث إنّ $\mathrm{lp}\ (g_i)$ يقسم $\mathrm{lp}\ (f)$. ■

بينما وضّحنا الحساب لأساس جروبنر من أساس معطًى لمثالي، وذلك في الأمثلة 7.28، 8.28، و 9.28 لم نعطِ خوارزمية محددة. نرجع القارئ إلى (Admas and Loustaunau [23])، حيث تتألف الطريقة من ضرب كثيرة حدود ما في الأساس بأيّ كثيرة حدود في $F[\mathbf{x}]$، وإضافة الناتج إلى كثيرة حدود أخرى في الأساس بطريقة تقلل الحجم لضروب القوى، وقد عالجنا في توضيحنا الحالة المتضمنة لقسمة $f\,(\mathbf{x})$ على $g\ (\mathbf{x})$، حيث $\mathrm{lp}(g)$ يقسم $\mathrm{lp}\ (f)$، لكننا نستطيع أيضًا استخدام العملية إذا كان $\mathrm{lp}\ (g)$ يقسم فقط ضرب قوًى آخر في f على سبيل المثال: إذا كان أساس فيه العنصران $xy - y^3$ و $y^2 - 1$، يمكننا ضرب $y^2 - 1$ بـ y، وإضافة الناتج إلى $xy - y^3$، مختزلين $xy - y^3$ إلى $xy - y$، وتبيّن المبرهنة 6.28 أنّ هذا حساب صحيح.

من الممكن أن تتعجب كيف أنّ أيّ أساس $\{g_1, g_2, \ldots , g_r\}$ يمكن أن يفشل ليصبح أساس جروبنر لـ $I = \langle g_1, g_2, \ldots , g_r\rangle$؛ لأننا عندما نشكل عنصرًا $c_1g_1 + c_2g_2 + \cdots + c_r\, g_r$ في I، نرى أنّ $\mathrm{lp}\ (g_i)$ قاسم لـ $\mathrm{lp}\ (c_i g_i)$ لـ $i = 1,2, \ldots , r$. على أيّ حال، الحذف لضروب القوى يمكن أن يحدث في الجمع. وإليك توضيح ذلك بمثال.

11.28 مثال ليكن المثالي $I = \langle x^2y - 2,\ xy^2 - y \rangle$ من $\mathbb{R}[x,y]$ ، فكثيرتا الحدود في الأساس المُبَيَّن لا يمكن اختزالهما أكثر، على أيّ حال، المثالي I يحوي $y\,(x^2y-2) - x\,(xy^2 - y) = xy - 2y$، الذي ضرب قواه القائد xy غير قابل للقسمة على أي من ضربي القوى القائدين x^2y أو xy^2 للأساس المعطى. وعليه، $\{x^2y - 2,\ xy^2 - y\}$ ليس أساس جروبنر لـ I، وفقًا للتعريف 10.28. ▲

عندما بلغنا وضعًا يشبه ذلك في المثال 11.28، أدركنا أنّ أساس جروبنر يجب أن يحوي كثيرة حدود ما لها ضرب قوًى قائد أصغر من ضروب القوى القائدة لكثيرات الحدود الأخرى في الأساس المعطى، لتكن f و g كثيرتي حدود في الأساس المعطى، وكما عملنا في المثال 11.28، يمكننا ضرب f و g بضربي قوى أصغرين قدر الإمكان، حيث إنّ ضربي القوى القائدين الناتجين سيكونان الشيء نفسه، المضاعف المشترك الأصغر (lcm) لـ $1\mathrm{p}\,(f)$ و $1\mathrm{p}\,(g)$، وبعد ذلك اجمع أو اطرح مع معاملات مناسبة من F ، حيث إنّ الحذف يعطي النتيجة، إذ نرمز لكثيرة حدود شكلت بهذا الأسلوب بـ $S\,(f\,,\,g)$، ونذكر من غير برهان مبرهنة يمكن استخدامها بوصفها اختبارًا فيما إذا كان أساس ما مُعطى هو أساس جروبنر.

12.28 مبرهنة الأساس $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_r\}$ هو أساس جروبنر للمثالي $\langle g_1, g_2, \cdots, g_r \rangle$ إذا وفقط إذا كان – لكل $i \neq j$ – كثيرة الحدود $S\,(g_i, g_j)$ ، يمكن اختزالها إلى صفر من خلال قسمة متكررة للبواقي على عناصر من G كما في خوارزمية القسمة.

كما ذكرنا سابقًا، من الممكن أن نفضل التفكير في اختزال $S\,(g_i, g_j)$، من خلال متتالية من العمليات المؤلفة من جمع (أو طرح) مضاعفات لكثيرات حدود في G، بدلاً من كتابة القسمة.

يمكننا الآن أن نُبَيِّن كيف يمكننا الحصول على أساس جروبنر من أساس معطًى. بدايةً، اختزل كثيرات الحدود في الأساس فيما بينها قدر الإمكان، اختر بعد ذلك كثيرتي حدود g_i و g_j في الأساس، وشكّل كثيرة الحدود $S(g_i\,, g_j)$، وانظر فيما إذا كانت $S(g_i\,, g_j)$ يمكن اختزالها إلى صفر كما وُصفَ توًّا، فإذا كان ذلك بالإمكان، فاختر زوجين مختلفين من كثيرات الحدود، وأعد الإجراءات معهما، أمّا إذا كانت $S\,(g_i\,,\,g_j)$ لا يمكن اختزالها إلى صفر كما وُصفَ في الأعلى، فزِد الأساس المعطى بهذا العنصر $S(g_i\,,\,g_j)$، وابدأ من جديد اختزال هذا الأساس قدر الإمكان، ومن خلال المبرهنة 12.28، عندما تكون كثيرات الحدود جميعها $S\,(g_i\,, g_j)$ لكل $i \neq j$ يمكن اختزالها إلى الصفر، وذلك باستخدام كثيرات حدود من الأساس الأخير، نكون وصلنا إلى أساس جروبنر، ونختم بإكمال المثال 11.28:

13.28 مثال بإكمال المثال 11.28، ليكن $g_1 = x^2y - 2$، $g_2 = xy^2 - y$، $I = \langle g_1\,,\,g_2 \rangle$ في $\mathbb{R}^2$، حصلنا في المثال 11.28 على كثيرة الحدود $S(g_1\,,\,g_2) = xy - 2y$ ، التي لا يمكن اختزالها إلى الصفر باستخدام g_1 و g_2، وسنختزل الآن الأساس $\{x^2y - 2,\ xy^2 - y,\ xy - 2y\}$ بتوضيح كل خطوة.

$\{x^2\,y - 2,\ xy^2 - y,\ xy - 2y\}$	أساسيٌّ مَزِيْد
$\{2xy - 2,\ xy^2 - y,\ xy - 2y\}$	بإضافة $(-x)$ (الثالث) إلى الأول
$\{2xy - 2,\ 2y^2 - y,\ xy - 2y\}$	بإضافة $(-y)$ (الثالث) إلى الثاني
$\{4y - 2,\ 2y^2 - y,\ xy - 2y\}$	بإضافة (-2) (الثالث) إلى الأول

$\{4y-2, 0, xy-2y\}$ بإضافة $\left(-\frac{y}{2}\right)$ (الأول) إلى الثاني

$\{4y-2, 0, \frac{1}{2}x-2y\}$ بإضافة $\left(-\frac{x}{4}\right)$ (الأول) إلى الثالث

$\{4y-2, 0, \frac{1}{2}x-1\}$ بإضافة $\left(\frac{1}{2}\right)$ (الأول) إلى الثالث

من الواضح أنّ $\left\{y-\frac{1}{2}, x-2\right\}$ هو أساس جروبنر، لاحظ أنه إذا كان $f=y-\frac{1}{2}$ و $g=x-2$، فإنّ $S(f,g)=xf-yg=\left(xy-\frac{x}{2}\right)-(xy-2y)=-\frac{x}{2}+2y$، التي يمكن بسهولة اختزالها إلى الصفر بجمع $\frac{1}{2}(x-2)$ و $-2\left(y-\frac{1}{2}\right)$.

من أساس جروبنر نرى أنّ المتنوّعة الجبرية $V(I)$ تحوي نقطة واحدة فقط $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ في $\mathbb{R}^2$. ▲

تأتي أهمية أساسات جروبنر في التطبيقات من الحقيقة أنها قابلة للحساب بصورة روتينية. وهذه الأساسات لها تطبيقات في الهندسة وعلم الحاسوب إضافة إلى الرياضيات.

تمارين 28

في التمارين من 1 إلى 4، اكتب كثيرات الحدود في $\mathbb{R}[x,y,z]$ بترتيب حدود متناقص باستخدام ترتيب lex لضروب القوى $x^m y^n z^s$ ، حيث $z<y<x$.

1. $2xy^3z^5-5x^2yz^3+7x^2y^2z-3x^3$

2. $3y^2z^5-4x+5y^3z^3-8z^7$

3. $3y-7x+10z^3-2xy^2z^2+2x^2yz^2$

4. $38-4xz+2yz-8xy+3yz^3$

في التمارين من 5 إلى 8، اكتب كثيرات الحدود في $\mathbb{R}[x,y,z]$ بترتيب حدود متناقص باستخدام ترتيب lex لضروب القوى $z^m y^n x^s$، حيث $x<y<z$.

5. كثيرة الحدود في التمرين 1.

6. كثيرة الحدود في التمرين 2.

7. كثيرة الحدود في التمرين 3.

8. كثيرة الحدود في التمرين 4.

ترتيب آخر – deglex – لضروب القوى في $F[x]$ مُعَرَّف كما يأتي:

$$x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n} < x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$$

إذا وفقط إذا كان إما $\sum_{i=1}^{n} s_i < \sum_{i=1}^{n} t_i$ أو هذان المجموعان متساويان و $s_i < t_i$ لأصغر قيمة لـ i ، حيث إنّ $s_i \neq t_i$.

التمارين من 9 إلى 13، تهتم بالترتيب deglex.

9. اسرد – بترتيب تصاعدي – أصغر 20 ضرب قوى في $\mathbb{R}\,[x,y,z]$ لترتيب deglex مع ضروب قوى $x^m y^n z^s$ حيث $z < y < x$.

في التمارين من 10 إلى 13، اكتب كثيرات الحدود بترتيبات حدود متناقص باستخدام الترتيب deglex مع ضروب قوى $x^m y^n z^s$ حيث $z < y < x$

10– كثيرة الحدود في التمرين 1. **11**– كثيرة الحدود في التمرين 2.

12– كثيرة الحدود في التمرين 3. **13**– كثيرة الحدود في التمرين 4.

في التمارين من 14 إلى 17، لتكن ضروب القوى في $\mathbb{R}\,[x,y,z]$ لها ترتيب lex، حيث $z < y < x$. اعمل – إن أمكن– اختزالاً بخوارزمية القسمة من خطوة واحدة لتغيِّر أساس المثالي المعطى إلى أساس ترتيب حدّه الأكبر أصغر.

14– $\langle xy^2 - 2x, x^2 y + 4xy, xy - y^2\rangle$ **15**– $\langle xy + y^3, y^3 + z, x - y^4\rangle$

16– $\langle xyz - 3z^2, x^3 + y^2z^3, x^2yz^3 + 4\rangle$ **17**– $\langle y^2z^3 + 3, y^3z^2 - 2z, y^2z^2 + 3\rangle$

في التمرينين 18 و 19، ليكن ترتيب ضروب القوى في $\mathbb{R}[w, x, y, z]$ هو lex مع $z < y < x < w$. أوجد أساس جروبنر للمثالي المعطى.

18– $\langle w + x - y + 4z - 3, 2w + x + y - 2z + 4, w + 3x - 3y + z - 5\rangle$

19– $\langle w - 4x + 3y - z + 2, 2w - 2x + y - 2z + 5, w - 10x + 8y - z - 1\rangle$

في التمارين من 20 إلى 22 أوجد أساس جروبنر للمثالي المعطى من $\mathbb{R}[x]$.

20– $\langle x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4, x^3 + x^2 - 4x - 4\rangle$

21– $\langle x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 3x + 2\rangle$

22– $\langle x^5 + x^2 + 2x - 5, x^3 - x^2 + x - 1\rangle$

في التمارين من 23 إلى 26، أوجد أساس جروبنر للمثالي المعطى من $\mathbb{R}\,[x, y]$ ليكن الترتيب لضروب القوى هو lex مع $y < x$. إذا أمكنك، صِف المتنوعة الجبرية المقابلة في $\mathbb{R}[x, y]$.

23. $\langle x^2 y - x - 2, xy + 2y - 9\rangle$ **24**– $\langle x^2 y + x, xy^2 - y\rangle$

25. $\langle x^2 y + x + 1, xy^2 + y - 1\rangle$ **26.** $\langle x^2 y + xy^2, xy - x\rangle$

مفاهيم

27. ليكن F حقلاً. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل مثالي من $F[x]$ له أساس منتهٍ.

________ ب. كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ متنوعة جبرية.

________ جـ. المجموعة الخالية من $\mathbb{R}^2$ متنوعة جبرية.

________ د. كل مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}^2$ متنوعة جبرية.

________ هـ. كل خط في $\mathbb{R}^2$ متنوعة جبرية.

________ و. كل مجموعة منتهية من الخطوط المستقيمة في $\mathbb{R}^2$ متنوعة جبرية.

________ ز. القاسم المشترك الأكبر لعددٍ منتهٍ من كثيرات حدود في $\mathbb{R}[x]$ (غير معين واحد). يمكن أن يحسب باستخدامِ خوارزمية القسمة بصورة متكررة.

________ ح. حَسَبْتُ أساسات جروبنر قبل أن أعرف ما هي.

________ ط. أي مثالي من $F[x]$ له أساس جروبنر وحيد.

________ ي. المثاليان $\langle x,y\rangle$ و $\langle x^2, y^2\rangle$ متساويان؛ لأن كليهما يُنْتِجُ المتنوعة الجبرية نفسها أي $\{(0,0)\}$ في $\mathbb{R}^2$.

28. لتكن $\mathbb{R}[x,y]$ رتبت من خلال lex. أعطِ مثالاً يُبيّن أنّ $P_i < P_j$ لا تؤدي إلى أنّ P_i تقسم P_j.

براهين

29. أثبت أنه إذا كان $f_1, f_2, \ldots, f_r$ عناصر حلقة إبدالية R مع عنصر محايد، فإنّ $I = \{c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_r f_r \mid c_i \in I,\ i = 1, \cdots, r\}$، هو مثالي من R.

30. أثبت أنه إذا كان $f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ في $F[x]$، فإنّ القواسم المشتركة في $F[x]$ لـ $f(x)$ و $g(x)$ هي نفسها القواسم المشتركة في $F[x]$ لـ $g(x)$ و $r(x)$.

31. أثبت أنّ $\{xy, y^2 - y\}$ هو أساس جروبنر لـ $\langle xy, y^2 - y\rangle$ كما أُدعي بعد المثال 9.28.

32. ليكن F حقلاً. أثبت أنه إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من F^n، فإنّ

$$I(S) = \{f(x) \in F[x] \mid f(\mathbf{s}) = 0,\} \text{ لكل } \mathbf{s} \in S$$

مثالي من $F[x]$.

33. بالرجوع إلى التمرين 32، أثبت أن $S \subseteq V(I(S))$.

34. بالرجوع إلى التمرين 32، أعطِ مثالاً لمجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^2$، بحيث إن $V(I(S)) \neq S$.

35. بالرجوع إلى التمرين 32، أثبت أنه إذا كان N مثاليًا من $F[x]$، فإن $N \subseteq I(V(N))$.

36. بالرجوع إلى التمرين 32، أعطِ مثالاً لمثالي N من $\mathbb{R}[x,y]$، بحيث إن $I(V(N)) \neq N$.

الوحدة السادسة

امتداد الحقول
Extension Fields

---

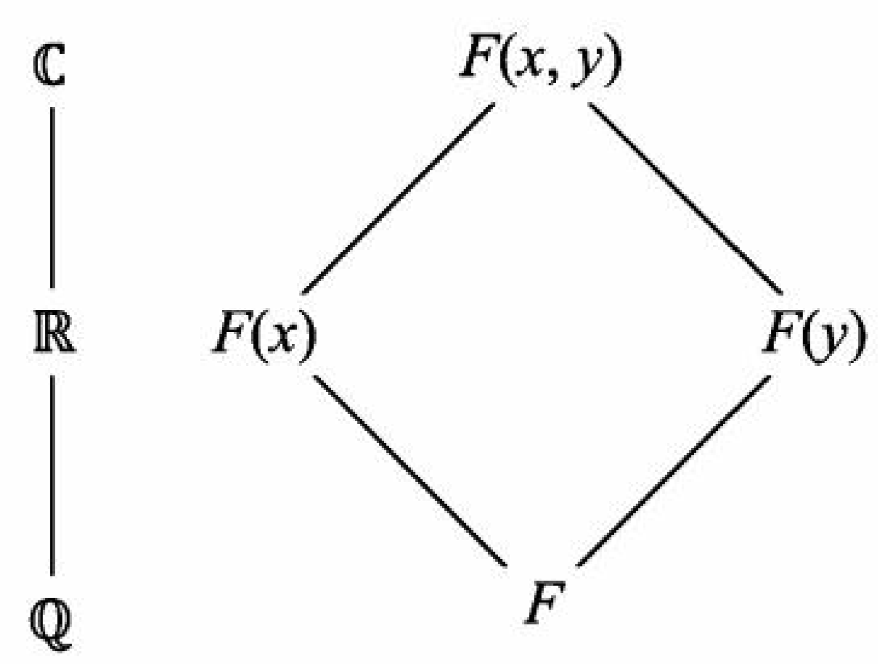
[1] الفصل 32 غير متطلب لباقي الكتاب

مقدّمة لامتداد الحقول Introduction to Extension Fields

الهدف الأساسي المراد تحقيقه

إننا في الوضع الذي يمكننا من تحقيق **هدفنا الأساسي**، والذي يسعى بصورة مبسطة إلى إثبات أنّ لكل كثيرة حدود غير ثابتة صفرًا، وهذا ما ستنص عليه المبرهنة 3.29. سنقدم في البداية بعض التعريفات لأفكار سابقة.

1.29 تعريف يكون الحقل E **امتدادًا للحقل *F* (*Field Extension*)**، إذا كان $F \leq E$ ∎



الشكل 2.29

لذا، فإنّ $\mathbb{R}$ امتداد للحقل $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{C}$ امتداد للحقلين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$.

وكما في دراسة الزمر، سيكون من المناسب دائمًا استخدام الرسم التخطيطي للحقول الجزئية لتوضيح امتدادات الحقول، حيث يكون الحقل الأكبر في الأعلى كما هو موضح في الشكل 2.29، ويسمى الشكل الذي يكون فيه عمود واحد من الحقول برج الحقول **(a tower of fields)**، كما هو موضح إلى اليسار في الشكل 2.29.

لنبدأ في تحقيق الهدف الأساسي، فهذه النتيجة المهمة والعظيمة تأتي بصورة سريعة وممتازة باستخدام الطرق التي باتت في متناول اليد.

3.29 مبرهنة **(مبرهنة كرونكر *Kronecker's Theorem*)** (هدف: أساسي)، ليكن F حقلاً، ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$ ، عندئذ، يوجد امتداد E للحقل F و $\alpha \in E$، حيث إنّ $f(\alpha) = 0$.

البرهان بحسب المبرهنة 20.23، يمكن تحليل $f(x)$ في $F[x]$ إلى كثيرات حدود غير مختزلة على F، لتكن $p(x)$ إحدى كثيرات الحدود غير المختزلة في هذا التحليل، فمن الواضح أنه يكفينا أن نجد امتداد E للحقل F يحوي عنصرًا α، حيث إنّ $p(\alpha) = 0$.

بحسب المبرهنة 25.27، $\langle p(x) \rangle$ مثالي أعظمي في $F[x]$، وبهذا يكون $F[x]/\langle p(x)\rangle$ حقلًا، يمكننا الادعاء أنّ F يطابق حقلًا جزئيًا من $F[x]/\langle p(x)\rangle$ بطريقة طبيعية باستخدام الدالة $\psi : F \rightarrow F[x]/\langle p(x)\rangle$ المعرّفة بـ:

$$\psi(a) = a + \langle P(x)\rangle$$

حيث $a \in F$. هذه الدالة أحادية؛ لأنه إذا كان $\psi(a) = \psi(b)$، بمعنى أنّ $a + \langle P(x)\rangle = b + \langle P(x)\rangle$ حيث $a,b \in F$، فإنّ $(a-b) \in \langle P(x)\rangle$، وهكذا، فإنّ $(a-b)$ يجب أن تكون مضاعفًا لكثير الحدود $p(x)$، التي تكون درجتها ≤ 1.

الآن، $a, b \in F$ يؤدي إلى أنّ $a - b \in F$، وهكذا، فيجب أن يكون $a - b = 0$، أي $a = b$. نعرّف الجمع والضرب في $F[x]/\langle p(x)\rangle$ باختيار أيّ ممثلين، وهكذا يمكننا اختيار $(a + \langle P(x)\rangle) \in a$. إذن، ψ تمثل تشاكلاً يربط F بطريقة أحادية وغامرة بحقل جزئي من $F[x]/\langle p(x)\rangle$، ونطابق F مع $\{a + \langle p(x)\rangle \mid a \in F\}$ باستخدام الدالة ψ. وهكذا، نضع $E = F[x]/\langle p(x)\rangle$ بوصفه امتدادًا للحقل F، فنكون هكذا قد صنعنا الامتداد المطلوب E للحقل F، ويبقى علينا إثبات أنّ E يحوي صفر الـ $p(x)$، لنعرّف

$$\alpha = x + \langle p(x)\rangle.$$

وهكذا، فإنّ $\alpha \in E$. باستخدام تشاكل التعويض $\phi_\alpha : F[x] \to E$ الذي سبق تعريفه في المبرهنة 4.22، إذا كانت $p(x) = a_0 + a_1x + .. + a_nx^n$ حيث $a_i \in F$، فإن:

$$\phi_\alpha(p(x)) = a_0 + a_1(x + \langle p(x)\rangle) + \cdots + a_n(x + \langle p(x)\rangle)^n$$

■ نبذة تاريخية

عُرِفَ ليوبولد كرونكر بإصراره على بناء الإنشاءات الرياضية، فقد ذكر في ملاحظة له: "إنّ الله خلق الأعداد الصحيحة، وكل ما عداها هو من عمل الإنسان"؛ لهذا أراد أن ينشئ "مجالات نسبية" (حقول) بالاستعانة بتوافر الأعداد الصحيحة وغير المعينات.

لم يؤمن كرونكر في البداية بالأعداد الحقيقية أو المركبة، وذلك وبحسب تطلعاته بأنّ هذه الحقول لا يمكن تعيينها بطريقة إنشائية؛ لذلك، أنشأ في بحث له عام 1881م حقلاً ممتدًا بمنتهى البساطة، بأن ألحق بحقل معطى الجذر α لكثيرة الحدود غير المختزلة من الدرجة n، $p(x)$، أي إنّ حقله الجديد تكوّن من تعبيرات نسبية في عناصر الحقل الأصلي والجذر α مع الشرط أنّ $p(\alpha) = 0$.

إثبات المبرهنة المذكورة في الكتاب (مبرهنة 3.29) تمت كتابته في القرن العشرين، وقد أكمل كرونكر أطروحته للدكتوراة عام 1845م في جامعة برلين، وقام بعدها بإدارة أعمال العائلة سنين عدة، ثمّ اعتمد على نفسه ماليًّا، فعاد إلى برلين حيث انتخب في أكاديمية العلوم، وسُمِحَ له بأن يحاضر في الجامعة.

صار كرونكر في تقاعده أستاذًا في جامعة برلين، وأدار بمشاركة كارل وايرستراس (*Karl Weierstrass*) (1815 – 1897) ندوة رياضية غاية في التأثير.

في $E = F[x]/\langle p(x)\rangle$ ولكن يمكننا الحساب في $F[x]/\langle p(x)\rangle$؛ باختيار الممثلات وx هي الممثل للمجموعة المشاركة $\alpha = x + \langle p(x)\rangle$. وهكذا:

$$p(\alpha) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) + \langle p(x)\rangle$$

$$= p(x) + \langle p(x)\rangle = \langle p(x)\rangle = 0$$

في $F[x]/\langle p(x)\rangle$ ، وهكذا نكون قد أوجدنا عنصر α في $E = F[x]/\langle p(x)\rangle$، بحيث إنّ $p(\alpha) = 0$، ما يعني أنّ $f(\alpha) = 0$. ♦

وإليك توضيح البناء الذي تمّ في إثبات المبرهنة 3.29 بهذين المثالين:

مثال 4.29 ليكن $F = \mathbb{R}$، ولتكن $f(x) = x^2 + 1$ التي ليس لها أصفار في $\mathbb{R}$، وبهذا فهي غير مختزلة على $\mathbb{R}$ بحسب المبرهنة 10.23. إذن: $\langle x^2 + 1\rangle$ مثالي أعظمي في $\mathbb{R}[x]$، ما يؤدي إلى أن يكون $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ حقلاً. طابق بين $r \in \mathbb{R}$ و $r + \langle x^2 + 1\rangle$ في $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$، يمكننا أن نعدّ $\mathbb{R}$ بوصفه حقلاً جزئيًا من $E = \mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$، لتكن

$$\alpha = x + \langle x^2 + 1\rangle$$

بالحساب في $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$، نجد أن:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 1 &= (x + \langle x^2 + 1\rangle)^2 + (1 + \langle x^2 + 1\rangle)\\ &= (x^2 + 1) + \langle x^2 + 1\rangle = 0.\end{aligned}$$

وهكذا، فإنّ α تمثل صفرًا لـ $x^2 + 1$، وسوف نطابق بين $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ و $\mathbb{C}$ في ختام هذا الفصل. ▲

مثال 5.29 ليكن $F = \mathbb{Q}$، وخذ في الحسبان $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$، ففي هذه الحالة تتحلل $f(x)$ في $\mathbb{Q}[x]$ إلى $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$، وكلا العاملين غير مختزلين على $\mathbb{Q}$، كما رأينا سابقًا. ويمكننا البدء مع $x^2 - 2$، وإنشاء امتداد E للحقل $\mathbb{Q}$ يحوي α، بحيث إنّ $\alpha^2 - 2 = 0$، أو يمكننا بناء امتداد K للحقل $\mathbb{Q}$ يحوي العنصر β، حيث $\beta^2 - 3 = 0$. الإنشاء في الحالتين هو تمامًا كما في المثال 4.29. ▲

العناصر الجبرية والمتسامية.

كما ذكرنا سابقًا، سنكرّس معظم بقية هذا الكتاب لدراسة أصفار كثيرات الحدود، حيث نستهل هذه الدراسة بوضع عناصر الامتداد E للحقل F ضمن أحد صنفين.

6.29 تعريف يكون العنصر α الذي ينتمي إلى الامتداد E للحقل F **جبريًا (algebraic)** على F، إذا كان $f(\alpha)=0$، حيث $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود غير صفرية، وإذا كانت α غير جبري على F، فإنّ α **متسامٍ (transcendental)** على F. ■

7.29 مثال $\mathbb{C}$ تمدد للحقل $\mathbb{Q}$، ولأنّ $\sqrt{2}$ صفر لـ x^2-2، فإنّ $\sqrt{2}$ عنصر جبري على $\mathbb{Q}$، وكذلك i عنصر جبري على $\mathbb{Q}$؛ لأنه صفر لـ x^2+1 ▲

8.29 مثال من المعروف (ولكن ليس من السهل إثبات) أنّ العددين الحقيقيين π و e متساميان على $\mathbb{Q}$، حيث e هي الأساس للوغاريتم الطبيعي. ▲

لا نتحدث ببساطة عن كثيرة حدود غير مختزلة، بل عن كثيرة حدود غير مختزلة على F، كذلك لا نتحدث ببساطة عن عنصر جبري، ولكن عن عنصر جبري على F. التوضيح الآتي يبيّن السبب في هذا.

9.29 مثال العدد الحقيقي π متسامٍ على $\mathbb{Q}$، كما ذكرنا في المثال 8.29، ولكن π جبري على $\mathbb{R}$؛ لأنه صفر لـ $(x-\pi) \in \mathbb{R}[x]$. ▲

10.29 مثال من السهل أن نرى أنّ العدد الحقيقي $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ جبري على $\mathbb{Q}$؛ وذلك لأنه إذا كانت $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$، فإنّ $\alpha^2 = 1+\sqrt{3}$، وهكذا فإنّ $\alpha^2 - 1 = \sqrt{3}$ و $(\alpha^2-1)^2=3$ إذن $\alpha^4 - 2\alpha^2 - 2 = 0$، وبهذا تكون α صفرًا لـ x^4-2x^2-2، التي تمثل عنصرًا في $\mathbb{Q}[x]$. ▲

للربط بين هذه الأفكار وتلك التي في نظرية الأعداد، نقدم التعريف الآتي:

11.29 تعريف يسمى العنصر الجبري في $\mathbb{C}$ على $\mathbb{Q}$ **عددًا جبريًا (*algebraic number*)**، والعدد المتسامي **(*transcendental number*)** هو عنصر في $\mathbb{C}$ متسامٍ على $\mathbb{Q}$. ■

هناك الكثير من الجمال في نظرية الأعداد الجبرية (انظر المراجع).

تعطي النظرية الآتية وصفًا مفيدًا للعناصر الجبرية والمتسامية على الحقل F في التمدد E، إضافة إلى أنها تبين أهمية تشاكل التعويض ϕ_α. لاحظ مرة أخرى أننا نصف مفاهيمنا باستخدام الدوال.

12.29 مبرهنة ليكن الحقل E تمددًا للحقل F، ولتكن $\alpha \in E$، ليكن $\phi_\alpha : F[x] \to E$ تشاكل التعويض من $F[x]$ إلى E، بحيث إنّ $\phi_\alpha(a) = a$ لكل $a \in F$ و $\phi_\alpha(x) = \alpha$ ، ويكون α متساميًا على F، إذا وفقط إذا كان ϕ_α تماثلًا من $F[x]$ مع مجال جزئي من E، بمعنى أنه إذا وفقط إذا كانت ϕ_α دالة أحادية.

البرهان يكون العنصر α متسامياً على F، إذا وفقط إذا كان $f(\alpha) \neq 0$ لكل كثير حدود غير صفري $f(x) \in F[x]$، الذي يكون صحيحًا (وبحسب التعريف) إذا وفقط إذا كان $\phi_\alpha(f(x)) \neq 0$ لكل كثير حدود غير صفري $f(x) \in F[x]$، الذي يكون صحيحًا إذا وفقط إذا كانت نواة ϕ_α تساوي $\{0\}$، أي إذا وفقط إذا كانت ϕ_α دالة أحادية. ♦

كثيرة الحدود غير المختزلة لـ α على F

ليكن التمدد $\mathbb{R}$ للحقل $\mathbb{Q}$، ونعلم أنّ $\sqrt{2}$ جبري على $\mathbb{Q}$؛ لأنه صفر لـ $x^2 - 2$، وبالطبع، فإنّ $\sqrt{2}$ صفر كذلك لـ $x^3 - 2x$ ولـ $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1)$ كثيرتا الحدود هاتان – واللتان يكون $\sqrt{2}$ صفرًا لهما – من مضاعفات $x^2 - 2$. حيث تثبت النظرية الآتية أنّ هذا توضيح للحالة العامة، وستؤدي هذه النظرية دورًا محوريًا في عملنا المقبل.

13.29 مبرهنة ليكن الحقل E تمددًا للحقل F، ولتكن $\alpha \in E$، حيث α جبرية على F، فإنه يوجد كثيرة حدود غير مختزلة $p(x) \in F[x]$ بحيث $p(\alpha) = 0$، كثيرة الحدود غير المختزلة $p(x)$ يمكن تحديدها بصورة وحيدة مع الضرب في عامل ثابت من F، وتكون كثيرة حدود من أصغر درجة ≤ 1 في $F[x]$، بحيث تكون α صفراً لها، فإذا كان $f(\alpha) = 0$، حيث $f(x) \in F[x]$ و$f(x) \neq 0$، فإن $p(x)$ تقسم $f(x)$.

البرهان ليكن ϕ_α تشاكل التعويض من $F[x]$ إلى E المعطى في المبرهنة 4.22، فتكون نواة ϕ_α مثاليًا، وبحسب المبرهنة 24.27 يجب أن يكون مثالي رئيس متولد من عنصر $p(x) \in F[x]$. يتكوّن $\langle p(x)\rangle$ من تلك العناصر في $F[x]$، التي يكون α صفرًا لها، وهكذا، فإذا كان $f(\alpha) = 0$ و$f(x) \neq 0$، فإنّ $f(x) \in \langle p(x)\rangle$، ما يعني أنّ $p(x)$ تقسم $f(x)$. إذن، $p(x)$ كثيرة حدود من أصغر درجة ≤ 1، بحيث تكون α صفراً له، وكل كثيرة حدود تحقق هذا الشرط ومن درجة $p(x)$ نفسها، يجب أن تكون على الصورة $(a)\, p(x)$، حيث $a \in F$.

يبقى فقط أن نثبت أنّ $p(x)$ غير مختزلة، فإذا كان $p(x) = r(x)\, s(x)$ يمثل تحليلًا لـ $p(x)$ لكثيرات حدود من درجة أصغر، فإنّ $p(\alpha) = 0$ يؤدي إلى أنّ $r(\alpha)\, s(\alpha) = 0$، وهكذا، فإما أن يكون $r(\alpha) = 0$، أو $s(\alpha) = 0$؛ لأن E حقل، وهذا يناقض الحقيقة أنّ درجة $p(x)$ أصغر درجة ≤ 1 بحيث $p(\alpha) = 0$. وهكذا، فإنّ $p(x)$ غير مختزلة. ♦

بالضرب في ثابت مناسب من F، يمكننا الافتراض أنّ معامل أكبر قوة تظهر لـ x في $p(x)$ في المبرهنة 13.29 تساوي (1)، وتسمى كثيرة الحدود هذه، الذي يكون (1) معامل أكبر قوة تظهر لـ x فيها كثيرة حدود أحادية (***monic polynomial***).

14.29 تعريف ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F، ولتكن $\alpha \in E$ جبرية على F، فتسمى كثيرة الحدود الأحادية الوحيدة $p(x)$، الذي تمتع بالصفات المذكورة في المبرهنة 13.29 **كثيرة الحدود غير المختزلة لـ α على F** ***(irreducible polynomial for α over F)***، وسيرمز لها بالرمز $\text{irr}\,(\alpha,F)$، وتسمى درجة $\text{irr}\,(\alpha,F)$ **بدرجة α على F** ***(degree of α over F)***، وسيرمز لها بـ $\deg\,(\alpha, F)$. ■

15.29 مثال نعلم أنّ $\text{irr}\,(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = x^2 - 2$، وبالعودة إلى المثال 10.29، نرى أنّ $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ عنصر في $\mathbb{R}$، و α صفر لـ $x^4 - 2x^2 - 2$، التي تقع في $\mathbb{Q}[x]$، ولأنّ $x^4 - 2x^2 - 2$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ (بحسب أيزنستاين مع $p = 2$، أو بتطبيق طريقة مثال 14.23)، فإننا نرى أنّ:

$$\text{irr}(\sqrt{1+\sqrt{3}}, \mathbb{Q}) = x^4 - 2x^2 - 2$$

وبهذا، فإنّ $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ جبري على $\mathbb{Q}$ من الدرجة 4. ▲

وكما يجب أن نتحدث عن α بوصفه عنصرًا جبريًّا على F وليس مجرد جبري، فيجب أن نتحدث عن درجة α على F وليس مجرد درجة α، وبوصفه توضيحًا بسيطًا، فإنّ $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ جبري من الدرجة 2 على $\mathbb{Q}$، ولكنه جبري من الدرجة 1 على $\mathbb{R}$؛ لأنّ $\text{irr}(\sqrt{2}, \mathbb{R}) = x - \sqrt{2}$.

يعود التقدم السريع في النظرية هنا إلى تقنيات التشاكل ونظرية المثاليات، التي هي تحت تصرفنا الآن، لاحظ بصورة خاصة استخدامنا الثابت لتشاكل التعويض ϕ_α.

الامتدادات البسيطة

ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F، ولتكن $\alpha \in E$، وليكن ϕ_α تشاكل التعويض من $F[x]$ إلى E، بحيث $\phi_\alpha(a) = a$ لكل $a \in F$ و $\phi_\alpha(x) = \alpha$، كما في المبرهنة 4.22 يمكن أن نعدّ حالتين، هما:

الحالة الأولى: افترض أنّ α جبري على F، فبحسب المبرهنة 13.29 تكون نواة ϕ_α تساوي $\langle \text{irr}(\alpha,F)\rangle$، وبحسب المبرهنة 25.27 فإنّ $\langle \text{irr}(\alpha,F)\rangle$ مثالي أعظمي في $F[x]$، وبهذا يكون $F[x]/\langle \text{irr}(\alpha, F)\rangle$ حقلاً متماثلاً مع الصورة $\phi_\alpha\,[F[x]]$ في E، وهذا الحقل الجزئي $\phi_\alpha\,[F[x]]$ من E هو أصغر حقل جزئي من E يحوي كلًّا من F و α، وسنرمز لهذا الحقل بـ $F(\alpha)$.

الحالة الثانية: افترض أنّ α متسامٍ على F، فبحسب المبرهنة 12.29 يكون ϕ_α تماثلاً من $F[x]$ إلى مجال جزئي من E، وفي هذه الحالة لا يكون $\phi_\alpha\,[F[x]]$ حقلًا، وإنّما مجال صحيح، وسنرمز له بـ $F[\alpha]$، وبحسب النتيجة 8.21، فإنّ E يحتوي على حقل خوارج القسمة لـ $F[\alpha]$، الذي يكون أصغر حقل جزئي من E يحوي كلاً من F وα، وكما في الحالة الأولى، فسنرمز لهذا الحقل بـ $F(\alpha)$.

16.29 مثال لأنّ π متسام على $\mathbb{Q}$، فإنّ الحقل $\mathbb{Q}(\pi)$ متماثل مع الحقل $\mathbb{Q}(x)$ للدوال الكسرية على $\mathbb{Q}$ بغير المعين x، وهكذا ومن وجهة النظر الإنشائية، يتصرف العنصر المتسامي على الحقل F بوصفه غير معين على F. ▲

17.29 تعريف يسمى الامتداد E للحقل F **امتدادًا بسيطًا (simple extension)** لـ F، إذا كان $E = F(\alpha)$ حيث $\alpha \in E$. ■

ظهرت الكثير من النتائج المهمّة خلال هذا الفصل، وقد طوّرنا الكثير من الأساليب التي بدأت تؤتي ثمارها بصورة لافتة للنظر، حيث تعطي المبرهنة الآتية نظرة في العمق على طبيعة الحقل $F(\alpha)$، في حال كانت α جبرية على F.

18.29 مبرهنة ليكن E الامتداد البسيط $F(\alpha)$ للحقل F، ولتكن α جبرية على F، وافترض أنّ درجة $\text{irr}\,(\alpha,F)$ تساوي $n \geq 1$، فإنّ كل عنصر β في $E = F(\alpha)$ يمكن كتابته بطريقة وحيدة على الصورة:

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

حيث b_i عنصر في F لكل i.

البرهان بالاستخدام العادي لتشاكل التعويض ϕ_α، فإنّ كل عنصر في

$F(\alpha) = \phi_\alpha[F[x]]$

يكون على الصورة $\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$ كثيرة حدود في α ومعاملات من F.

ليكن $\text{irr}(\alpha, F) = p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

ما يعني أنّ $p(\alpha) = 0$، وهكذا، فإنّ

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0$$

هذه المعادلة في $F(\alpha)$ يمكن أن تستخدم للتعبير عن أي وحيد الحد α^m، حيث $m \geq n$ باستخدام قوى α الأقل من n، على سبيل المثال:

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n &= -a_{n-1}\alpha^n - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0\alpha \\ &= -a_{n-1}\left(-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0\right) - a_{n-2}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0\alpha\end{aligned}$$

وهكذا، فإذا كانت $\beta \in F(\alpha)$، يمكن التعبير عن β بالصورة المطلوبة

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

لإثبات أنّ هذه الكتابة وحيدة، افترض أنّ:

$$b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1} = b'_0 + b'_1\alpha + \cdots + b'_{n-1}\alpha^{n-1}$$

حيث $b'_i \in F$ لكل i، وهكذا، فإنّ:

$$(b_0 - b'_0) + (b_1 - b'_1)x + \ldots + (b_{n-1} - b'_{n-1})x^{n-1} = g(x)$$

تمثل عنصرًا في $F[x]$ و $g(\alpha) = 0$، وكذلك فإنّ درجة $g(x)$ أقل من درجة $\mathrm{irr}(\alpha,F)$، ولأنّ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ كثيرة حدود غير صفرية ذات أقل درجة في $F[x]$، حيث تكون α صفراً لها، فإنه يجب أن يكون $g(x) = 0$، فنستنتج أنّ $b_i - b'_i = 0$، وهكذا، فإنّ $b_i = b'_i$، ما يبرهن أنّ b_i وحيدة.

♦

المثال الآتي لتوضيح المبرهنة 18.29 مثير للإعجاب.

19.29 مثال كثيرة الحدود $p(x) = x^2 + x + 1$ في $\mathbb{Z}_2[x]$ غير مختزلة على $\mathbb{Z}_2$، وذلك بحسب المبرهنة 10.23؛ لأن كلا عنصري $\mathbb{Z}_2$، 0 و 1 ليسا صفرين لـ $p(x)$.

باستخدام المبرهنة 3.29، نعلم أنه يوجد حقل E امتدادًا لـ $\mathbb{Z}_2$ يحوي صفرًا α لـ $x^2 + x + 1$، وبحسب المبرهنة 18.29، يحوي $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ العناصر $0 + 0\alpha$، $1 + 0\alpha$، $0 + 1\alpha$ و $1 + 1\alpha$، أي 0، 1، α و $1 + \alpha$، وهذا يعطينا حقلاً جديدًا من أربعة عناصر!

جداول الجمع والضرب بهذا الحقل معطاة في الجدولين 20.29 و 21.29، على سبيل المثال: لحساب $(1 + \alpha)(1 + \alpha)$ في $\mathbb{Z}_2(\alpha)$، نلاحظ أنه لأنّ $p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$، فإنّ $\alpha^2 = -\alpha - 1 = \alpha + 1$

وهكذا، فإنّ:

$$(1 + \alpha)(1 + \alpha) = 1 + \alpha + \alpha + \alpha^2 = 1 + \alpha^2 = 1 + \alpha + 1 = \alpha \qquad \blacktriangle$$

أخيرًا، نستطيع وباستخدام المبرهنة 18.29 أن نفي بالوعد في المثال 4.29، ونثبت أن $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ متماثل مع حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، فقد رأينا في المثال 4.29 أننا نستطيع أن نرى $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ بوصفه حقل امتداد لـ $\mathbb{R}$، لتكن:

$$\alpha = x + \langle x^2 + 1\rangle$$

الجدول 20.29

$+$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	1	α	$1+\alpha$
1	1	0	$1+\alpha$	α
α	α	$1+\alpha$	0	1
$1+\alpha$	$1+\alpha$	α	1	0

الجدول 21.29

	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$1+\alpha$
α	0	α	$1+\alpha$	1
$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	1	α

إذن، $\mathbb{R}(\alpha) = \mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ وتتكون من العناصر جميعها على الصورة $a+b\alpha$ لكل $a,b \in \mathbb{R}$ بحسب مبرهنة 18.29، لكن لأنّ $\alpha^2+1=0$، فنجد أنّ α تؤدي دور $i \in \mathbb{C}$، و $a+b\,\alpha$ تؤدي دور $(a+bi) \in \mathbb{C}$؛ ولهذا $\mathbb{R}(\alpha) \simeq \mathbb{C}$، وهذه هي الطريقة الجبرية الممتازة لإنشاء $\mathbb{C}$ من $\mathbb{R}$.

■ تمارين 29

حسابات

في التمارين 1 إلى 5، أثبت أنّ العدد المعطى $\alpha \in \mathbb{C}$ جبري على $\mathbb{Q}$، بإيجاد $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$، حيث $f(\alpha)=0$

.1 $1+\sqrt{2}$ **.2** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **.3** $1+i$

.4 $\sqrt{1+\sqrt[3]{2}}$ **.5** $\sqrt{\sqrt[3]{2}-i}$

في التمارين 6 إلى 8، أوجد $\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$ و $\deg(\alpha,\mathbb{Q})$ للعدد الجبري المعطى $\alpha \in \mathbb{C}$، وكن مستعدًا لتبرهن أنّ كثيرات الحدود غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ إذا طلب منك ذلك.

.6 $\sqrt{3-\sqrt{6}}$ **.7** $\sqrt{(\frac{1}{3})+\sqrt{7}}$ **.8** $\sqrt{2}+i$

في التمارين 9 إلى 16، صنّف العدد المعطى $\alpha \in \mathbb{C}$ إذا كان جبريًا أم متساميًا على الحقل المعطى F وإذا كان α جبريًا على F، فجد $\deg(\alpha,F)$.

.9 $\alpha=i,\ F=\mathbb{Q}$ **.10** $\alpha=1+i,\ F=\mathbb{R}$

.11 $\alpha=\sqrt{\pi},\ F=\mathbb{Q}$ **.12** $\alpha=\sqrt{\pi},\ F=\mathbb{R}$

.13 $\alpha=\sqrt{\pi},\ F=\mathbb{Q}(\pi)$ **.14** $\alpha=\pi^2,\ F=\mathbb{Q}$

.15 $\alpha=\pi^2,\ F=\mathbb{Q}(\pi)$ **.16** $\alpha=\pi^2,\ F=\mathbb{Q}(\pi^3)$

.17 ارجع إلى المثال 19.29 في الكتاب. كثيرة الحدود x^2+x+1 لها صفر α في $\mathbb{Z}_2(\alpha)$؛ ولهذا يجب أن تتحلل إلى حاصل ضرب عوامل خطية في $(\mathbb{Z}_2(\alpha))[x]$. أوجد هذا التحليل. [مساعدة: قَسِّم x^2+x+1 على $x-\alpha$ قسمة طويلة باستخدام الحقيقة $\alpha^2=\alpha+1$].

.18 أ. أثبت أنّ كثيرة الحدود x^2+1 غير مختزلة في $\mathbb{Z}_3[x]$.

ب. لتكن α صفرًا لـ $x^2 + 1$ في حقل ممتد لـ $\mathbb{Z}_3$. كما في المثال 19.29، فأعطِ جداول الضرب والجمع للعناصر التسعة في $\mathbb{Z}_3(\alpha)$ مكتوبة بحسب الترتيب 0، 1، 2، α، 2α، $1 + \alpha$، $1 + 2\alpha$، $2 + \alpha$ و $2 + 2\alpha$.

مفاهيم

في التمارين 19 إلى 22، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

19. يكون العنصر α من التمدد E للحقل F *جبريًا* على F، إذا وفقط إذا كان α صفرًا لكثيرة حدود.

20. يكون العنصر β من التمدد E للحقل F *متساميًا* على F، إذا وفقط إذا كان β ليس صفرًا لأيّ كثيرة حدود في $F[x]$.

21. *كثيرة الحدود الأحادية* في $F[x]$ هي من كانت معاملاتها جميعها تساوي 1.

22. يكون الحقل E *امتدادًا بسيطًا* للحقل الجزئي F، إذا وفقط إذا توافرت $\alpha \in E$، حيث لا يوجد أيّ حقل جزئي فعلي من E يحتوي α.

21. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

____ أ. العدد π متسامٍ على $\mathbb{Q}$.

____ ب. $\mathbb{C}$ امتداد بسيط لـ $\mathbb{R}$.

____ جـ. كل عنصر في الحقل F جبري على F.

____ د. $\mathbb{R}$ حقل ممتد لـ $\mathbb{Q}_2$.

____ هـ. $\mathbb{Q}$ حقل ممتد لـ $\mathbb{Z}_2$.

____ و. لتكن $\alpha \in \mathbb{C}$ جبريًّا على $\mathbb{Q}$ من الدرجة n، إذا كانت $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ كثيرة حدود غير صفرية، و $f(\alpha) = 0$ تكون $n \geq$ (درجة $f(x)$).

____ ح. لتكن $\alpha \in \mathbb{C}$ جبريًّا على $\mathbb{Q}$ من الدرجة n، إذا كانت $f(x) = 0$ للدالة غير الصفرية $f(x) \in \mathbb{R}[x]$، فإن $n \geq$(درجة $f(x)$)، أي أكبر أو تساوي n.

____ ط. كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$ لها صفر في حقل ممتد لـ F.

____ ي. كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$ لها صفر في الحقول الممتدة لـ F جميعها.

____ ك. إذا كان x غير معين، فإنّ $\mathbb{Q}[x] \simeq \mathbb{Q}[\pi]$.

24. ذكرنا من غير برهان أنّ π و e متساميان على $\mathbb{Q}$.

أ. أوجد حقلاً جزئيًّا F من $\mathbb{R}$، حيث π جبري من الدرجة 3 على F.

ب. أوجد حقلاً جزئيًّا E من $\mathbb{R}$، حيث إنّ e^2 جبري من الدرجة 5 على E.

25. أ. أثبت أنّ $x^3 + x^2 + 1$ غير مختزلة على $\mathbb{Z}_2$.

ب. لتكن α صفرًا لكثيرة الحدود $x^3 + x^2 + 1$ في الحقل الممتد من $\mathbb{Z}_2$، فأثبت أنّ $x^3 + x^2 + 1$ تتحلل إلى ثلاثة ... هذه العوامل فعليًّا. [مساعدة: كل عنصر من $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ يكون على الصورة

$a_0 + a_1\,\alpha + a_2\,\alpha^2$، حيث $a_i = 0,1$ قَسِّم $x^3 + x^2 + 1$ على $x - a$ قسمة طويلة، وأثبت أنّ خارج القسمة له صفر أيضًا في $\mathbb{Z}_2\,(\alpha)$، وذلك بتجريب العناصر الثمانية بكل بساطة، ثمَّ أكمل التحليل].

26. ليكن الحقل E امتدادًا للحقل $\mathbb{Z}_2$ ، وليكن $\alpha \in E$ جبريًّا من الدرجة 3 على $\mathbb{Z}_2$. صنِّف الزمر $\langle \mathbb{Z}_2(\alpha), + \rangle$ و $\langle (\mathbb{Z}_2(\alpha))^*, \cdot \rangle$ تبعًا للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد، وكالمعتاد $(\mathbb{Z}_2(\alpha))^*$ هي مجموعة العناصر غير الصفرية لـ $\mathbb{Z}_2(\alpha)$.

27. ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F، وليكن $\alpha \in E$ جبريًّا على F. حيث يُشار إلى كثيرة الحدود $\operatorname{irr}(\alpha\,, F)$ أحيانًا بكثيرة الحدود الصغرى ***(minimal polynomial for α over F)*** على F. لماذا يعدّ هذا الاسم ملائمًا؟

براهين مختصرة

28. أعطِ جملتين أو ثلاث جمل توجز إثبات المبرهنة 3.29.

براهين

29. ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F، وليكن $\alpha,\beta \in E$، وافترض أنّ α متسامٍ على F وجبرية على $F(\beta)$، فأثبت أنّ β جبرية على $F(\alpha)$.

30. ليكن الحقل E امتدادًا للحقل المنتهي F، حيث F يحتوي على q عنصرًا، وليكن $\alpha \in E$ جبريًّا على F من الدرجة n. فأثبت أن $F(\alpha)$ يحتوي على q^n عنصرًا.

31. أ. برهن أنه توجد كثيرة حدود غير مختزلة من الدرجة الثالثة في $\mathbb{Z}_3[x]$.

ب. برهن باستخدام الفرع (أ) أنه يوجد حقل منتهٍ يتكوّن من 27 عنصرًا [مساعدة: استخدم تمرين 30].

32. ليكن الحقل الأولي $\mathbb{Z}_p$ ذا المميز $p \neq 0$.

أ. برهن أنه إذا كانت $p \neq 2$، فليس كل عنصر في $\mathbb{Z}_p$ مربعًا لعنصر في $\mathbb{Z}_p$. [مساعدة: $1^2 = (p-1)^2 = 1$ في $\mathbb{Z}_p$. استنتج النتيجة المطلوبة بالعد].

ب. استخدم الفرع (أ) لتبرهن أنه توجد حقول منتهية تتكوّن من p^2 عنصرًا لكل عدد أولي p في $\mathbb{Z}^+$.

33. ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F ، وليكن $\alpha \in E$ متساميًّا على F. برهن أنّ كل عنصر في $F(\alpha)$ وليس في F ، يكون متساميًّا أيضًا على F.

34. برهن أنّ $\{a + b(\sqrt[3]{2}) + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ حقل جزئي من $\mathbb{R}$ باستخدام الأفكار الواردة في هذا الفصل، وليس باستخدام التحقق العادي لمسلمات الحقل. [مساعدة: استخدم المبرهنة 18.29].

35. باستخدام النهج نفسه الوارد في تمرين 31، برهن أنه يوجد حقل من 8 عناصر، و 16 عنصرًا، و25 عنصرًا.

36. ليكن F حقلاً ذا مميز p. برهن أنّ كل عنصر من عناصر F جبري على حقل أولي $\mathbb{Z}_p \leq F$. [مساعدة: ليكن F^* مجموعة العناصر غير الصفرية في F، طبّق مبرهنة الزمر على الزمرة $\langle F^*, \cdot \rangle$؛ لتبرهن أنّ كل $\alpha \in F^*$ هي صفر لكثيرة حدود في $\mathbb{Z}_p\,[x]$ على الصورة $x^n - 1$].

37. استخدم التمرينين 30 و 36 لتبرهن أنّ عدد عناصر أي حقل منتهٍ يساوي إحدى قوى عدد أولي، أي إنه يحتوي عددًا من العناصر يساوي إحدى قوى عدد أولي.

فضاء المتجهات Vector Spaces

قد تكون مفاهيم فضاء المتجهات، والقياسيات، والمتجهات المستقلة والأساس مفاهيم معروفة، وسنقدم في هذا الفصل هذه المفاهيم، حيث تكون القياسيات عناصر في أي حقل، وسنستعمل الأحرف الإغريقية مثل α و β للمتجهات، وبحسب تطبيقاتنا ستكون المتجهات عناصر من حقل تمدد E للحقل F، وستكون أيضًا البراهين مطابقة لتلك التي تعطى في العادة في المقرر الدراسي الأول للجبر الخطي، فإذا كانت هذه الأفكار معروفة، فنقترح دراسة الأمثلة 4.30، 11.30، 14.30و22.30، ثمّ قراءة المبرهنة 23.30 وبرهانها، وإذا كانت الأمثلة والنظرية مفهومة، فحلّ بعض التمارين، ثم اذهب إلى الفصل الآتي.

التعريف والخصائص الأساسية

موضوع فضاء المتجهات هو حجر الزاوية في الجبر الخطي، ولأنّ الجبر الخطي ليس موضوع الدراسة في هذا الكتاب، فستكون معالجتنا لفضاء المتجهات مختصرة، ومصممة فقط لتطوير مفهومي الاستقلال الخطي والبعد، اللذين سنحتاج إليهما في نظرية الحقول.

إن مفهومي المتجه والقياسي ربما يكونان معروفين من التفاضل والتكامل، وستكون القياسيات هنا عناصر من أي حقل، وليس مجرد حقل الأعداد الحقيقية، إضافة إلى أننا سنطور النظرية باستخدام مسلمات، تمامًا كتلك التي درسناها للأنظمة الجبرية.

1.30 تعريف ليكن F حقلًا. **فضاء المتجهات على F (*vector space over F*)** يتكوّن من زمرة إبدالية V مع عملية الجمع وعملية ضرب بعدد قياسي لكل عنصر في V مع كل عنصر من F من اليسار، بحيث تتحقق الشروط الآتية لكل $a, b \in F$ و $\alpha, \beta \in V$:

$\mathscr{V}_1$: $a\alpha \in V$

$\mathscr{V}_2$: $a(b\alpha) = (ab)\alpha$

$\mathscr{V}_3$: $(a+b)\alpha = (a\alpha) + (b\alpha)$

$\mathscr{V}_4$: $a(\alpha + \beta) = (a\alpha) + (a\beta)$

$\mathscr{V}_5$: $1\alpha = \alpha$

تسمى عناصر V متجهات وعناصر F أعدادًا قياسية، وعندما نناقش حقلاً واحدًا فقط F، فسنسقط الإشارة إلى F، ونشير إلى فضاء المتجهات. ■

لاحظ أنّ الضرب القياسي في فضاء المتجهات ليس عملية ثنائية على مجموعة واحدة بالمفهوم الذي عرفناه في الفصل 2، فهي تربط العنصر $a\alpha$ في V بالزوج المرتب (a,α) والمكوّن من العنصر a من F والعنصر α من V، وهكذا فإنّ الضرب القياسي هو دالة من $F\times V$ إلى V، وسيرمز للعنصر المحايد لعملية الجمع على V – المتجه 0 – والعنصر المحايد لعملية الجمع على F – العدد القياسي 0 – بالرمز 0.

2.30 مثال لتكن الزمرة الإبدالية $\langle \mathbb{R}_n, +\rangle = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ ، n من المرات، التي تتكوّن من المتعددات جميعها من الرتبة n مع الجمع. عرّف الضرب القياسي على القياسيات من $\mathbb{R}$ بالطريقة الآتية:

$$r\alpha = (ra_1, \ldots, ra_n)$$

■ **نبذة تاريخية**

بدأ تبلور المفهوم المجرد لفضاء المتجهات في أمثلة محددة في القرن التاسع عشرأو قبله، فعلى سبيل المثال: تعامل ويليام روان هاملتون (William Rowan Hamilton) مع الأعداد المركبة على نحو واضح بوصفها أزواجًا من الأعداد الحقيقية – كما ذُكر في الفصل 24– كذلك تعامل مع ثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية، وأخيرًا تعامل مع رباعي مرتب من الأعداد الحقيقية عندما ابتكر المرباعيات، وفي هذه الحالات أصبحت المتجهات كائنات يمكن جمعها وضربها في قياسي، وذلك باستخدام قوانين مناسبة لتلك العمليات، وهناك المزيد من الأمثلة على هذه الكائنات بما فيها الأشكال التفاضلية (مفاهيم مرتبطة بإشارات التكامل) والأعداد الصحيحة الجبرية، وعلى الرغم من أنّ هيرمان جراسمان ((1877 - Herman Grassman 1809 نجح في استنباط مبرهنة مفصلة لفضاءات ذات البعد n ، في كتابه (Die lineale Ausdnungslehre) عامي 1844م و1862م، إلّا أنَّ أول رياضي أعطى تعريفًا مجرّدًا لفضاء المتجهات يكافئ التعريف 1.30 كان جوسبي بيانو (Giuseppe Peano 1858 – 1932)، في كتابه (Calcolo Geometrico) عام 1888م. كان بيانو يهدف في كتابه – كما يتضح من عنوان الكتاب – إلى تطوير تفاضل وتكامل هندسي، وتبعًا له، فإنّ مثل هذا التفاضل والتكامل يتكوّن من نظام من العمليات، يشبه تلك التي في التفاضل والتكامل الجبري، والفرق أنّ الكائنات التي تتم بها الحسابات هي كائنات هندسية بدلاً من الكائنات الجبرية، لكنّ الغريب في الأمر، أنّ عمل بيانو لم يكن له أي أثر في الساحة الرياضية، ومع أنّ هيرمان وايل (Herman Weyl 1885 – 1955) أعاد بصورة أساسية تعريف بيانو نفسه، حيث ورد ذلك في كتابه (Space – Time – Matter) عام 1918م، إلّا أنّ تعريف فضاء المتجهات لم يدخل حقل الرياضيات إلا عندما أعلن عنه للمرة الثالثة من قبل ستيفان باناخ (Stefan Banach 1892 – 1945)، في رسالة للدكتوراة طُبعت عام 1922م، التي تعاملت مع ما نسميه اليوم فضاء المتجهات المعياري الكامل (Banach Spaces).

حيث $r \in \mathbb{R}$ و $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$، ومع هاتين العمليتين، تصبح $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهات على $\mathbb{R}$، حيث يمكن التحقق من مسلمات فضاء المتجهات بسهولة، وبوجه خاص، يمكن النظر إلى $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بوصفها فضاء متجهات على $\mathbb{R}$، الذي يتكون من المتجهات جميعها المنطلقة من نقطة الأصل، كما تدرس في العادة في مادة التفاضل والتكامل. ▲

3.30 مثال لأيّ حقل F، يمكن أن نعدّ $F[x]$ فضاء متجهات على F، حيث جمع المتجهات هو الجمع الاعتيادي لكثيرات الحدود في $F[x]$، والضرب القياسي $a\alpha$ لعنصر من $F[x]$ مع عنصر من F هو الضرب العادي لعناصر $F[x]$، حيث يمكن التوصل إلى مسلمات فضاء المتجهات $\mathscr{V}_1$ إلى $\mathscr{V}_5$ بسهولة، وذلك من حقيقة أنّ $F[x]$ يمثل حلقة لها عنصر محايد. ▲

4.30 مثال ليكن الحقل E تمددًا للحقل F، يمكن أن نعدّ E فضاء متجهات على F، حيث جمع المتجهات هو الجمع العادي في E، والضرب القياسي $a\alpha$ هو الضرب العادي في الحقل E، حيث $a \in F$ و $\alpha \in E$، فتتحقق المسلمات هنا مباشرة من مسلمات الحقل E، وفي هذه الحالة حقل القياسيات هو في الحقيقة مجموعة جزئية من فضاء المتجهات.

هذا هو المثال المهم بالنسبة إلينا. ▲

لا نفترض أي شيء بالنسبة إلى فضاء المتجهات من عملنا السابق، وسنبرهن كل شيء نحتاج إليه باستخدام التعريف، على الرغم من أن النتائج قد تكون مألوفة من التفاضل والتكامل.

5.30 مبرهنة إذا كان V فضاء متجهات على F، فإنّ $0\alpha = 0$، $a0 = 0$ و $(-a)\alpha = a(-\alpha) = -(a\alpha)$ لكل $a \in F$ و $\alpha \in V$.

البرهان يجب أن تقرأ المعادلة $0\alpha = 0$ كالآتي-: "(القياسي 0) α = (المتجه 0)"، وكذلك $a0 = 0$ تقرأ: "a(المتجه 0) = (المتجه 0)"، والبراهين هنا شبيهة بتلك في المبرهنة 8.18 على الحلقات، التي تعتمد بصورة مكثفة على قوانين التوزيع $\mathscr{D}_3$ و $\mathscr{D}_4$. الآن:

$$(0\alpha) = (0+0)\alpha = (0\alpha) + (0\alpha)$$

تمثل معادلة في الزمرة الإبدالية $\langle V, +\rangle$؛ وهكذا، وباستخدام قانون الحذف في الزمر، $0\alpha = 0$. وكذلك، فمن:

$$a0 = a(0+0) = a0 + a0$$

نستنتج أن $a0 = 0$. إذن:

$$0 = 0\alpha = (a + (-a))\alpha = a\alpha + (-a)\alpha,$$

وهكذا، فإنّ $(-a)\alpha = -(a\alpha)$. وبالمثل، فمن

$$0 = a0 = a(\alpha + (-\alpha)) = a\alpha + a(-\alpha),$$

نستنتج كذلك أنّ $a(-\alpha) = -(a\alpha)$. ♦

الاستقلال الخطي والأساس

6.30 تعريف ليكن V فضاء متجهات على F، فالمتجهات في المجموعة $S = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ من V **تولد** V (***span or generate***) إذا كان لكل $\beta \in V$،

$$\beta = a_1\alpha_{i_1} + a_2\alpha_{i_2} + \dots a_n\alpha_{i_n}$$

بحيث $a_j \in F$ و $a_{ij} \in S$، $j = 1, \dots, n$.

المتجه $\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{i_j}$ **تركيب خطي** (***linear combination***) من α_{ij}. ■

7.30 مثال في فضاء المتجهات $\mathbb{R}^n$ على $\mathbb{R}$ في المثال 2.30 من الواضح أنّ المتجهات:

$$(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)$$

تولد $\mathbb{R}^n$؛ لأن

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1(1,0, \ldots, 0) + a_2\,(0,1, \ldots, 0) + \ldots + a_n\,(0,0, \ldots,1)$$

وكذلك أحاديات الحد x^m حيث $m \geq 0$ تولد $F[x]$ على F فضاء المتجهات في المثال 3.30. ▲

8.30 مثال ليكن F حقلاً، وليكن الحقل E امتدادًا لـ F، ولتكن $\alpha \in E$ جبرية على F، فإنّ $F(\alpha)$ فضاء متجهات على F بحسب المبرهنة 18.30، وهو يتولد من المتجهات $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$، حيث $n = \deg(\alpha,F)$.

هذا مثال مهم لنا. ▲

9.30 تعريف يسمى فضاء المتجهات V على F فضاءً **منتهي البعد (finite dimensional)**، إذا توافرت مجموعة متجهات منتهية من V تولد V. ■

10.30 مثال يرينا المثال 7.30 أنّ $\mathbb{R}^n$ منتهي البعد، ولكن فضاء المتجهات $F[x]$ على F ليس منتهي البعد؛ لأنّ كثيرات الحدود ذوات الدرجات العليا لا يمكن أن تكون تركيبًا خطيًّا من عناصر أيّ مجموعة منتهية من كثيرات الحدود. ▲

11.30 مثال ليكن $F \leq E$، ولتكن $\alpha \in E$ جبرية على الحقل F، فيرينا المثال 8.30 أنّ فضاء المتجهات $F(\alpha)$ منتهي البعد على F. وهذا أكثر الأمثلة أهمية. ▲

12.30 تعريف تسمى المتجهات في المجموعة $S = \{\alpha_i | i \in I\}$ من فضاء المتجهات V **مستقلة خطيًّا (*linearly independent*)** على F، إذا كان لأي عناصر مختلفة $\alpha_{ij} \in S$ ومعاملات $a_j \in F$ و $n \in \mathbb{Z}^+$ يكون $\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{i_j} = 0$ في V فقط إذا كان $a_j = 0$ لكل $j = 1, \ldots, n$، أمّا إذا كانت المتجهات ليست مستقلة خطيًّا على F، فإنها تسمى **مرتبطة خطيًّا** على F **(*linearly dependent*)**. ■

إذن، تكون المتجهات في $\{\alpha_i : i \in I\}$ مستقلة خطيًّا على F، إذا كانت الطريقة الوحيدة لكتابة المتجه 0 بوصفها تركيبًا خطيًّا من المتجهات α_i، هو لأنّ المعاملات القياسية جميعها تساوي 0، فإذا كانت المتجهات مرتبطة خطيًّا على F، فيوجد $a_j \in F$، حيث $j = 1, \ldots, n$ و $\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{i_j} = 0$، وليس كل $a_j = 0$.

13.30 مثال لاحظ أنّ المتجهات التي تولد $\mathbb{R}^n$ المعطاة في المثال 7.30 مستقلة خطيًّا على $\mathbb{R}$، وكذلك المتجهات $\{x^m : m \geq 0\}$ مستقلة خطيًّا بوصفها متجهات من $F[x]$ على F، ولاحظ أنّ $(1,-1)$, $(2,1)$ و$(-3, 2)$ مرتبطة خطيًّا في $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$؛ وذلك لأن:

$$7(1, -1) + (2,1) + 3(-3,2) = (0,0) = 0$$ ▲

14.30 مثال ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F، ولتكن $\alpha \in E$ جبرية على F.

إذا كانت $deg(\alpha, F) = n$، فإن كل عنصر في $F(\alpha)$ وبحسب المبرهنة 18.29، يكتب بطريقة وحيدة على الصورة:

$$b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$$

حيث $b_i \in F$.

بوجه خاص، $0 = 0 + 0\alpha + \ldots + 0\alpha^{n-1}$ هي صورة وحيدة لـ 0، وهكذا، فإنّ العناصر $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ متجهات مستقلة خطيًا في $F(\alpha)$ على الحقل F.

وهي كذلك تولد $F(\alpha)$، وهكذا وبحسب التعريف الآتي، فإنّ $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ تشكل أساسًا لـ $F(\alpha)$ على F، وهذا مثال مهم بالنسبة إلينا، وفي الحقيقة هذا هو سبب دراستنا لهذه المادة من فضاء المتجهات. ▲

15.30 تعريف إذا كان V فضاء متجهات على الحقل F، فإنّ متجهات المجموعة الجزئية $B = \{\beta_i | i \in I\}$ من V تشكل **أساسًا** لـ V على F (***basis***)، إذا كانت تولد V ومستقلة خطيًا. ■

البعد

النتائج الوحيدة المتبقية التي نود برهنتها عن فضاء الاتجاهات، هي أنّ كل فضاء متجهات ذو بعد منته له أساس، وكل أساسين لفضاء متجهات منتهيتا البعد لهما عدد العناصر نفسه، هاتان النتيجتان كلتاهما صحيحتان دون اشتراط أنهما منتهيا البعد، ولكن البراهين تحتاج إلى المزيد من المعرفة بنظرية المجموعات بما يزيد على ما افترضناه، وحالة البعد المنتهي هي كل ما نحتاج إليه، وسنبدأ أولاً بتمهيدية سهلة.

16.30 تمهيدية ليكن V فضاء متجهات على الحقل F، ولتكن $\alpha \in V$، فإذا كانت α تركيبًا خطيًا من المتجهات β_i في V، حيث $i = 1, \ldots, m$، وكل β_i تركيب خطي من المتجهات γ_j في V، حيث $j = 1, \ldots, m$، فإنّ α تركيب خطي من γ_j.

البرهان لتكن $\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i \beta_i$، ولتكن $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_j$، حيث a_i و b_{ij} عناصر في F.

وهكذا، فإنّ:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij} \right) \gamma_j$$

و

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij}\right) \in F$$ ♦

مبرهنة 7.30 في فضاء متجهات منتهي البعد، كل مجموعة منتهية من المتجهات مولدة للفضاء تحوي مجموعة جزئية تشكل أساسًا.

البرهان ليكن V منتهي البعد على F، ولتكن المتجهات $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ في V تولد V. ضع ألـ α_i في صف، واختبر من ثم كل α_i بادئًا من اليسار مع $i = 1$، واحذف أول α_j تكتب بوصفها تركيبًا خطيًّا من α_i السابق لها، حيث $i < j$، ثمّ أكمل بادئًا ب - α_{j+1}، ثم احذف α_k اللاحقة التي تكتب بوصفها تركيبًا خطيًّا من العناصر المتبقية السابقة لها، وهكذا. عندما نصل إلى α_n بعد عدد منته من الخطوات، فإنّ أي α_i متبقية في القائمة لا تكتب بوصفها تركيبًا خطيًّا من سابقاتها في القائمة المختصرة، أضف إلى ذلك، تبرهن التمهيدية 16.30 أنّ أي متجه يكتب بوصفه تركيبًا خطيًّا من المجموعة α_i الأصلية، يظل يكتب بوصفه تركيبًا خطيًّا من القائمة المختصرة – وربما الأصغر – التي لا يكتب فيها أي α_i بوصفه تركيبًا خطيًّا من المتجهات السابقة له، وهكذا فإنّ المتجهات في القائمة المختصرة لـ α_i تولد V كذلك.

في القائمة المختصرة، افترض أنّ:

$$a_1 \alpha_{i_1} + \ldots + a_r \alpha_{i_r} = 0$$

حيث $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ وبعض ألـ $a_j \neq 0$. يمكننا أن نفرض من المبرهنة 5.30 أنّ $a_r \neq 0$، أو أن نحذف $a_r \alpha_{i_r}$ من يسار المعادلة، وهكذا وباستخدام المبرهنة 5.30 مرة ثانية، فإننا نحصل على:

$$\alpha_{i_r} = \left(-\frac{a_1}{a_r}\right)\alpha_{i_1} + \cdots + \left(-\frac{a_{r-1}}{a_r}\right)\alpha_{i_{r-1}},$$

الذي يثبت أنّ α_{i_r} تكتب بوصفها تركيبًا خطيًّا من سابقاتها، ما يناقض عملنا. إذن، المتجهات α_i في القائمة المختصرة تولد V ومستقلة خطيًّا، وهكذا فإنها تشكل أساسًا لـ V على F. ♦

18.30 نتيجة يكون لفضاء المتجهات منتهي البعد أساس منتهٍ.

البرهان بحسب التعريف، يكون لفضاء المتجهات منتهي البعد مجموعة مولدة منتهية من المتجهات.

المبرهنة 17.30 تكمل الإثبات. ♦

والمبرهنة الآتية هي أوج عملنا في فضاء المتجهات.

19.30 مبرهنة لتكن $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ مجموعة منتهية من المتجهات المستقلة خطيًّا في فضاء متجهات منتهي البعد V على الحقل F، ويمكن تكبير S لتصبح أساسًا لـ V على F، وأكثر من ذلك، إذا كانت $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ أساسًا لـ V على F، فإنّ $r \leq n$.

البرهان بحسب النتيجة 18.30، يوجد أساس $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ لـ V على F، لتكن المتتالية المنتهية من المتجهات.

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_n$$

هذه المتجهات تولد V؛ لأن B أساس، وباتباع الخطوات المستخدمة في المبرهنة 17.30 بحذف

كل متجه يكتب بوصفه تركيبًا خطيًّا من المتجهات السابقة له وبالترتيب من اليسار إلى اليمين، سنصل إلى أساس للفضاء V، لاحظ أنه لن يحذف أي α_i لأنها مستقلة خطيًّا، وهكذا يمكن تكبير S لتصبح أساسًا لـ V على F.

لإثبات الجزء الثاني من الاستنتاج، افترض المتتالية

$$\alpha_1, \beta_1, \cdots, \beta_n$$

هذه المتجهات ليست مستقلة خطيًّا على F؛ لأن α_i تكتب بوصفها تركيبًا خطيًّا

$$\alpha_1 = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$$

لأن β_i تمثل أساسًا، وهكذا فإنّ:

$$\alpha_1 + (-b_1)\beta_1 + \cdots + (-b_n)\beta_n = 0$$

المتجهات في هذه المتتالية تولد V، وإذا أوجدنا أساسًا بالعمل من اليسار إلى اليمين وحذف كل متجه يكتب بوصفه تركيبًا خطيًّا من المتجهات المتبقية السابقة له، فستحذف على الأقل β_i واحدة، ما يعطي الأساس.

$$\{\alpha_1, \beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_m^{(1)}\}$$

حيث $m \leq n\text{-}1$. وبتطبيق الخطوات نفسها على متتالية المتجهات

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_m^{(1)}$$

نصل إلى أساس جديد

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_s^{(2)}\}$$

حيث $s \leq n-2$. ونستمر في العمل حتى نصل في النهاية للأساس

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1^{(r)}, \cdots, \beta_t^{(r)}\}$$

حيث $0 \leq t \leq n-r$. إذًا $r \leq n$. ♦

20.30 نتيجة أي أساسين لفضاء متجهات منتهي البعد V على F لهما عدد العناصر نفسه.

البرهان لتكن $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$، و $B' = \{\beta'_1, \cdots, \beta'_m\}$ أساسين، وبحسب المبرهنة 19.30 وعدّ

B مجموعة مستقلة من المتجهات و B' بوصفها أساسًا، نرى أنّ $n \le m$، وبطريقة مماثلة نحصل على $m \le n$. إذن، $m = n$. ♦

21.30 تعريف إذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد على الحقل F، فإنّ عدد عناصر أيّ أساس (بغض النظر عن اختيار الأساس، كما أثبتنا توًّا) يسمى **بعد V على F**. ***(dimension of V over F)*** ■

22.30 مثال ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F و $\alpha \in E$، ويثبت المثال 14.30 أنه إذا كانت α جبرية على F و $\deg(\alpha, F) = n$، فإنّ بعد $F(\alpha)$ بوصفه فضاء متجهات على F يساوي n، وهذا أكثر مثال مهم لنا. ▲

تطبيق على نظرية الحقول

سنجمع النتائج حول نظرية الحقول الواردة في الأمثلة 4.30، 8.30، 11.30، 14.30 و 22.30 وندمجها في مبرهنة واحدة، حيث تعطي العبارة الأخيرة في هذه المبرهنة تطبيقًا إضافيًّا جميلاً لأفكار فضاء المتجهات على نظرية الحقول.

23.30 مبرهنة ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F، ولتكن $\alpha \in E$ جبرية على F، فإذا كانت $\deg(\alpha,F)=n$، فإنّ $F(\alpha)$ يكون فضاء متجهات ذا بعد يساوي n على F مع الأساس $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$، وكذلك يكون كل عنصر β في $F(\alpha)$ جبريًّا على F و $\deg(\beta, F) \le \deg(\alpha, F)$.

البرهان برهنا كل شيء في الأمثلة السابقة عدا النتيجة المهمة المذكورة في العبارة الأخيرة في هذه المبرهنة، لتكن $\beta \in F(\alpha)$، حيث α جبرية على F من الدرجة n، لتكن العناصر

$$1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n$$

لا يمكن لـ $n+1$ عنصر في $F(\alpha)$ أن تكون مختلفة ومستقلة خطيًّا على F؛ لأنه وبحسب المبرهنة 19.30، أي أساس لـ $F(\alpha)$ على F يجب أن يحوي على الأقل عددًا مماثلاً لأي مجموعة من المتجهات المستقلة خطيًّا على F، وفي كل حال، فإنّ الأساس $\{1,\alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ يحوي n عنصرًا فقط، فإذا كانت $\beta^i = \beta^j$، فإنّ $\beta^i - \beta^j = 0$، وهكذا وفي أي حالة يوجد $b_i \in F$، بحيث إنّ

$$b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \cdots + b_n\beta^n = 0$$

وليس كل $b_i = 0$. إذن، $f(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ تعطي عنصرًا لا يساوي الصفر في $F[x]$ بحيث $f(\beta) = 0$، وهكذا فإنّ β جبرية على F و $\deg(\beta, F)$ على الأكثر n. ♦

■ تمارين 30

حسابات

1. أوجد ثلاثة أساسات لـ $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$، بحيث لا يكون لأي اثنين منهما متجه مشترك.

في التمرينين 2 و 3، حدّد إذا كانت مجموعة المتجهات المعطاة تشكل أساسًا لـ $\mathbb{R}^3$ على $\mathbb{R}$.

2. $\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ **3.** $\{(-1,1,2), (2,-3,1), (10, -14,0)\}$

في التمارين 4 إلى 9، أعطِ أساسًا لفضاء المتجه المعيّن على الحقل.

4. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ على $\mathbb{Q}$ **5.** $\mathbb{R}(\sqrt{2})$ على $\mathbb{R}$

6. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ على $\mathbb{Q}$ **7.** $\mathbb{C}$ على $\mathbb{R}$

8. $\mathbb{Q}(i)$ على $\mathbb{Q}$ **9.** $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ على $\mathbb{Q}$

10. تبعًا للمبرهنة 23.30، العنصر $\alpha + 1$ من $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ في المثال 19.29 جبري على $\mathbb{Z}_2$. أوجد كثيرة الحدود غير المختزلة لـ $\alpha + 1$ في $\mathbb{Z}_2[x]$.

مفاهيم

في التمارين 11 إلى 14، صحّح التعريفات للفقرات المكتوبة بخط مائل، دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – وذلك حتى تصبح في شكل قابل للنشر.

11. المتجهات في مجموعة جزئية S من فضاء المتجهات V على الحقل F يولد V، إذا وفقط إذا كان كل $\beta \in V$ يمكن التعبير عنها بصورة وحيدة بوصفها تركيبًا خطيًّا من متجهات S.

12. المتجهات في المجموعة الجزئية S من فضاء المتجه V على الحقل F مستقلة خطيًّا على F، إذا وفقط إذا كان المتجه الصفر لا يمكن أن يكون تركيبًا خطيًّا من متجهات في S.

13. البعد على F لفضاء متجهات منتهي البعد V على الحقل F، هو أصغر عدد مطلوب من المتجهات ليولد V.

14. الأساس لفضاء المتجهات على الحقل F، هو مجموعة متجهات في V تولد V وتكون مرتبطة خطيًّا.

15. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. مجموع متجهين يكون متجهًا.

______ ب. مجموع قياسيين يكون متجهًا.

______ جـ. حاصل ضرب قياسيين يكون قياسيًّا.

______ د. حاصل ضرب قياسي في متجه يكون متجهًا.

______ هـ. كل فضاء متجهات له أساس منتهٍ.

______ و. المتجهات في أساس تكون مرتبطة خطيًّا.

______ ز. متجه الصفر يمكن أن يكون جزءًا من أساس.

______ ح. إذا كان $F \leq E$ و $\alpha \in E$ جبريًّا على الحقل F، فإنّ α^2 جبري على F.

______ ط. إذا كان $F \leq E$ و $\alpha \in E$ جبريًّا على الحقل F، فإنّ $\alpha + \alpha^2$ جبري على F.

______ ي. كل فضاء متجهات له أساس.

التمارين الآتية تتناول دراسات مستقبلية لفضاء المتجهات، وفي كثير من الحالات نكون مطالبين بأن نعرّف بعض المفاهيم لفضاء المتجهات مشابهة لتلك التي تمّت دراستها لبنى جبرية أخرى، ستطور هذه التمارين قدراتنا لنتعرّف حالات متوازية ومرتبطة بالجبر.

لا يعتمد أي من التمارين الآتية على المفاهيم المعرفة في التمارين السابقة.

16. ليكن V فضاء متجهات على الحقل F.

أ. عرِّف فضاءً جزئيًّا لفضاء متجهات V على F.

ب. برهن على أنّ تقاطع فضاءات جزئية من V هو أيضًا فضاء جزئي من V على F.

17. ليكن V فضاء متجهات على الحقل F، ولتكن $S = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ مجموعة غير خالية من المتجهات في V.

أ. باستخدام التمرين (16 ب)، عرّف الفضاء الجزئي من V المتولد بـ S.

ب. برهن على أنّ المتجهات في الفضاء الجزئي من V المتولد بـ S هي بالتحديد التراكيب الخطية (المنتهية) للمتجهات في S. (قارن بالمبرهنة 6.7).

18. لتكن $V_1, \ldots, V_n$ فضاءات متجهات على الحقل F نفسه. عرِّف الجمع المباشر $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ لفضاءات المتجهات V_i لكل $i = 1, \ldots, n$، وأثبت أنّ الجمع المباشر هو أيضًا فضاء متجهات على F.

19. عمِّم المثال 2.30 لتحصل على فضاء المتجهات F^n لمتعددات مرتبة من الرتبة n لعناصر من F على الحقل F، ما الأساس لـ F^n؟

20. عرِّف تماثلًا لفضاء المتجهات V على الحقل F مع فضاء متجهات V' على الحقل F نفسه.

براهين

21. برهن على أنه إذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد على الحقل F، فإنّ المجموعة الجزئية $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n\}$ من V هي أساس لـ V على F، إذا وفقط إذا كان كل متجه في V يمكن التعبير عنه بصورة وحيدة بوصفه تراكيب خطية من β_i.

22. ليكن F أيّ حقل. خذ في الحسبان النظام المكوّن من m معادلة خطية آنية تحتوي على n من المجاهيل:

$$
\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n &= b_1,\\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n &= b_2,\\
&\vdots\\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n &= b_m,
\end{aligned}
$$

حيث $a_{ij}, b_j \in F$

أ. برهن على أنّ النظام «له حل»، أي إنه توجد $X_1, \ldots, X_n \in F$ تحقق ألـ m معادلة، إذا وفقط إذا كان المتجه $\beta = (b_1, \cdots, b_m)$ من F^m هو تركيب خطي للمتجهات $\alpha_j = (a_{1j}, \cdots, a_{mj})$، (هذه النتيجة يمكن برهنتها مباشرة؛ لأنها عمليًا تعريف للحل، لكن يجب أن تعد النظرية الأساسية لتوافر حل آني لنظام المعادلات الخطية).

ب. من الجزء (أ). برهن على أنه إذا كان $n = m$ و $\{\alpha_j \mid j = 1, \cdots, n\}$ هي أساس لـ F^n، فإنّ النظام يكون له دائمًا حل وحيد.

23. برهن على أنّ كل فضاء متجهات V منتهي البعد، وله البعد n على الحقل F يماثل فضاء المتجهات F^n في التمرين 19.

24. ليكن V و V' فضائي متجهات على الحقل F نفسه، فالدالة $\phi : V \to V'$ هي **تحويل خطي (linear transformation)** من V إلى V'، إذا تحققت الشروط الآتية لكل $\alpha, \beta \in V$ و $a \in F$:

$$\phi (\alpha + \beta) = \phi (\alpha) + \phi (\beta)$$

$$\phi (a\alpha) = a (\phi(\alpha))$$

أ. إذا كانت $\{\beta_i \mid i \in I\}$ أساسًا لـ V على F، فبرهن على أنّ التحويل الخطي $\phi : V \to V'$ يتعين كليًّا بالمتجهات $\phi (\beta_i) \in V'$

ب. ليكن $\{\beta_i \mid i \in I\}$ أساسًا لـ V، وليكن $\{\beta_i' \mid i \in I\}$ أي مجموعة من المتجهات من V' – التي ليست بالضرورة مختلفة – برهن على أنه يوجد تحويل خطي وحيد $\phi : V \to V'$، حيث إنّ $\phi (\beta_i) = \beta_i'$.

25. ليكن V, V' فضائي متجهات على الحقل F نفسه، وليكن $\phi : V \to V'$ تحويلًا خطيًّا.

أ. ما المفهوم الذي سبق أن درسناه للبنية الجبرية للزمر والحلقات، ويطابق مفهوم التحويل الخطي؟

ب. عرّف النواة (*kernel*) أو الفضاء الصفري (*nullspace*) لـ ϕ، وبرهن على أنه فضاء جزئي من V.

26. ليكن V فضاء متجهات على الحقل F، وليكن S فضاءً جزئيًّا من V، فعرّف فضاء خارج القسمة (*quotient space*) V/S، وبرهن على أنه فضاء متجهات على F.

27. ليكن V، V' فضائي متجهات على الحقل F نفسه ، وليكن V منتهي البعد على F، وليكن $\dim(V)$ البعد لفضاء المتجهات V على F، ولتكن $\phi : V \to V'$ تحويلًا خطيًّا.

أ. برهن على أنّ $\phi (V)$ فضاء جزئي من V'.

ب. برهن على أنّ $\dim (\phi [V]) = \dim (V) - \dim (Ker(\phi))$. [مساعدة: اختر الأساس المناسب لـ V باستخدام المبرهنة 19.30، على سبيل المثال: وسّع أساسًا لـ $\text{Ker} (\phi)$ إلى أساس لـ $[V]$].

الامتدادات الجبرية Algebraic Extensions

الامتدادات المنتهية

رأينا في المبرهنة 23.30 أنه إذا كان الحقل E امتدادًا للحقل F، وكان $\alpha \in E$ جبريًّا على F، فإنّ كل عنصر في $F(\alpha)$ يكون جبريًّا على F، وفي دراستنا لأصفار كثيرات الحدود في $F[x]$، سنكون مهتمين وبصورة حصرية تقريبًا بامتدادات F التي تحوي عناصر جبرية عليه.

1.31 تعريف يسمى الامتداد E للحقل F **امتدادًا جبريًّا على F** (**algebraic extension**)، إذا كان كل عنصر في E جبريًّا على F. ■

2.31 تعريف إذا كان الامتداد E للحقل F ذا بعد منتهٍ n بوصفه فضاء متجهات على F، فإنّ E امتداد منتهٍ من الدرجة n على F (**finite extension of degree n**). سوف ندع $[E : F]$ لتكون الدرجة n لـ E على F. ■

عندما نقول: إنّ الحقل E امتداد منتهٍ على الحقل F، فإنّ هذا لا يعني أنّ E حقل منتهٍ، إنه يؤكد فقط أنّ E فضاء متجهات منتهي البعد علىٰ F، بمعنى أنّ $[E : F]$ منتهٍ.

سنستعمل غالبًا حقيقة أنه إذا كان E امتدادًا منتهيًا لـ F، فإنّ $[E : F] = 1$ إذا وفقط إذا كان $E = F$، ونحتاج فقط إلى أن نلاحظ أنه وبحسب المبرهنة 19.30، يمكن دائمًا توسيع $\{1\}$ لتصبح أساسًا لـ E على F. وهكذا، $[E : F] = 1$ إذا وفقط إذا كان $E = F(1) = F$.

دعونا نعيد النقاش في المبرهنة 23.30، لنثبت أنّ أيّ امتداد منتهٍ E للحقل F يجب أن يكون امتدادًا جبريًّا على F.

3.31 مبرهنة يكون الامتداد المنتهي E للحقل F امتدادًا جبريًّا على F.

البرهان يجب أن نثبت أنه إذا كانت $\alpha \in E$، فإنّ α جبرية على F، وبحسب المبرهنة 1930، إذا كان $[E : F] = n$، فإنّ العناصر

$$1, \alpha, \ldots, \alpha^n$$

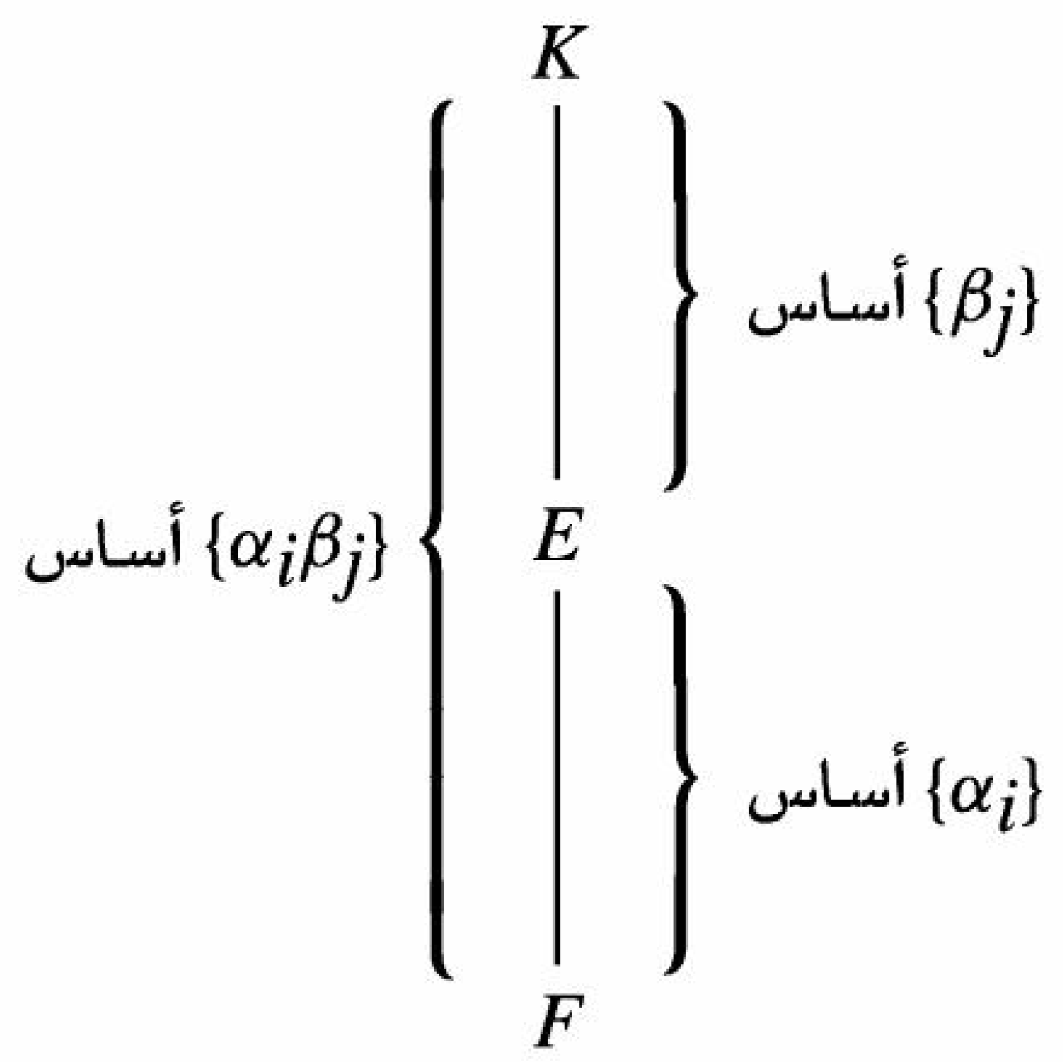
لا يمكن أن تكون عناصر مستقلة خطيًّا. إذن، يوجد $a_i \in F$ بحيث:

$$a_n \alpha^n + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

وليس كل $a_i = 0$. وهكذا فإنّ $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود غير صفرية في $F[x]$ و $f(\alpha) = 0$. إذن، α جبرية على F. ♦

لا نغالي عندما نؤكد أهمية المبرهنة الآتية، فهي تؤدي دورًا في نظرية الحقول مشابهًا للدور الذي أدته نظرية لاجرانج في نظرية الزمر، بينما يتمّ برهانها بسهولة باستخدام عملنا الموجز في فضاء المتجهات، فإنها أداة ذات قوة لا تصدق، وبوصفه تطبيقًا رائعًا لها في الفصل المقبل يبرهن استحالة أداء بعض الإنشاءات الهندسية باستخدام المسطرة والفرجار؛ لذا لا تقلل من قيمة المبرهنة التي تعد شيئًا.

4.31 مبرهنة إذا كان الحقل E امتدادًا منتهيًا للحقل F، وكان الحقل K امتدادًا منتهيًا للحقل E، فإنّ K امتداد منتهٍ لـ F، و$[K:F]=[K:E][E:F]$



الشكل 5.31

البرهان لتكن $\{\alpha_i \mid i=1,\cdots,n\}$ أساسًا لـ E بوصفها فضاء متجهات على F، ولتكن المجموعة $\{\beta_j \mid j=1,\cdots,m\}$ أساسًا لـ K بوصفها فضاء متجهات على E، حيث تُثبت المبرهنة إذا أثبتنا أنّ ألـ mn عنصر $\alpha_i\beta_j$ تشكل أساسًا لـ K بوصفها فضاء متجهات على F. (انظر الشكل5.31).

ليكن γ أي عنصر في K، ولأنّ β_j تشكل أساسًا لـ K على E، فإنّ:

$$\gamma=\sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j$$

حيث $b_j \in E$، لأنّ α_i تشكل أساسًا لـ E على F، فإنّ:

$$b_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i$$

حيث $a_{ij} \in F$، إذن:

$$\gamma=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\right)\beta_j=\sum_{i,j} a_{ij}(\alpha_i\beta_j)$$

وهكذا، فإنّ ألـ mn متجه $\alpha_i\beta_j$ تولد K على F.

تبقى علينا أن نثبت أنّ ألـ mn عنصر $\alpha_i\beta_j$ مستقلة على F. افترض أنّ $\Sigma_{i,j}c_{ij}(\alpha_i\beta_j)=0$، حيث $c_{ij} \in F$. إذن:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i\right)\beta_j=0$$

و $\left(\sum_{i=1}^{n} q_j\alpha_i\right) \in E$ لأنّ العناصر β_j مستقلة على E، فإننا نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i = 0$$

لكل j. ولكن α_i الآن مستقلة على F، وهكذا، فإنّ $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i = 0$ تقتضي أنّ $c_{ij} = 0$.
وهكذا، فإنّ $\alpha_i\beta_j$ لا تولد فقط K على F، ولكنها كذلك مستقلة على F. إذن، هي تشكل أساسًا لـ K على F. ♦

لاحظ أننا أثبتنا هذه المبرهنة في الحقيقة بإيجاد أساس، ومن الجدير بالتذكر أنه إذا كانت $\{\alpha_i \mid i = 1, \cdots, n\}$ أساسًا لـ E على F، وكانت $\{\beta_j \mid j = 1, \cdots, m\}$ أساسًا لـ K على E، للحقول $F \le E \le K$، فإنّ المجموعة $\{\alpha_i\beta_j\}$ من حواصل الضرب الـ mn تشكل أساسًا لـ K على F، يعطي الشكل (5.31) توضيحًا لهذه الحالة، وسوف نوضحه أكثر.

6.31 نتيجة إذا كانت F_i حقولًا، حيث $i = 1, \ldots, r$، وكان F_{i+1} امتدادًا منتهيًا لـ F_i، فإنّ F_r امتداد منتهٍ لـ F_1،

و $$[F_r : F_1] = [F_r : F_{r-1}][F_{r-1} : F_{r-2}] \ldots [F_2 : F_1]$$

7.31 نتيجة إذا كان الحقل E امتدادًا للحقل F، وكانت $\alpha \in E$ جبرية على F و $\beta \in F(\alpha)$، فإنّ $\deg(\beta, F)$ تقسم $\deg(\alpha, F)$.

البرهان بحسب المبرهنة 23.30، $\deg(\alpha, F) = [F(\alpha) : F]$ و $\deg(\beta, F) = [F(\beta) : F]$، ولكن $F \le F(\beta) \le F(\alpha)$. إذن وبحسب المبرهنة 4.31، فإنّ $[F(\beta) : F]$ تقسم $[F(\alpha) : F]$. ♦

يوضح المثال الآتي الطريقة التي تتبع عادة باستخدام المبرهنة 4.31. أو إحدى نتائجها.

8.31 مثال بحسب النتيجة 7.31، لا يحوي $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ صفرًا لـ $x^3 - 2$. لاحظ أنّ $\deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 2$، بينما صفر $x^3 - 2$ من الدرجة 3 على $\mathbb{Q}$، ولكن 3 لا تقسم 2. ▲

ليكن الحقل E امتدادًا للحقل F، ولتكن α_1 و α_2 عنصرين في E – ليسا بالضرورة جبريين على F –، وبحسب التعريف، $F(\alpha_1)$ هو أصغر امتداد للحقل F في E ويحوي α_1، وكذلك يمكن أن تُعدّ $(F(\alpha_1))(\alpha_2)$ أصغر امتداد للحقل F في E يحوي كلًّا من α_1 و α_2. كذلك بالإمكان وبصورة مكافئة البداية بـ α_2، إذن: $(F(\alpha_1))(\alpha_2) = (F(\alpha_2))(\alpha_1)$، سنرمز لهذا الحقل بـ $F(\alpha_1, \alpha_2)$، كذلك إذا كان $\alpha_i \in E$، فإنّ $F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ هو أصغر امتداد للحقل F في E ويحوي α_i كلها، حيث $i = 1, \ldots, n$، ونحصل على الحقل $F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ من الحقل F **بإضافة العناصر** α_i من E إلى F، يثبت التمرين 49 في الفصل 18 – بصورة مماثلة لتقاطع زمر جزئية محتواة في زمرة – أنّ تقاطع حقول جزئية من الحقل E هو كذلك حقل جزئي من E. وهكذا، فإنه يمكن أن تُعدّ $F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ بوصفها تقاطع الحقول الجزئية كلها من E، التي تحوي F والعناصر α_i جميعها، حيث $i = 1, \ldots, n$.

مثال 9.31 اعتبر $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$، حيث تثبت المبرهنة 23.30 أنّ $\{1, \sqrt{2}\}$ تشكل أساسًا لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ على $\mathbb{Q}$، وباستخدام الخطوات التي عرضت في المثال 10.29، يمكننا اكتشاف أنّ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ صفر لـ $x^4 - 10x^2 + 1$، وباستخدام الطريقة التي عرضت في المثال 14.23، يمكننا إثبات أنّ كثيرة الحدود هذه غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$، إذن:

$\mathrm{irr}(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = x^4 - 10x^2 + 1$، وهكذا، فإنّ $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$. إذًا $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$، ما يعني أنّ $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$؛ لذلك $\{1, \sqrt{3}\}$ تشكل أساسًا لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. إثبات المبرهنة 4.31 – انظر الملاحظة الآتية للمبرهنة – يرينا أنّ $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ يشكل أساسًا لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$. ▲

مثال 10.31 ليكن $2^{\frac{1}{3}}$ الجذر التكعيبي الحقيقي لـ 2 و $2^{\frac{1}{2}}$ الجذر التربيعي الموجب لـ 2، إذن: $2^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}})$؛ لأن $\deg(2^{\frac{1}{2}}, \mathbb{Q}) = 2$ و2 ليست من قواسم $\deg(2^{\frac{1}{3}}, \mathbb{Q}) = 3$، وهكذا $\left\{\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) : \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\right\} = 2$، ما يعني أنّ $\left\{1, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\right\}$ تشكل أساسًا لـ $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}})$ على $\mathbb{Q}$ و $\left\{1, 2^{\frac{1}{2}}\right\}$ تشكل أساسًا لـ $\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}\right)$ على $\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)$، إضافة إلى ذلك، وبحسب المبرهنة 4.31

– انظر الملاحظة الآتية للمبرهنة –

$$\left\{1,\ 2^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{5}{6}},\ 2^{\frac{2}{3}},\ 2^{\frac{7}{6}}\right\}$$

تشكل أساسًا لـ $\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}\right)$ على $\mathbb{Q}$، ولأنّ $2\left(2^{\frac{1}{6}}\right) = 2^{\frac{7}{6}}$، نحصل على أنّ $2^{\frac{1}{6}} \in \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$.

الآن، $2^{\frac{1}{6}}$ يمثل صفرًا لـ $x^6 - 2$، وهي غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ – بحسب معيار أيزنستاين – حيث

$p = 2$. إذن:

$$\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{6}}\right) \le \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$$

وبحسب المبرهنة 4.31

$$6 = \left[\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) : \mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) : \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{6}}\right)\right] \left[\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{6}}\right) : \mathbb{Q}\right]$$

$$= \left[\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) : \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{6}}\right)\right](6)$$

لذلك يجب أن نحصل على:

$$\left\{\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) : \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{6}}\right)\right\} = 1$$

وهكذا، فإنّ $\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) = \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{6}}\right)$، بحسب التعليق السابق للمبرهنة 3.31. ▲

يثبت المثال 10.31 أنه من الممكن للامتداد $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ على الحقل F أن يكون في الحقيقة امتدادًا بسيطًا، حتى لو كانت $n > 1$.

لنصف امتدادات F من الصورة $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ في حالة أنّ ألـ α_i كلها جبرية على F.

11.31 مبرهنة ليكن الحقل E امتدادًا جبريًّا للحقل F. فإنه يوجد عدد منتهٍ من العناصر $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ في E بحيث $E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$، إذا وفقط إذا كان E فضاء متجهات ذا بعد منتهٍ على F، بمعنى أنه إذا وفقط إذا كان E امتدادًا منتهيًا لـ F.

البرهان افترض أنّ $E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$، ولأنّ E امتداد جبري لـ F، وكل α_i جبرية على F؛ لذلك كل α_i جبرية على كل حقل امتداد لـ F في E ، وهكذا، فإنّ $F(\alpha_1)$ جبري على F، وبوجه عام $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ جبري على $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ لكل $j = 2, \ldots, n$. لتطبيق النتيجة 6.31 على متتالية الامتدادات المنتهية

$$F,\ F(\alpha_1),\ F(\alpha_1, \alpha_2), \cdots, F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = E$$

هذا يثبت أنّ E امتداد منتهٍ لـ F.

في المقابل، افترض أنّ E امتداد جبري منتهٍ على F، فإذا كان $[E : F] = 1$، فإنّ $E = F(1) = F$، وبذلك نكون قد انتهينا، وإذا كان $E \neq F$، لتكن $\alpha_1 \in E$، بحيث $\alpha_1 \notin F$.

ثم $[F(\alpha_1) : F] > 1$. إذا كان $F(\alpha_1) = E$ ، نكون قد انتهينا، أمّا إذا لم يكن كذلك فلتكن $\alpha_2 \in E$، بحيث $\alpha_2 \notin F(\alpha_1)$، وبالاستمرار بهذا العمل، نرى من المبرهنة 4.31 ولأنّ $[E : F]$ منتهٍ، فيجب أن نصل إلى α_n بحيث:

$$F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = E$$ ♦

الحقول المغلقة جبريًّا والإغلاق الجبري

لم نلاحظ بعد أنه إذا كان الحقل E امتدادًا للحقل F ، وكانت $\alpha, \beta \in E$ جبرية على F،

فكذلك الحال مع $\alpha + \beta,\ \alpha\beta,\ \alpha - \beta$ و $\frac{\alpha}{\beta}$ إذا كانت $\beta \neq 0$، ينتج هذا عن المبرهنة 3.31، وكذلك فإنه متضمن في المبرهنة الآتية:

12.31 مبرهنة ليكن الحقل E امتدادًا لـ F. فإنّ:

$$\overline{F}_E = \{\alpha \in E \mid F \text{ جبرية على } \alpha\}$$

تشكل حقلاً جزئيًّا من E، ويسمى **الإغلاق الجبري لـ F في E (algebraic closure)**.

البرهان لتكن $\alpha, \beta \in \bar{F}_E$، تثبت المبرهنة 11.31 أنّ $F(\alpha, \beta)$ امتداد منتهٍ على F، وبحسب المبرهنة 3.31، كل عنصر في $F(\alpha, \beta)$ جبري على F، بمعنى أن $F(\alpha, \beta) \subseteq \bar{F}_E$، وهكذا يحوي $\bar{F}_E$ كلاً من $\alpha + \beta, \alpha\beta, \alpha - \beta$، وكذلك يحوي $\dfrac{\alpha}{\beta}$ إذا كانت $\beta \neq 0$، إذن: $\bar{F}_E$ حقل جزئي من E. ♦

13.31 نتيجة مجموعة الأعداد الجبرية تشكل حقلًا.

البرهان برهان هذه النتيجة مباشر من المبرهنة 12.31؛ لأن مجموعة الأعداد الجبرية هي الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{C}$. ♦

إنه من المعلوم أنّ الأعداد المركبة تتمتع بخاصية أنّ كلّ كثيرة حدود غير ثابتة في $\mathbb{C}[x]$ لها صفر في $\mathbb{C}$، وهذا معروف بأنه النظرية الأساسية في الجبر، فهناك إثبات تحليلي لهذه النظرية معطًى في المبرهنة 18.31، ونقدّم الآن تعريفًا يعمّم هذا المفهوم المهم للحقول الأخرى.

14.31 تعريف يسمّى الحقل F **مغلقًا جبريًا (algebraically closed)** إذا كانت كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$ لها صفر في F. ■

لاحظ أنّ الحقل F قد يكون إغلاقًا جبريًا للحقل F في امتداد E ومن غير أن يكون F مغلقًا جبريًا، على سبيل المثال: $\mathbb{Q}$ هو الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{Q}(x)$، ولكن $\mathbb{Q}$ ليس مغلقًا جبريًا؛ لأن $x^2 + 1$ لا جذور لها في $\mathbb{Q}$.

تثبت المبرهنة الآتية حقيقة مفهوم أنّ الحقل مغلق جبريًا يمكن أن يعرّف باستخدام تحليل كثيرات الحدود على الحقل.

15.31 مبرهنة يكون الحقل F مغلقًا جبريًا إذا وفقط إذا كانت كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$، يمكن تحليلها في $F[x]$ إلى عوامل خطية.

البرهان ليكن F مغلقًا جبريًا، ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$. إذن $f(x)$ لها صفر $a \in F$، فبحسب النتيجة 3.23، $x - a$ عامل من عوامل $f(x)$، وهكذا، فإنّ $f(x) = (x - a)\, g(x)$، وإذا كانت $g(x)$ غير ثابتة، فإنّ لها صفرًا $b \in F$، وهكذا نحصل على: $f(x) = (x - a)(x - b)h(x)$، وبالاستمرار نحصل على تحليل $f(x)$ في $F[x]$ إلى عوامل خطية.

في المقابل، افترض أنّ كل كثيرة حدود غير ثابتة في $F[x]$ تحلل إلى عوامل خطية، فإذا كان $ax - b$ عاملًا خطيًا لـ $f(x)$، فإنّ $\dfrac{a}{b}$ صفر لـ $f(x)$، إذن: F مغلق جبريًا. ♦

16.31 نتيجة الحقل المغلق جبريًا F لا يوجد له امتداد جبري فعلي، بمعنى أنه لا يوجد امتداد جبري E، بحيث $F < E$.

البرهان ليكن E امتدادًا جبريًا لـ F، إذن: $F \leq E$، فإذا كانت $\alpha \in E$، فإنّ $\operatorname{irr}(\alpha, F) = x - \alpha$ بحسب المبرهنة 15.31؛ لأن F مغلق جبريًا، إذن: $\alpha \in F$، ويجب أن تكون $F = E$. ♦

سنبرهن على أنه كما يوجد امتداد جبري مغلق $\mathbb{C}$ للأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، فلكل حقل F يوجد كذلك امتداد جبري $\bar{F}$ لـ F مع خاصية أنّ $\bar{F}$ مغلق جبريًا، ببساطة، لإيجاد $\bar{F}$، سنقوم بالآتي: إذا كانت كثيرة الحدود $f(x)$ في $F[x]$ لا أصفار لها في F، فأضف صفر α لـ $f(x)$ إلى F، وهكذا الحصول على الحقل $F(\alpha)$. حيث تستعمل المبرهنة 3.29 – مبرهنة كرونكر – بقوة هنا بالطبع، فإذا كان $F(\alpha)$ لا يزال [illegible] في هذا العمل أكثر.

المشكلة هنا – وخلافًا لحالة الإغلاق الجبري $\mathbb{C}$ لـ $\mathbb{R}$، قد نحتاج إلى عمل هذا – ربما – عدد لا نهائي من المرات، من الممكن إثبات (انظر التمرين 33 و 36) أنّ $\overline{\mathbb{Q}}$ متماثل مع حقل الأعداد الجبرية، ولا يمكننا الحصول على $\overline{\mathbb{Q}}$ من $\mathbb{Q}$ بإضافة عدد منتهٍ من الأعداد الجبرية، ويجب علينا في البداية أن نناقش بعض آليات نظرية المجموعات – تمهيدية زورن – لنصبح قادرين على التعامل مع هذه الحالة، هذه الآلية معقدة بعض الشيء، لذلك سنضع البرهان تحت عنوان مستقل، إضافة إلى أنّ نظرية توافر $\overline{F}$ مهمة جدًّا، وسنذكرها هنا؛ لكي نعرف هذه الحقيقة، حتى لو لم ندرس برهانها.

17.31 مبرهنة يوجد إغلاق جبري لكل حقل F، أي امتداد جبري $\overline{F}$ الذي يكون مغلقًا جبريًّا.

إنه من المعلوم أن $\mathbb{C}$ مغلق جبريًّا، وسنذكر برهانًا تحليليًّا للطلاب الذين درسوا مادة الدوال ذات المتغيرات المركبة، حيث توجد براهين جبرية، إلّا أنها أطول.

18.31 مبرهنة **(النظرية الأساسية في الجبر)** حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ مغلق جبريًّا.

البرهان لتكن كثيرة الحدود $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ بلا أصفار في $\mathbb{C}$، ما يؤدي إلى أن تكون $\dfrac{1}{f(z)}$ دالة صحيحة، بمعنى أنّ $\dfrac{1}{f}$ تحليلية في كل مكان، وكذلك إذا كان $f \notin \mathbb{C}$، فإنّ $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$، إذن: $\lim_{|z|\to\infty}\left|\dfrac{1}{f(z)}\right| = 0$، وهكذا، فإنّ $\dfrac{1}{f}$ يجب أن تكون محدودة في المستوى، إذن، وبحسب مبرهنة ليوفيل في نظرية الدوال المركبة، فإنّ $\dfrac{1}{f}$ ثابتة، ما يؤدي إلى أن تكون f ثابتة، وهكذا، فإنّ أي كثيرة حدود غير ثابتة في $\mathbb{C}[z]$ يجب أن يكون لها صفر في $\mathbb{C}$، إذن، $\mathbb{C}$ مغلقة جبريًّا. ♦

إثبات وجود الإغلاق الجبري

سنثبت أنه يوجد امتداد جبري لكل حقل، بحيث يكون مغلقًا جبريًّا، يتعيّن أن تكون لطالب الرياضيات الفرصة برؤية بعض البراهين التي تتضمن مسلمة الاختيار قبل إنهاء دراسته الجامعية، وهذا مكان طبيعي لمثل هذا البرهان، سنستخدم التكافؤ بين تمهيدية زورن ومسلمة الاختيار، ولعرض تمهيدية زورن، يجب علينا إعطاء تعريف من نظرية المجموعات.

19.31 تعريف الترتيب الجزئي للمجموعة S ***(partial order)*** يعطى بالعلاقة $\leq$ المعرفة على بعض الأزواج المرتبة لعناصر من S، بحيث تتحقق الشروط الآتية:

1. $a \leq a$ لكل $a \in S$ **علاقة انعكاسية** (***Reflexive***).

2. إذا كان $a \leq b$ و $b \leq a$، فإنّ $a = b$ **علاقة قطرية التناظر** (***Antisymmetric***).

3. إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$، فإنّ $a \leq c$ **علاقة متعدية** (***Transitive***). ■

علاقة الترتيب الجزئي، ليس بالضرورة أن يكون كل عنصرين **قابلين للمقارنة** ***(Comparable)***، بمعنى أنّه إذا كان $a, b \in S$، فليس بالضرورة أن يكون $a \leq b$ أو $b \leq a$، وكالعادة، $a < b$ تعني $a \leq b$ ولكن $a \neq b$.

تسمى المجموعة الجزئية T من مجموعة مرتبة جزئيًّا S **سلسلة (*Chain*)** إذا كان بالإمكان المقارنة بين أي عنصرين a و b في T، بمعنى أنّ $a \leq b$ أو $b \leq a$ (أو كليهما)، ويكون العنصر $u \in S$ **حدًّا أعلى للمجموعة الجزئية** A **(*upper bound*)** من مجموعة مرتبة جزئيًّا S إذا كان $a \leq u$ لكل $a \leq A$. أخيرًا، يكون العنصر m من مجموعة مرتبة جزئيًّا S **أعظميًّا (*maximal*)** إذا لم يوجد $s \in S$، بحيث $m < s$.

20.31 مثال مجموعة المجموعات الجزئية جميعها من مجموعة ما تشكل مجموعة مرتبة جزئيًّا مع العلاقة $\leq$ المعطاة بـ $\subseteq$، على سبيل المثال: إذا كانت المجموعة كاملة $\mathbb{R}$، فإنّ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$، لاحظ – على أيّ حال – أنه لـ $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}^+$، فليس صحيحًا أنّ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}^+$ أو $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Z}$. ▲

21.31 تمهيدية **تمهيدية زورن (*Zorn's Lemma*)**: إذا كانت S مجموعة مرتبة جزئيًّا، بحيث إنّ كل سلسلة في S لها حد أعلى في S، فإنّ S تحوي على الأقل عنصرًا أعظميًّا.

لا يوجد سؤال عن برهان تمهيدية زورن، فالتمهيدية مكافئة لمسلمة الاختيار، وهكذا، فإننا في الحقيقة نأخذ تمهيدية زورن هنا بوصفها مسلمة في نظرية المجموعات. ارجع إلى المصادر لمعرفة نصّ مسلمة الاختيار وبرهان أنها مكافئة لتمهيدية زورن. (ارجع إلى Edgerton[47]).

تكون تمهيدية زورن في العادة مفيدة عندما نريد إثبات توافر عنصر كبير أو أعظمي في بناء من نوع ما، وإذا كان الحقل F له امتداد جبري $\overline{F}$، فبالتأكيد سيكون امتدادًا جبريًّا أعظميًّا لـ F؛ لأن $\overline{F}$ مغلق جبريًّا، فلن يكون له امتداد جبري حقيقي.

إنّ فكرة إثباتنا للمبرهنة 17.31 بسيطة جدًا، فإذا أُعطينا الحقل F، فسوف نصف في البداية مجموعة من الامتدادات الجبرية لـ F، بحيث تكون كبيرة جدًّا لدرجة أنها تحوي (تبعًا للتماثل) أي امتداد جبري معقول لـ F، ثم نعرف ترتيبًا جزئيًّا – الترتيب العادي للحقول الجزئية – في هذه المجموعة، ثم نثبت أنّ فرضيات تمهيدية زورن متحققة، حيث إنه بحسب تمهيدية زورن، سيكون هناك امتداد جبري أعظمي $\overline{F}$ لـ F في هذه المجموعة، ومن ثم سنناقش بأنه بوصفه عنصرًا أعظميًّا، فإن هذا الامتداد $\overline{F}$ لن يكون له امتداد جبري فعلي، وهكذا، فإنه يجب أن يكون مغلقًا جبريًّا.

يختلف برهاننا قليلاً عن البراهين المتوافرة في الكثير من الكتب، ونفضله لأنه لا يستخدم من الجبر أكثر من ذلك المستنتج من المبرهنتين 3.29 و 4.31. وهكذا، فهي تعتمد بقدر كبير ومريح على قوة كل من مبرهنة كرونكر وتمهيدية زورن، يبدو البرهان طويلاً، وذلك فقط لأننا نكتب كل خطوة، أمّا للرياضيين المحترفين، فبناء البرهان من المعلومات في الفقرة السابقة يُعدّ مسألة روتينية، وقد اقتُرح هذا البرهان على المؤلف أيام دراسته العليا من زميل دراسته نورمان شابيرو (Norman Shapiro) الذي كان يفضله كثيرًا كذلك.

■ **نبذة تاريخية**

على الرغم من أنّ مسلمة الاختيار استُخدمت بصورة ضمنية في عامي 1870م و 1880م، إلّا أنها أُعلنت صراحة على يد إرنست زيرملو (Ernst Zermelo) عام 1904م، مرتبطة ببرهانه لنظرية الترتيب الحسن التي نصت على أنّ لأي مجموعة A، توجد علاقة ترتيب $<$ ، حيث كلّ مجموعة جزئية غير خالية B من A تحتوي عنصرًا أصغر بحسب العلاقة $<$، وتؤكد مسلمة الاختيار لزيرملو أنّ لأي مجموعة M والمجموعة S المكوّنة من جميع المجموعات الجزئية من M، توجد دائمًا دالة "اختيار" $f : S \to M$؛ حيث $f(M') \in M'$ لكل M' في S.

في الحقيقة، لاحظ زيرملو أنّ هذا المبدأ المنطقي لا يمكن ... أن يختزل إلى صورة أبسط، ولكنه يستخدم بلا تردد في الاستنتاج الرياضي في كل مكان.

وبعد بضع سنوات لاحقة قام بتضمين مسلمته مع مجموعة مسلماته الخاصة بنظرية المجموعات، وقد عُدّلت هذه المجموعة قليلاً عام 1930م، لتشكل ما يُعرف الآن بنظرية المجموعات الخاصة بزيرملو – فرانكل (Zermelo – Frankel)، عمومًا نظام المسلمات يُعمل به اليوم بوصفه أساسًا لتلك النظرية.

قدّم ماكس زورن (Max Zorn 1906 – 1993) تمهيدية زورن عام 1935م، على الرغم من إدراكه أنها تكافئ نظرية الترتيب الحسن (التي تكافئ بدورها مسلمة الاختيار)، وادعى أنّ استخدام تمهيديته في الجبر طبيعي أكثر؛ لأن نظرية الترتيب الحسن كانت بصورة أو بأخرى مبدأً "متساميًا"، وفي الحال وافق الرياضيون الآخرون على تعليله، حيث ظهرت التمهيدية عام 1939م في المجلد الأول لنيكولس بورباكي

(Nicols Bourbaki's Eléments de Mathématique: les structures fondamentales de I'Analyse)

لقد استُخدمت بصورة ثابتة في ذلك العمل، وأصبحت سريعًا جزءًا أساسيًّا من أدوات الرياضيين.

إننا مستعدون الآن لإثبات المبرهنة 17.31. التي سنعيد هنا صياغتها.

22.31 إعادة صياغة المبرهنة 17.31 لكل حقل F إغلاق جبري $\overline{F}$.

البرهان يمكن الإثبات في نظرية المجموعات أنه لأي مجموعة معطاة، توجد مجموعة تحوي عناصر أكثر تمامًا. افترض أننا شكّلنا المجموعة:

$$A = \{\omega_{f,i} \mid f \in F[x]; i = 0, \cdots, (\text{degree } f)\}$$

التي تحوي عنصرًا لكل صفر محتمل لكل $f(x) \in F[x]$، لتكن Ω مجموعة تحوي عدد عناصر أكثر تمامًا من عناصر A، وباستبدال $\Omega \cup F$ بدلاً من Ω عند الضرورة، يمكننا أن نفترض أنّ $F \subset \Omega$. لتكن الحقول جميعها الممكنة بوصفها امتدادات جبرية لـ F ، التي تكون – بوصفها مجموعات – مكوّنة من عناصر من Ω، فأحد هذه الامتدادات الجبرية هي F نفسها، فإذا كان الحقل E أيّ امتداد $F[\gamma]$، وإذا كانت $\gamma \in E$ هي صفر لـ $f(x) \in F[x]$ و $\gamma \notin F$ و $\deg(\gamma, F) = n$، فإنه وبإعادة تسمية γ بـ ω حيث $\omega \in \Omega$ و $\omega \notin F$، وإعادة تسمية العناصر $a_0 + a_1\gamma + \cdots + a_{n-1}\gamma^{n-1}$ من $F(\gamma)$ بعناصر مختلفة من Ω والعناصر a_i بعناصر من F، فيمكننا أن نعدّ $F(\gamma)$ بعد إعادة تسميته بوصفها امتدادًا جبريًّا $F(\omega)$ لـ F، بحيث $F(\omega) \subseteq \Omega$ و $f(\omega) = 0$. تحوي المجموعة Ω عناصر كافية لتكوين $F(\omega)$؛ لأن Ω فيها عناصر أكثر من كافية لتزويدنا بـ n من الأصفار المختلفة لكل عنصر من كل درجة n في أي مجموعة

جزئية من $F[x]$.

امتدادات الحقول الجبرية كلها E_j لـ F، حيث $E_j \subseteq \Omega$ تشكل المجموعة

$$S = \{E_j \mid j \in J\}$$

التي تكون مرتبة جزئيًا مع علاقة الاحتواء العادية للحقول الجزئية $\leq$. أحد عناصر S هو F نفسه، والفقرات السابقة تثبت أنه إذا كان F غير مغلق جبريًا، فسيكون هناك الكثير من الحقول E_j في S.

لتكن $T = \{E_{jk}\}$ أي سلسلة في S، ولتكن $W = \cup_k E_{jk}$، سنصنع من W حقلاً، فلتكن $\alpha, \beta \in W$، فيوجد $E_{j1}, E_{j2} \in S$، بحيث $\alpha \in E_{j1}$ و $\beta \in E_{j2}$، ولأنّ T سلسلة، فإنّ أحد الحقلين E_{j1} و E_{j2} حقل جزئي من الآخر، وليكن $E_{j1} \leq E_{j2}$، إذن: $\alpha, \beta \in E_{j2}$.

سنستخدم عمليات الحقل E_{j2} لنعرّف جمع α و β في W كـ $(\alpha + \beta) \in E_{j2}$ وبالمثل حاصل الضرب $(\alpha\beta) \in E_{j2}$، فهاتان العمليتان حسنتا التعريف في W، وهما مستقلتان عن تعريفنا لـ E_{j2}؛ لأنه إذا كانت $\alpha, \beta \in E_{j3}$ كذلك حيث E_{j3} عنصر في T، فإنّ أحد الحقلين E_{j2} و E_{j3} يكون حلقة جزئية من الآخر؛ لأن T سلسلة، إذن، صارت عمليتا الجمع والضرب معرفتين لدينا على W.

تتحقق الآن مسلمات الحقل كلها في W مع هاتين العمليتين، باستخدام حقيقة أنهما معرفتان باستخدام الجمع والضرب في الحقول، وهكذا، وعلى سبيل المثال: $1 \in F$ يؤدي دور العنصر المحايد للضرب في W؛ لأنه لكل $\alpha \in W$، إذا كان $1, \alpha \in E_{j1}$ فإنّ $1\alpha = \alpha$ في E_{j1}، وهكذا $1\alpha = \alpha$ في W، بحسب تعريف الضرب في W، ولمزيد من التوضيح، نتحقق من قوانين التوزيع، لتكن $\alpha, \beta, \gamma \in W$، ولأنّ T سلسلة، فيمكننا إيجاد حقل واحد في T يحوي العناصر الثلاثة α، β و γ، حيث تتحقق في هذا الحقل خاصية التوزيع على α، و β، و γ، وبهذا، فهي تتحقق في W، وهكذا يمكننا أن نعدّ W حقلاً، ومن خلال الإنشاء، $E_{jk} \leq W$ لكل $E_{jk} \in T$.

فإذا تمكنّا من إثبات أنّ W جبري على F، فإنّ $W \in S$ ستكون حدًّا أعلى لـ T، ولكن إذا كان $\alpha \in W$، فإنّ $\alpha \in E_{j1}$ لأحد العناصر E_{j1} في T، وهكذا، فإنّ α جبرية على F، إذن، W امتداد جبري لـ F وحدّ أعلى لـ T.

تتحقق فرضيات تمهيدية زورن، وهكذا، فإنه يوجد عنصر أعظمي $\bar{F}$ في S، فندّعي أنّ $\bar{F}$ مغلق جبريًا، ولتكن $f(x) \in \bar{F}[x]$، حيث $f(x) \notin \bar{F}$، وافترض أنّ $f(x)$ لا أصفار لها في $\bar{F}$، ولأنّ Ω تحوي عناصر أكثر من تلك التي تحويها $\bar{F}$، فيمكننا أن نأخذ $\omega \in \Omega$، بحيث $\omega \notin \bar{F}$، ونكوّن الحقل $\bar{F}(\omega) \subseteq \Omega$ و ω صفر لـ $f(x)$، كما رأينا في الفقرة الأولى من هذا البرهان، لتكن β في $\bar{F}(\omega)$، وبحسب المبرهنة 23.30. تكون β صفرًا لكثيرة حدود.

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

في $\bar{F}[x]$ وبحيث $\alpha_i \in \bar{F}$، وهكذا، فإنّ α_i جبرية على F، إذن وبحسب المبرهنة 11.31. يكون الحقل $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ امتدادًا منتهيًا على F، ولأنّ β جبرية على $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$، فبإمكاننا أن نرى أنّ $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta)$ امتداد منته على F، إذن وبحسب المبرهنة 3.31 β جبرية على F، وهكذا، فإنّ $\bar{F}(\omega) \in S$ و $\bar{F} < \bar{F}(\omega)$، ما يناقض اختيار $\bar{F}$ بوصفها عنصرًا أعظميًا في S، إذن، يجب أن يكون لـ $f(x)$ صفر في $\bar{F}$، إذن، $\bar{F}$ مغلق جبريًا. ♦

تبدو الخطوات في البرهان السابق عادية للرياضي المحترف، ولأنها المرة الأولى التي نرى فيها استخدام تمهيدية زورن في البرهان، فقد كتبنا البرهان بالتفصيل.

■ تمارين 31

حسابات

في التمارين 1 إلى 13،أوجد الدرجة والأساس للامتداد الحقلي المعطى، وكن مستعدًّا لتبرير إجابتك.

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ على $\mathbb{Q}$

2. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$

3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{18})$ على $\mathbb{Q}$

4. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$

5. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ على $\mathbb{Q}$

6. $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$

7. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$

8. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$ على $\mathbb{Q}$

9. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{24})$ على $\mathbb{Q}$

10. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

11. $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

12. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

13. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{10})$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

مفاهيم

في التمارين 14 إلى 17، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إن كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

14. الامتداد الجبري للحقل F، هو الحقل $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$، حيث α_i كلها أصفار لكثيرة حدود في $F[x]$.

15. الامتداد المنتهي للحقل F، هو ذلك الذي يمكن الحصول عليه بإضافة عدد منتهٍ من العناصر لـ F.

16. الإغلاق الجبري $\overline{F_E}$ للحقل F في الامتداد E للحقل F، هو المكون من عناصر E الجبرية جميعها على F.

17. الحقل F مغلق جبريًا، إذا وفقط إذا كانت كل كثيرة حدود لها صفر في F.

18. أثبت بمثال أنّ للامتداد الفعلي E للحقل F، الإغلاق الجبري لـ F في E ليس بالضرورة مغلقًا جبريًّا.

19. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. إذا كان الحقل E امتدادًا منتهيًا للحقل F، فإن E حقل منتهٍ.

______ ب. كل امتداد منتهٍ للحقل هو امتداد جبري.

______ جـ. كل امتداد جبري للحقل هو امتداد منتهٍ.

______ د. الحقل الأعلى لبرج منتهٍ لامتداد منتهٍ من الحقول، هو امتداد منتهٍ للحقل في أسفل البرج.

______ هـ. $\mathbb{Q}$ هي الإغلاق الجبري لنفسها في $\mathbb{R}$، أي إنّ $\mathbb{Q}$ مغلقة جبريًّا في $\mathbb{R}$.

______ و. $\mathbb{C}$ مغلقة جبريًّا في $\mathbb{C}(x)$، حيث x غير معين.

_____ ز. $\mathbb{C}(x)$ مغلقة جبريًا، حيث x غير معين.

_____ ح. الحقل $\mathbb{C}(x)$ ليس له إغلاق جبري؛ لأن $\mathbb{C}$ تحوي فعليًا الأعداد الجبرية كلها.

_____ ط. الحقل المغلق جبريًا يجب أن يكون مميزه 0.

_____ ي. إذا كان E امتدادًا مغلقًا جبريًا للحقل F، فإن E امتداد جبري لـ F.

براهين مختصرة

20. أعطِ برهانًا مختصرًا من جملة واحدة للمبرهنة 3.31.

21. أعطِ برهانًا مختصرًا من جملة واحدة للمبرهنة 4.31.

براهين

22. ليكن $(a+bi) \in \mathbb{C}$، حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $b \neq 0$. أثبت أنّ $\mathbb{C} = \mathbb{R}(a+bi)$.

23. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا منتهيًا للحقل F وكان $[E : F]$ عددًا أوليًا، فإنّ E امتداد بسيط لـ F وفي الحقيقة $E = F(\alpha)$ لكل $\alpha \in E$، ولا تنتمي إلى F.

24. برهن على أنّ $x^2 - 3$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

25. ما درجة امتدادات الحقول التي يمكن الحصول عليها بإضافة جذر تربيعي لعنصر من F ليس مربعًا كاملاً في F، ثمّ جذر تربيعي لعنصر ليس مربعًا كاملاً في هذا الحقل الجديد، وهكذا؟ مستخدمًا ذلك ناقش العبارة: إنّ أي صفر لكثيرة الحدود $x^{14} - 3x^2 + 12$ على $\mathbb{Q}$ لا يمكن التعبير عنه بوصفه دالة نسبية لجذور تربيعية لدالة نسبية لجذور تربيعية – وهكذا – لعناصر في $\mathbb{Q}$.

26. ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F، وليكن D حلقة تامة، حيث $F \subseteq D \subseteq E$. أثبت أنّ D حقل.

27. برهن بالتفصيل على أنّ $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$.

28. عمِّم تمرين 27، وأثبت أنه إذا كان $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$، فإنّ $\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ لكل a و b في $\mathbb{Q}$ [مساعدة: احسب $(a-b)/(\sqrt{a} + \sqrt{b})$].

29. ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F، ولتكن $p(x) \in F[x]$ غير مختزلة على F ودرجتها لا تقسم $[E : F]$. أثبت أنه لا توجد أصفار لـ $p(x)$ في E.

30. ليكن E امتدادًا للحقل F، ولتكن $\alpha \in E$ جبرية ذات درجة فردية على F. أثبت أنّ α^2 جبرية لها درجة فردية على F و $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.

31. أثبت أنه إذا كانت F, E و K حقولاً، حيث $F \leq E \leq K$، فإنّ K جبري على F، إذا وفقط إذا كان E جبريًا على F و K جبريًا على E. (يجب ألّا تفترض أنّ الامتدادات منتهية).

32. ليكن E امتدادًا للحقل F. برهن على أنَّ كل $\alpha \in E$ وليست في الإغلاق الجبري $\overline{F_E}$ لـ F في E متسامٍ على $\overline{F_E}$.

33. ليكن E امتدادًا مغلقًا جبريًّا للحقل F. أثبت أنّ الإغلاق الجبري $\overline{F_E}$ لـ F في E مغلق جبريًّا. (بتطبيق هذا المثال على $\mathbb{C}$ و$\mathbb{Q}$ نرى أنّ الحقل المكون من الأعداد الجبرية جميعها مغلق جبريًّا).

34. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F ويحتوي الأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل $f(x) \in F[x]$، فإن E حقل مغلق جبريًّا.

35. أثبت أنه لا يوجد حقل منتهٍ ذو مميز فردي مغلق جبريًّا. (في الواقع، لا يوجد حقل منتهٍ مميزه 2 مغلق جبريًّا). [مساعدة: بالعدّ أثبت أنه لمثل هذا الحقل المنتهي F، بعض كثيرات الحدود $x^2 - a$ ، حيث $a \in F$، ليس لها صفر في F. انظر تمرين 32 الفصل 29].

36. برهن على أنّ – كما تمّ التأكيد في الكتاب – الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{C}$ ليس امتدادًا منتهيًا لـ $\mathbb{Q}$.

37. ناقش العبارة: كل امتداد منتهٍ للحقل $\mathbb{R}$، إما $\mathbb{R}$ نفسها أو يماثل $\mathbb{C}$.

38. استخدم تمهيدية زورن لتثبت أنّ كل مثالي فعلي في حلقة R تحوي عنصرًا محايدًا، يكوّن محتوًى في مثالي أعظمي.

[redacted] إنشاءات هندسية [1] Geometric Constructions

في هذا الفصل سنحيد قليلاً عن خطنا لنعطي تطبيقًا يوضّح قوة المبرهنة 4.31 لدراسة أكثر تفصيلاً للإنشاءات الهندسية، ارجع إلى كتاب كورنت وروبنس (Courant and Robbins) [44، الوحدة الثالثة].

ينصب اهتمامنا على أنواع الأشكال التي يمكن بناؤها باستخدام الفرجار والمسطرة، كما في الهندسة الإقليدية التقليدية، وسنناقش استحالة تثليث زوايا معينة وغيرها من الأسئلة التقليدية الأخرى.

الأعداد القابلة للإنشاء

لنتخيل أننا أُعطينا قطعة مستقيمة واحدة فقط، التي سنعرفها بأنها وحدة طول واحدة.

يُسمى العدد الحقيقي α عددًا **قابلاً للإنشاء (*Constructible*)**، وذلك إذا تمكنّا من إنشاء قطعة مستقيمة طولها $|\alpha|$ بعدد منتهٍ من الخطوات من القطعة المعطاة، التي طولها وحدة طول، وذلك باستخدام المسطرة والفرجار.

إنّ قوانين اللعبة صارمة جدًّا، فنفترض أننا أُعطينا نقطتين فقط في هذه اللحظة، ولتكونا طرفي القطعة المستقيمة ذات وحدة الطول، ولنفترض أنهما تقابلان النقطتين $(0, 0)$ و $(1, 0)$ في المستوى الإقليدي، حيث يُسمح لنا الآن أن نرسم خطًّا باستعمال المسطرة فقط، وذلك بين النقطتين اللتين تمّ تعيينهما، وهكذا يمكننا البدء باستعمال المسطرة ورسم الخط المار بـ $(0, 0)$ و $(1, 0)$، ويُسمح لنا بأن نفتح الفرجار مسافة تساوي ما بين النقطتين فقط، دعونا الآن نركز رأس الفرجار في النقطة $(1, 0)$، ونرسم دائرة بنصف قطر 1، التي تمر بالنقطة $(2, 0)$، وهكذا نكون قد عيّنا نقطة ثالثة $(2, 0)$، وبالاستمرار بهذه الطريقة نستطيع تعيين النقاط $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(-1, 0)$ $(-2, 0)$ وهكذا...، الآن نفتح الفرجار مسافة تساوي البعد بين $(0, 0)$ و$(2, 0)$، ثمّ نضع رأس الفرجار في النقطة $(1, 0)$، ونرسم دائرة بنصف قطر 2، ونكرر العمل مع النقطة $(-1, 0)$، وبذلك نكون قد أوجدنا نقطتين جديدتين، وذلك حيث تتقاطع الدائرتان وحيث نستطيع أن نضع المسطرة عليهما، ونرسم ما يُسمى بمحور الصادات، ثمَّ نفتح الفرجار مسافة تساوي ما بين $(0, 0)$ و$(1, 0)$، ونرسم دائرة مركزها $(0, 0)$، ونعيّن النقطة $(0, 1)$ حيث تتقاطع الدائرة مع محور الصادات، وبالاستمرار في العمل على النمط نفسه، نستطيع تعيين النقاط (x, y) جميعها ذات الإحداثيات الصحيحة في أي مستطيل يحوي النقطة $(0, 0)$، ودون الخوض في مزيد من التفاصيل، نستطيع أن نثبت أنه بالإمكان إقامة عمود على خطٍّ معطًى من نقطة معلومة على الخط.

كذلك نستطيع إيجاد خط يمر من خلال نقطة معلومة وموازٍ لخطٍّ معطى، نتيجتنا الأولى هي المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.32 إذا كان α وβ عددين حقيقيين قابلين للإنشاء، فإنّ $\alpha + \beta$، $\alpha - \beta$، $\alpha\beta$ و α/β كلها أعداد حقيقية قابلة للإنشاء، إذا كان $\beta \neq 0$.

[1] لن يتم استخدام هذا الفصل في بقية هذا الكتاب.

البرهان أُعطينا α و β قابلين للإنشاء؛ لذلك توجد قطع مستقيمة بطول $|\alpha|$ و $|\beta|$، إذا كانت $\alpha, \beta > 0$، فمدّ قطعة مستقيمة بطول α بالمسطرة، ابدأ بأحد طرفي القطعة الأصلية بطول α، وخذ على الامتداد الطول β باستخدام الفرجار، هذا يُنشئ قطعة مستقيمة بطول $\alpha + \beta$؛ كذلك $\alpha - \beta$ يمكن إنشاؤها بالطريقة نفسها (انظر الشكل 2.32)، وإذا كان α و β ليس كلاهما موجبًا، فمن الواضح أنه يمكن تقسيم البرهان إلى حالات تبعًا لإشارتيهما، وإثبات أنّ $\alpha + \beta$ و $\alpha - \beta$ لا تزال قابلة للإنشاء.

إنشاء $\alpha\beta$ موضح في الشكل 3.32، لتكن القطعة المستقيمة $\overline{OA}$ من النقطة O إلى النقطة A، ولتكن $|\overline{OA}|$ طول هذه القطعة المستقيمة، فإذا كان $\overline{OA}$ بطول $|\alpha|$، فأنشئ الخط l من خلال O ولا يحوي $\overline{OA}$ (ربما إذا كان O عند $(0, 0)$، و A عند $(a, 0)$، تستخدم الخط المار من خلال $(0, 0)$ و $(4, 2)$)، ثم أوجد النقاط P و B على l، حيث $\overline{OP}$ بطول 1 و $\overline{OB}$ بطول $|\beta|$، ارسم $\overline{PA}$، وأنشئ l' من خلال B موازٍ لـ $\overline{PA}$ ويقطع $\overline{OA}$ في امتداده عند Q. باستخدام المثلثات المتشابهة نجد أنّ:

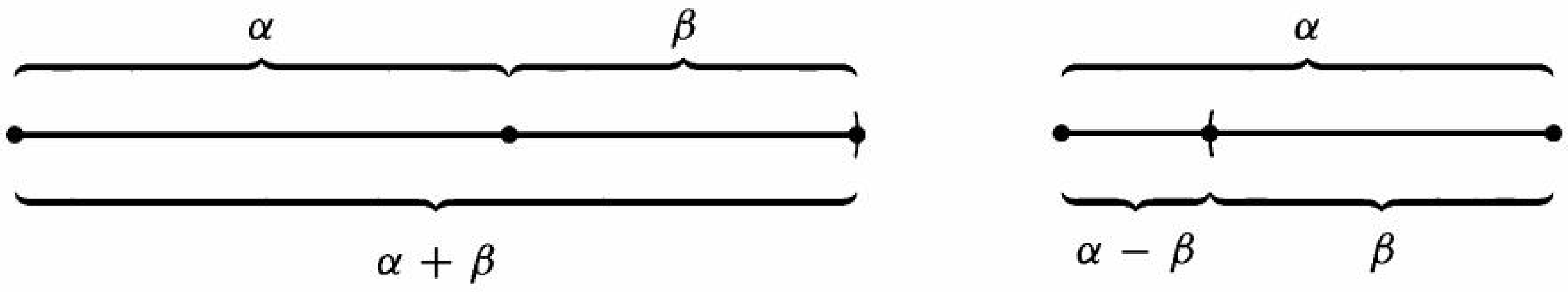
$$\frac{1}{|\alpha|} = \frac{|\beta|}{|\overline{OQ}|}$$

لذلك، $\overline{OQ}$ بطول $|\alpha\beta|$.

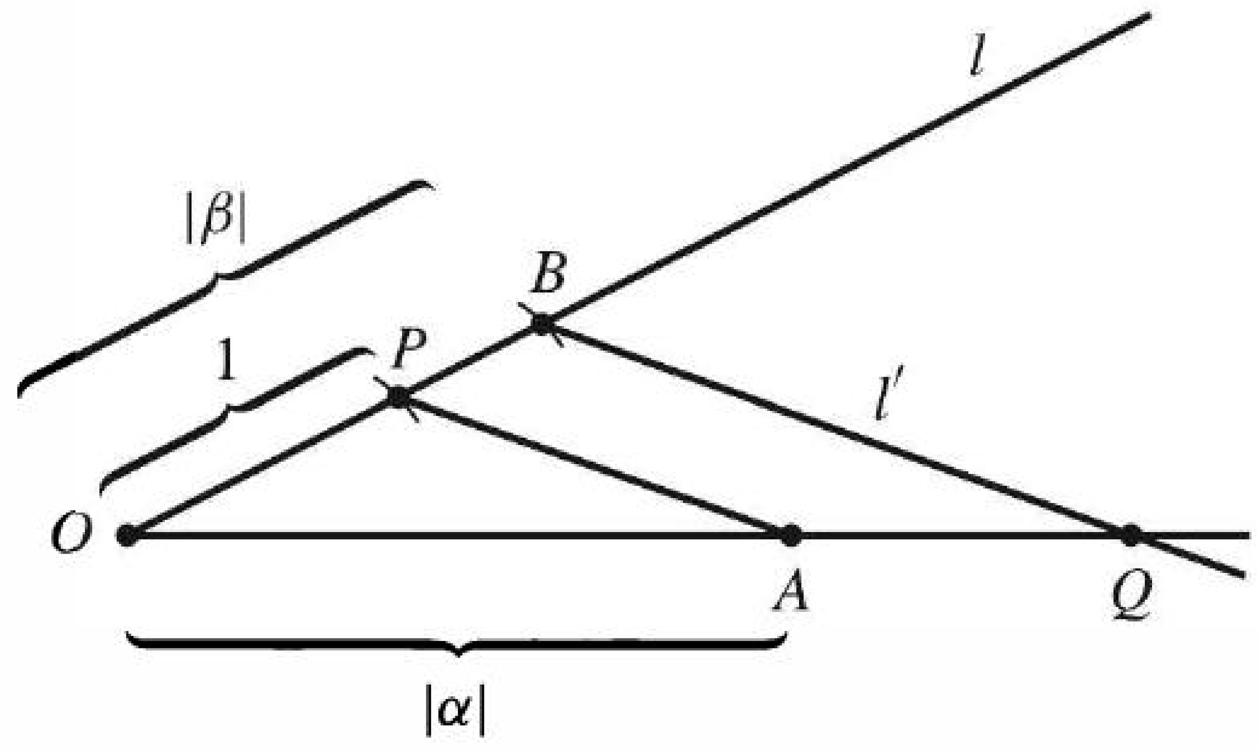
أخيرًا، يبين الشكل 4.32 أنّ α / β قابل للإنشاء، إذا كان $\beta \neq 0$، ليكن $\overline{OA}$ بطول $|\alpha|$، أنشئ l من خلال O ولا يحوي OA، ثمّ أوجد B و P على l، حيث $\overline{OB}$ بطول $|\beta|$ و $\overline{OP}$ بطول 1، ارسم BA، وأنشئ l' من خلال P موازٍ لـ $\overline{BA}$ ويقطع $\overline{OA}$ عند Q، مرة أخرى باستخدم تشابه المثلثات تجد أنّ:

$$\frac{|\overline{OQ}|}{1} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

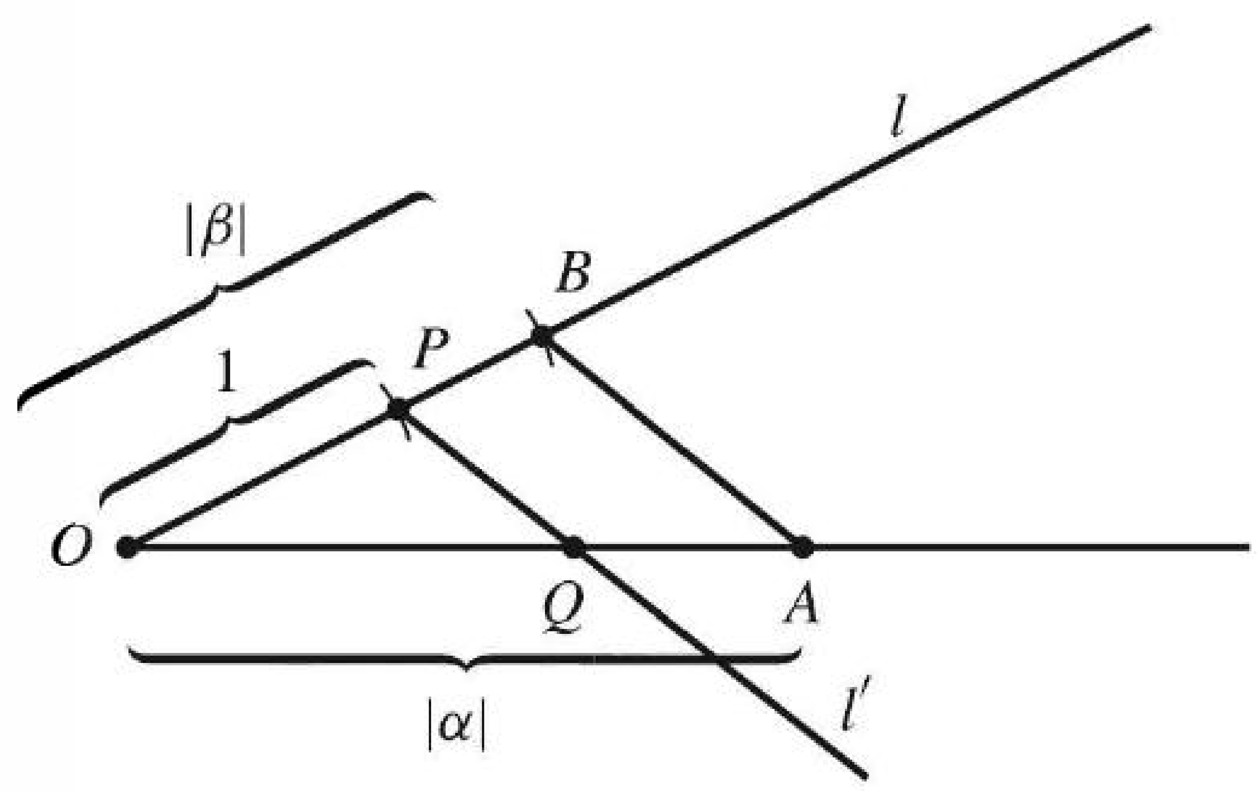
لذلك، $\overline{OQ}$ بطول $|\alpha/\beta|$.



الشكل 2.32



الشكل 3.32



الشكل 4.32

5.32 نتيجة مجموعة الأعداد الحقيقية القابلة للإنشاء تكوّن حقلاً جزئيًّا F من حقل الأعداد الحقيقية.

البرهان برهان هذه النتيجة مباشر من المبرهنة 1.32. ♦

وهكذا، فإنّ الحقل F المكون من الأعداد الحقيقية جميعها القابلة للإنشاء، يحوي $\mathbb{Q}$ – حقل الأعداد النسبية – نظرًا لأن $\mathbb{Q}$ هو أصغر حقل جزئي من $\mathbb{R}$.

من الآن فصاعدًا سنتابع بالطرق التحليلية، حيث نستطيع إنشاء أي عدد نسبي، فيما يتعلق بالقطعة المستقيمة

$$0 \underline{\qquad\quad} 1$$

بطول 1 بوصفها وحدة أساسية على محور السينات، نستطيع أن نعيّن أي نقطة (q_1,q_2) في المستوى بإحداثييها النسبيين، حيث إنّ أي نقطة أخرى في المستوى التي نستطيع تعيينها باستخدام الفرجار والمسطرة، يمكن إيجادها باستخدام إحدى الطرق الثلاث الآتية:

1. بوصفها تقاطع خطين يمرّ كلاهما من خلال نقطتين معلومتين وإحداثياتهما نسبية.

2. بوصفها تقاطع خط يمر من خلال نقطتين، لهما إحداثيات نسبية ودائرة مركزها إحداثياته نسبية ونصف قطرها نسبي.

3. بوصفها تقاطع دائرتين إحداثيات مركزيهما نسبية وأنصاف أقطارها نسبية.

معادلات الخطوط والدوائر من الأنواع المذكورة في 1، و2 و3 هي على الصورة:

$$ax + by + c = 0$$

و

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

حيث a وb, وc, وd, وe, وf جميعها في $\mathbb{Q}$ ، ولأنّ الحالة 3 تقاطع الدائرتين ذوات المعادلتين:

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

و

$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

هو تقاطع الدائرة الأولى نفسه التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

والخط (الوتر المشترك) الذي معادلته:

$$(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + f_1 - f_2 = 0$$

كما نرى، فإنّ الحالة 3 يمكن اختزالها إلى الحالة 2، وبالنسبة إلى الحالة الأولى، فحل مشترك للمعادلتين الخطيتين ذواتي المعاملات النسبية، يمكن أن ينتج عنه قيم نسبية لكل من x وy، وهذا لا يعطينا نقاطًا جديدة، ولكن إيجاد حلّ مشترك لمعادلة خطية ذات معاملات نسبية مع معادلة تربيعية ذات معاملات نسبية – كما في الحالة 2 – يؤدي بالتعويض إلى معادلة تربيعية، وعند حلّ مثل هذه المعادلة بالصيغة التربيعية، يمكن أن يكون لها حلول تتضمن جذورًا تربيعية لأعداد ليست مربعات كاملة في $\mathbb{Q}$.

حيث لم نتطرق في النقاش السابق للحديث عن $\mathbb{Q}$، إلاّ فيما يختص بمسلمات الحقول، فإذا كان H هو أصغر حقل يحوي هذه الأعداد الحقيقية المنشأة حتى الآن، فيظهر النقاش أنّ "العدد الجديد الآتي" الذي تمَّ إنشاؤه يقع في الحقل $H(\sqrt{\alpha})$، حيث $\alpha \in H$، و $\alpha > 0$، وبهذا نكون برهنا نصف النظرية الآتية.

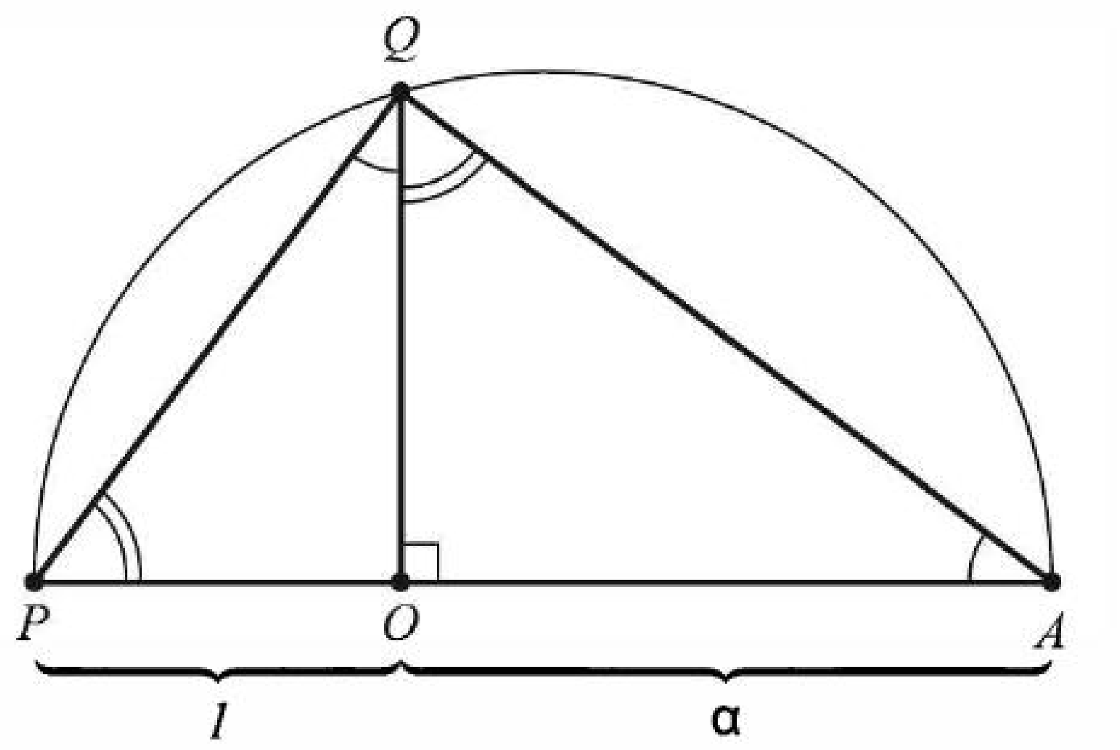
مبرهنة 6.32 الحقل F من الأعداد الحقيقية القابلة للإنشاء، يتكوّن تحديدًا من الأعداد الحقيقية جميعها، التي نستطيع الحصول عليها من $\mathbb{Q}$، بأخذ الجذور التربيعية للأعداد الموجبة بعدد منتهٍ من المرات، وتطبيق عددٍ منته من عمليات الحقول.

البرهان وضّحنا أنّ F لا يحوي سوى الأعداد التي نحصل عليها من $\mathbb{Q}$، بأخذ عدد منته من الجذور التربيعية للأعداد الموجبة، وتطبيق عدد منتهٍ من عمليات الحقول، لكن إذا كان $\alpha > 0$ قابلًا للإنشاء، فإنّ الشكل 7.32 يبيّن أنّ $\sqrt{\alpha}$ قابل للإنشاء، ليكن $\overline{OA}$ بطول α، عيّن p على امتداد $\overline{OA}$ بحيث $\overline{OP}$ بطول 1، وأوجد منتصف $\overline{PA}$، وارسم نصف دائرة يكون $\overline{PA}$ قطرًا لها، ثمّ أقم عمودًا على $\overline{PA}$ من النقطة O، حيث يقطع نصف الدائرة في النقطة Q، إذن، المثلثان OPQ وOQA متشابهان، ويكون

$$\frac{\left|\overline{OQ}\right|}{\left|\overline{OA}\right|}=\frac{\left|\overline{OP}\right|}{\left|\overline{OQ}\right|}$$

و $\left|\overline{OQ}\right|^2=1\alpha=\alpha$. إذن، طول $\overline{OQ}$ يساوي $\sqrt{\alpha}$، وبهذا، فإنّ الجذور التربيعية للأعداد القابلة للإنشاء تكون قابلة للإنشاء.

تظهر المبرهنة 1.32 أنّ عمليات الحقول ممكنة بالإنشاء. ♦



الشكل 7.32

8.32 نتيجة إذا كان γ قابلًا للإنشاء و $\gamma\notin\mathbb{Q}$، فتوجد متتالية منتهية من الأعداد الحقيقية $\alpha_1,..,\alpha_n=\gamma$ حيث $\mathbb{Q}\left(\alpha_1,\ \ldots,\alpha_i\right)$ هو امتداد لـ $\mathbb{Q}$ من الدرجة الثانية، وبشكل خاص، $\left[\mathbb{Q}\left(\gamma\right)\ :\ \mathbb{Q}\right]=2^r$، حيث r عدد صحيح، $r\geq 0$.

البرهان إثبات توافر α_i مباشر من مبرهنة 6.32؛ ولذلك:

$$\begin{aligned}2^n &= [\mathbb{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\mathbb{Q}]\\ &= [\mathbb{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\mathbb{Q}(\gamma)][\mathbb{Q}(\gamma):\mathbb{Q}]\end{aligned}$$

باستخدام المبرهنة 4.32، وهذا ينهي البرهان. ♦

استحالة إنشاءات محددة

سنثبت الآن استحالة إنشاءات هندسية محددة.

9.32 مبرهنة مضاعفة مكعب مستحيلة، أي إنه إذا أُعطينا ضلعًا من مكعب، فليس بالإمكان دائمًا استخدام المسطرة والفرجار في إنشاء ضلع مكعب له ضعف حجم المكعب الأصلي.

البرهان ليكن للمكعب المعطى ضلع بطول 1، وبذلك يكون حجمه 1، والمكعب الذي نبحث عنه يجب أن يكون حجمه 2، وعليه، طول ضلعه $\sqrt[3]{2}$، ولكن $\sqrt[3]{2}$ هو صفر لكثيرة الحدود غير المختزلة على $\mathbb{Q}$، $x^3 - 2$، ولذلك:

$$\left[\mathbb{Q}\ \sqrt[3]{2} : \mathbb{Q}\right] = 3$$

تبين النتيجة 8.32 أنه لمضاعفة هذا المكعب ذي الحجم 1، نحتاج إلى أن يكون لدينا $2^r = 3$، حيث r عدد صحيح، ولكن مثل هذا العدد غير متوافر. ♦

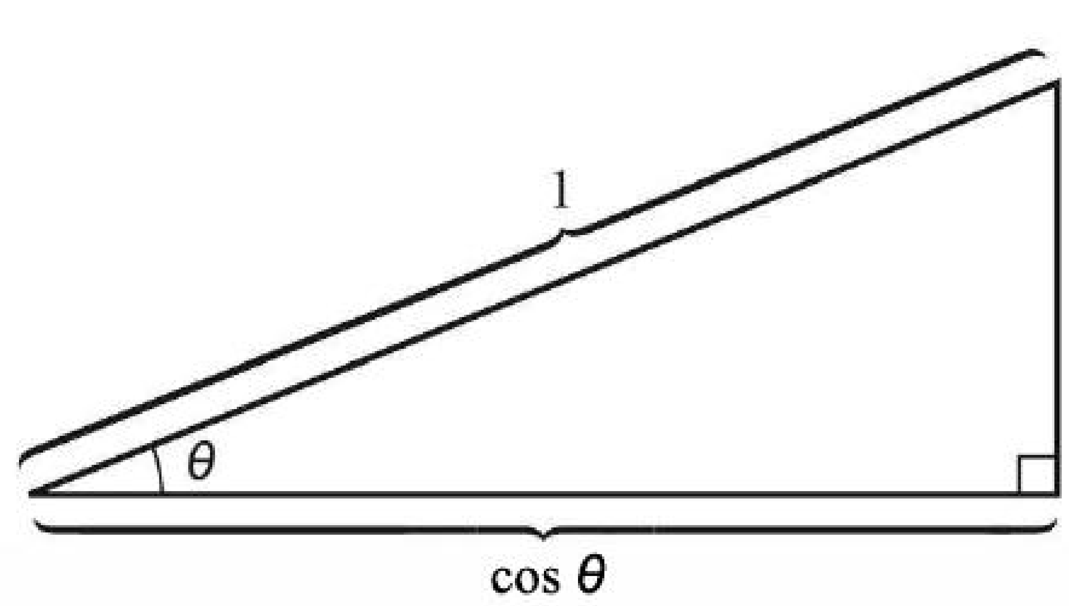
10.32 مبرهنة تربيع الدائرة مستحيل، أي إنه إذا أُعطينا دائرة، فليس بالإمكان دائمًا استخدام المسطرة والفرجار في إنشاء مربع له مساحة تساوي مساحة الدائرة المعطاة.

البرهان ليكن نصف قطر الدائرةيساوي 1؛ ولذلك تكون مساحتها تساوي π، نحن في حاجة إلى إنشاء مربع ضلعه يساوي $\sqrt{\pi}$، ولكن π متسامٍ على $\mathbb{Q}$؛ ولذلك $\sqrt{\pi}$ متسامٍ على $\mathbb{Q}$ أيضًا. ♦

11.32 مبرهنة تثليث الزاوية مستحيل، أي إنه توجد زاوية لا يمكن تثليثها باستخدام المسطرة والفرجار.

البرهان يبين الشكل 12.32 أنّ الزاوية θ تكون قابلة للإنشاء إذا وفقط إذا أمكننا إنشاء قطعة بطول $|\cos\theta|$، الآن، الزاوية $60°$ قابلة للإنشاء، وسنبين أنها غير قابلة للتثليث، لاحظ أنّ:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.
\end{aligned}$$



الشكل 21.32

[نلاحظ أنّ الكثير من الطلاب اليوم لم يشاهدوا المتطابقات المثلثية التي استخدمناها

تـوًّا، فـالتمريـن 1 يعيـد التمريـن 40 الـوارد في الفصـل الأول، ويطلـب إليـك إثبـات المتطابقـة $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ بـاستخدام صيغة أويلر (*Euler's Formula*)].

لتكن $\theta = 20°$، وبـذلـك، فـإنّ $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$، ولتكن $\alpha = \cos 20°$، مـن المتطابقة $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$ نجد أنّ

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2}$$

وبذلك، فـإنّ α صفر لكثيرة الحدود $8x^3 - 6x - 1$، وكثيرة الحدود هذه غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ لأنـه بـاستخدام المبرهنة 11.23 يكفي أن نثبت أنها لا تتحلل إلى عوامل في $\mathbb{Z}[x]$، ولكن التحليل إلى عوامل في $\mathbb{Z}[x]$ يستلزم عـاملًا خطيًّا على الصورة $(8x \pm 1)$، $(4x \pm 1)$، $(2x \pm 1)$ أو $(x \pm 1)$،

حيث نستطيع التحقق سريعًا من أنّ أيًّا من الأعداد $\pm\frac{1}{8}$، $\pm\frac{1}{4}$، $\pm\frac{1}{2}$ و ± 1 ليس صفرًا لكثيرة الحدود $8x^3 - 6x - 1$؛ ولذلك:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$$

وبـاستخدام النتيجة 8.32، فإنّ α غير قـابلـة لـلإنشـاء، وبنـاءً عليه، فـإن $60°$ لا يمكن تثليثها. ♦

■ نبذة تاريخية

بـالعودة إلى القرن الرابع قبل الميلاد، نجد أنّ الرياضيين اليونـان حـاولوا دون نجـاح أن يجدوا إنشـاءات هندسية بـاستخدام المسطرة والفرجـار لتثليث الزاوية، ومضاعفة المكعب وتربيع الدائرة، وعلى الرغم من أنهم لم يستطيعوا إثبـات استحـالـة مثل هذه الإنشاءات، إلّا أنـهم نجحوا في بنـاء حلول لـهذه المعضلات بـاستخدام أدوات أخرى تشمل المقـاطع المخروطية.

وفي بداية القرن التـاسع عشر قـام كـارل جـاوس (*Carl Gauss*) بدراسة تفصيلية لقابلية الإنشـاء، وذلك فيمـا يتعلق بحلـه لمعـادلات أولية العدد (*cyclotomic equations*)، والمعـادلات التي على الصورة $x^p - 1 = 0$، حيث p عدد أولي جذورهـا رؤوس المضلـع المنتظم الذي عدد أضلاعـه p، وقد أثبت أنه على الرغم من أنّ هذه المعـادلات جميعهـا تحلّ بـاستخدام الجذور إذا كـان $p-1$ ليس من قوى 2، فإنّ الحلول يجب أن تتضمن جذورًا أعلى من الثـاني، في الحقيقة، أكّد جـاوس أنّ كل مـن يحـاول أن يجد إنشاءً هندسيًّا للمضلـع ذي الأضلاع p، حيث $p-1$ ليس من قوى 2، فسيضيـع وقتـه هبـاءً، وكـان الشيء المشوق أنّ جاوس لم يبرهن مـا أكده من أنّ مثل هـذه الإنشـاءات مستحيلـة، وهـذا مـا تمّ إنجازه عـام 1837م على يد بيري وانتزل (*Pierre Wantzel* 1814- 1848)، حيث برهـن النتيجـة 8.32، وأقـام الدليل على صحّة المبرهـنة 9.32 والمبرهـنة 11.32، ومن نـاحية أخرى، فـإنّ إثبـات المبرهـنة 10.32 يتطلب إثبـات أنّ π متسام، وهـذا مـا تمّ تحقيقه عـام *1882*م على يد فيردنـاند ليندمـان (*Ferdinand Lindemann* 1852- 1839).

لاحظ أنّ المضلـع المنتظم الذي لـه عدد n من الأضلاع قـابل لـلإنشـاء عندمـا $n \geq 3$، إذا وفقط إذا كـانت الزاوية $2\pi/n$ قـابلـة لـلإنشـاء.

وهـذه الحـالـة تتحقق إذا وفقط إذا كـانت القطعـة المستقيمـة بطول $\cos\left(2\pi/n\right)$، قـابلـة لـلإنشـاء.

■ تمارين 32

حسابات

1. أثبت المتطابقة المثلثية $cos3\ \theta=4\ cos^3\ \theta-3\ cos\ \theta$ من صيغة أويلر

$e^{i\theta}= cos\theta\ +\ i\ sin\theta$.

مفاهيم

2. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_____ أ. من المستحيل مضاعفة أي مكعب له ضلع قابل للإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار.

_____ ب. من المستحيل مضاعفة كل مكعب له ضلع قابل للإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار.

_____ جـ. من المستحيل تربيع دائرة لها نصف قطر قابل للإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار.

_____ د. من المستحيل تثليث زاوية قابلة للإنشاء باستخدام المسطرة والفرجار.

_____ هـ. كل عدد قابل للإنشاء هو من الدرجة 2^r على $\mathbb{Q}$، حيث r عدد صحيح، $r \geq 0$.

_____ و. لقد أثبتنا أن كل عدد حقيقي من الدرجة 2^r على $\mathbb{Q}$، حيث r عدد صحيح، $r \geq 0$ يكون قابلاً للإنشاء.

_____ ز. حقيقة أنّ تحليل عدد صحيح موجب إلى حاصل ضرب عددين أوليين وحيد (دون اعتبار الترتيب)، استُخدمت بقوة في خاتمة المبرهنتين 9.32 و 11.32.

_____ ح. البرهان بالعدّ هو إلى حدّ بعيد أداة قوية من أدوات الرياضيين.

_____ ط. نستطيع إيجاد أي عدد قابل للإنشاء بعدد منتهٍ من الخطوات، وذلك بالبدء بقطعة بطول الوحدة وباستخدام المسطرة والفرجار.

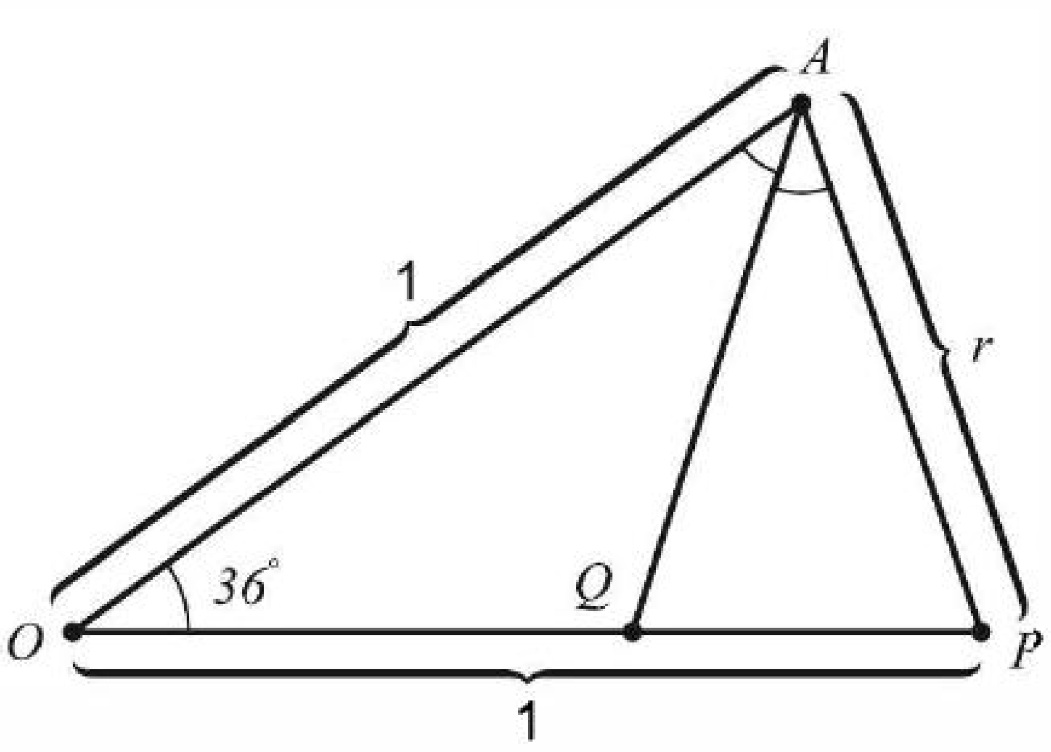
_____ ي. نستطيع إيجاد المجموع الكلي للأعداد القابلة للإنشاء جميعها بعدد منتهٍ من الخطوات، وذلك بالبدء بقطعة بطول الوحدة وباستخدام المسطرة والفرجار.

نظرية

3. باستخدام إثبات المبرهنة 11.32، أثبت أنّ المضلع المنتظم الذي له 9 أضلاع غير قابل للإنشاء.

4. أثبت جبريًّا أنه يمكن إنشاء زاوية $30°$.

5. بالرجوع إلى الشكل 13.32 حيث $\overline{AQ}$ ينصف الزاوية OAP، أثبت أنّ المضلع المنتظم الذي له 10 أضلاع قابل للإنشاء، (ولذلك يكون الخماسي المنتظم قابلًا للإنشاء أيضًا). [مساعدة: المثلث OAP يشابه المثلث APQ أثبت جبريًّا أنّ r قابل للإنشاء].



الشكل 13.32

في التمارين 6 إلى 9 استخدم نتائج تمرين 5 عند الحاجة؛ لتثبت أنّ العبارة صحيحة:

6. المضلع المنتظم الذي له 20 ضلعًا قابل للإنشاء.

7. المضلع المنتظم الذي له 30 ضلعًا قابل للإنشاء.

8. من الممكن تثليث الزاوية 72°.

9. المضلع المنتظم الذي له 15 ضلعًا قابل للإنشاء.

10. افترض أنك تريد أن تشرح بصورة تقريبية بثلاث أو أربع جمل لمدرّس مرحلة ثانوية يدرّس الهندسة المستوية، ولم يدرس مقررًا دراسيًا في الجبر المجرّد، فكيف يمكن إثبات أنه من المستحيل تثليث زاوية قياسها 60°؟ اكتب ما ستقوله.

الحقول المنتهية Finite Fields

الهدف من هذا الفصل تحديد بنية الحقول المنتهية كلها، وسنثبت أنه لكل عدد أولي p وعدد صحيح موجب n، يوجد بالضبط حقل واحد (تبعًا للتماثل) عدد عناصره p^n، حيث يسمّى هذا الحقل $\mathrm{GF}(p^n)$ بالعادة **حقل جالوا من الرتبة p^n** (***Galois field of order p^n***)، سنستخدم بعض معلوماتنا عن الزمر الدورية، والبراهين بسيطة ورائعة.

بناء الحقل المنتهي

سنثبت أنّ عدد عناصر أي حقل منتهٍ يجب أن يكون على صورة قوة لعدد أولي.

1.33 مبرهنة ليكن الحقل E امتدادًا من الدرجة n على الحقل المنتهي F، فإذا كان لـ F q من العناصر، فإن لـ E q^n من العناصر.

البرهان لتكن $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ أساسًا لـ E بوصفها فضاء متجهات على F، فبحسب التمرين 21 من الفصل 30، فإنّ كل $\beta \in E$ تكتب بصورة وحيدة على الهيئة:

$$\beta = b_1\alpha_1 + \dots + b_n\alpha_n$$

حيث $b_i \in F$، ولأنّ كل b_i يمكن أن تكون أيًّا من الـ q عنصر في F، فإنّ العدد الكلي للتراكيب الخطية المختلفة في α_i تساوي q^n. ♦

2.33 نتيجة إذا كان E حقلًا منتهيًا ذا مميز p، فإنّ E يحوي بالضبط p^n من العناصر، حيث n عدد صحيح موجب.

البرهان كل حقل منتهٍ هو امتداد منتهٍ لحقل أولي يماثل الحقل $\mathbb{Z}_p$، حيث p هو المميز لـ E. تثبت النتيجة مباشرة من المبرهنة 1.33. ♦

سنتوجه الآن لدراسة البناء الضربي للحقل المنتهي، حيث ترينا المبرهنة الآتية، أنّ أي حقل منتهٍ يمكن أن يُبنى من الحقل الجزئي الأولي.

3.33 مبرهنة ليكن E حقلاً يحوي p^n من العناصر ومحتوًى في الإغلاق الجبري $\overline{\mathbb{Z}}_p$ لـ $\mathbb{Z}_p$. إنّ عناصر E هي بالضبط الأصفار المحتواة في $\overline{\mathbb{Z}}_p$ لكثيرة الحدود $x^{p^n}-x$ في $\mathbb{Z}_p[x]$.

البرهان تشكل المجموعة E^* المؤلفة من العناصر غير الصفرية من E زمرة مع الضرب، ويكون عدد عناصرها p^n-1، فإذا كانت $\alpha \in E^*$، فإنّ رتبتها في هذه الزمرة تقسم رتبة الزمرة p^n-1، إذن، لكل $\alpha \in E^*$، فإن $\alpha^{p^n-1}=1$، وهذا يؤدي إلى $\alpha^{p^n}=\alpha$، ما يعني أنّ كل عنصر في E هو صفر لـ $x^{p^n}-x$، ولأنّ $x^{p^n}-x$ يمكن أن يكون لها على الأكثر p^n من الأصفار، فإننا نرى أنّ E يحوي بالضبط أصفار $x^{p^n}-x$ في $\overline{\mathbb{Z}}_p$. ♦

4.33 تعريف يسمى العنصر α من الحقل F **جذرًا من الرتبة n للواحد (nth root of unity)**، إذا كان $\alpha^n = 1$، ويسمى **جذرًا بدائيًّا من الرتبة n للواحد (primitive nth root of unity)**، إذا كان

$\alpha^n = 1$ و $\alpha^m \neq 1$ لكل $0 < m < n$. ■

إذن، العناصر غير الصفرية في حقل منتهٍ يحوي p^n من العناصر، هي ألـ $(p^n - 1)$ من الجذور للواحد.

تذكر أننا أثبتنا في النتيجة 6.23 أنّ زمرة الضرب للعناصر غير الصفرية في حقل منتهٍ تكون زمرة دورية، وهذه حقيقة مهمّة جدًّا عن الحقول المنتهية؛ فقد تمّ في الحقيقة استخدامها في الترميز الجبري، ولإتمام الشرح في هذا الفصل، فسوف ننصّ عليها هنا، ونعطي نتيجة ونوضحها بمثال.

5.33 مبرهنة زمرة الضرب $\langle F^*, \cdot \rangle$ للعناصر غير الصفرية في حقل منتهٍ F، تكون زمرة دورية.

البرهان انظر النتيجة 6.23. ♦

6.33 نتيجة يكون أي امتداد منتهٍ E لحقل منتهٍ امتدادًا بسيطًا لـ F.

البرهان لتكن α مولدة للزمرة الدورية E^* المكوّنة من العناصر غير الصفرية في E، إذن: $E = F(\alpha)$. ♦

7.33 مثال في الحقل المنتهي $\mathbb{Z}_{11}$، وبحسب المبرهنة 5.33 $\langle \mathbb{Z}_{11}^*, \cdot \rangle$ زمرة دورية، لنحاول إيجاد مولد لـ $\mathbb{Z}_{11}^*$ بالمحاولة والخطأ، سنبدأ بتجريب 2، ولأنّ $|\mathbb{Z}_{11}^*| = 10$، فإنّ 2 هي عنصر من $\mathbb{Z}_{11}^*$ من رتبة تقسم 10، بمعنى أنها 2، 5 أو 10، الآن:

$$2^5 = (2)(5) = 10 = -1, \quad \text{و} \quad 2^2 = 4\ ,\ 2^4 = 4^2 = 5$$

إذن، 2^2 و 2^5 لا تساويان 1، ولكن بالطبع $2^{10} = 1$، وهكذا، فإنّ 2 مولدة لـ $\mathbb{Z}_{11}^*$، بمعنى أنّ 2 جذر بدائي من الرتبة 10 للواحد في $\mathbb{Z}_{11}$.

بحسب نظرية الزمر الدورية، فإنّ مولدات $\mathbb{Z}_{11}^*$ كلّها – التي هي جذور بدائية من الرتبة 10 للواحد – على الصورة 2^n، حيث n عدد أولي نسبيًّا لـ 10، وهي:

$$2^1 = 2, \quad 2^3 = 8, \quad 2^7 = 7, \quad 2^9 = 6$$

■ **نبذة تاريخية**

على الرغم من أنّ كارل ف. جاوس (*Carl F. Gauss*) أثبت أنّ مجموعة الرواسب قياس عدد أولي p تحقق خصائص الحقل، فإن إيفرست جالوا (*Evariste Galois* 1811 – 1832) هو أول من تعامل مع ما أسماه "الحلول غير المتكافئة" (*incommensurable solutions*) للتطابق $F(x) \equiv 0$ (مقياس p)، حيث $F(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة من الدرجة n مقياس p ، فقد لاحظ في بحث له كتب عام 1830م، أنّ على المرء أن يعدّ جذور هذا التطابق بوصفه "تنوعًا من الرموز التخيلية"، التي يمكن استخدامها في الحسابات تمامًا، كما نستخدم $\sqrt{-1}$ ، وقد أثبت جالوا أنه إذا كانت α حلاً لـ $F(x) \equiv 0$ (مقياس p)، فإنّ التعبير $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ تأخذ بالضبط p^n قيمة مختلفة، وأثبت أخيرًا نتائج مكافئة للمبرهنتين 3.33 و 5.33 في هذا الكتاب.

كانت حياة جالوا قصيرة ومأساوية، وقد أظهر مهارة في الرياضيات مبكرًا، ونشر كثيرًا من الأبحاث قبل سن الـ 20، وبصورة أساسية، وضع الأساس للأفكار الرئيسة في نظرية جالوا، إضافة إلى أنه كان نشيطًا في الثورة السياسية الفرنسية، التي تبعت ثورة يوليو عام 1830م، وقد اعتُقل في مايو عام 1831م؛ لتهديده حياة الملك لويس فيليب، وبعد تبرئته اعتقل ثانية؛ لمشاركته في الاحتجاج المسلح بكثافة للجمهوريين في يوم الباستيل في تلك السنة، وبعد شهرين من إطلاق سراحه من السجن في مارس المقبل قُتل في مبارزة "ضحية امرأة لعوب مغمورة واثنين من المغفلين"، وقد كتب في الليلة السابقة رسالة لصديق يوضح فيها بعض أعماله في نظرية المعادلات، وطالبًا دراستها من قبل رياضيين آخرين، ولم تنشر أهم أبحاثه قبل عام 1846م، وقد أصبح عمله منذ ذلك التاريخ ذا مكانة مرموقة.

الجذور البدائية من الرتبة 5 للواحد في $\mathbb{Z}_{11}$ تكون على الصورة 2^m، حيث 2 هو القاسم المشترك الأكبر بين m و 10، وهي:

$$2^2 = 4\ ,\ 2^4 = 5\ ,\ 2^6 = 9\ ,\ 2^8 = 3$$

الجذر التربيعي البدائي للواحد في $\mathbb{Z}_{11}$ هو $2^5 = 10 = -1$ ▲

وجود $\mathrm{GF}(p^n)$

نتحول الآن إلى السؤال عن وجود الحقل المنتهي من الرتبة p^r لكل قوة p^r للعدد الأولي حيث $r > 0$. سوف نحتاج إلى التمهيدية الآتية:

8.33 تمهيدية إذا كان F حقلاً ذا مميز p وإغلاق جبري $\overline{F}$، فإنّ $x^{p^n} - x$ لها p^n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$. ♦

البرهان لأنّ $\overline{F}$ مغلقة جبريًا، فإنّ $x^{p^n} - x$ تتحلل في هذا الحقل إلى حاصل ضرب عوامل خطية $x - \alpha$، وهكذا، فإنه يكفي أن نثبت أنّ أيًا من هذه العوامل لن يظهر أكثر من مرة في هذا التحليل.

ولأننا لم نقدم نظرية جبرية للمشتقات، فإننا سنفقد هذه الآلية الرائعة؛ ولذلك، سنكمل باستخدام القسمة الطويلة، لاحظ أنّ 0 هو أحد أصفار $x^{p^n} - x$، وهو ذو تكرار 1، افترض أنّ $\alpha \neq 0$ هو صفر لـ $x^{p^n} - x$، وعليه، فهو صفر لـ $f(x) = x^{p^n - 1} - 1$. إذًا $x - \alpha$، عامل لـ $f(x)$ في $\overline{F}[x]$، وباستخدام القسمة الطويلة نجد أنّ:

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)}=g(x)$$

$$=x^{p^{n-2}}+\alpha x^{p^{n-3}}+\alpha^2 x^{p^{n-4}}+\ldots+\alpha^{p^{n-3}}x+\alpha^{p^{n-2}}$$

الآن يحوي $g(x)$ p^n-1 من الحدود، وفي $g(\alpha)$، كل حد هو:

$$\alpha^{p^n-2}=\frac{\alpha^{p^n-1}}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}.$$

إذن:

$$g(\alpha)=\left[(p^n-1).1\right]\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha}.$$

لأننا في حقل ذي مميز p، إذن، $g(\alpha)\neq 0$، وهكذا، فإنّ α صفر لـ $f(x)$ ، ذو تكرار 1.♦

9.33 تمهيدية إذا كان F حقلاً ذا مميز p، فإنّ $(\alpha+\beta)^{p^n}=\alpha^{p^n}+\beta^{p^n}$ لكل $\alpha,\beta\in F$ وكل عدد صحيح موجب n. ♦

البرهان لتكن $\alpha,\beta\in F$، وبتطبيق مبرهنة ذات الحدين على $(\alpha+\beta)^p$، نحصل على

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^p&=\alpha^p+(p.1)\alpha^{p-1}\beta+\left(\frac{p(p-1)}{2}.1\right)\alpha^{p-2}\beta^2\\&+\ldots+(p.1)\alpha\beta^{p-1}+\beta^p\\&=\alpha^p+0\alpha^{p-1}\beta+0\alpha^{p-2}\beta^2+\ldots+0\alpha\beta^{p-1}+\beta^p\\&=\alpha^p+\beta^p.\end{aligned}$$

وبالاستمرار واستخدام الاستقراء الرياضي على n، افترض أننا حصلنا على ،

$$(\alpha + \beta)^{p^{n-1}} = \alpha^{p^{n-1}} + \beta^{p^{n-1}}$$

إذن:

$$\left(\alpha+\beta\right)^{p^n} = \left[(\alpha+\beta)^{p^{n-1}}\right]^p = (\alpha^{p^{n-1}} + \beta^{p^{n-1}})^p = \alpha^{p^n} + \beta^{p^n} \quad \blacklozenge$$

10.33 مبرهنة يوجد حقل منتهٍ $GF(p^n)$ يحوي p^n من العناصر لكل قوى عدد أولي p^n.

البرهان ليكن $\overline{\mathbb{Z}}_p$ إغلاقًا جبريًّا لـ $\mathbb{Z}_p$، وليكن K مجموعة جزئية من $\overline{\mathbb{Z}}_p$ مكونة من أصفار $x^{p^n} - x$ في $\overline{\mathbb{Z}}_p$ جميعها، ليكن $\alpha, \beta \in K$، حيث تثبت التمهيدية 9.33 أنّ $\alpha + \beta \in K$، وتثبت المعادلة: $(\alpha\beta)^{p^n} = \alpha^{p^n}\beta^{p^n} = \alpha\beta$ أنّ $\alpha\beta \in K$، ومن $\alpha^{p^n} = \alpha$ نحصل على $(-\alpha)^{p^n} = (-1)^{p^n}\alpha^{p^n} = (-1)^{p^n}\alpha$، فإذا كان p عددًا أوليًّا فرديًّا، فإنّ $(-1)^{p^n} = -1$، وإذا كان $p = 2$، فإنّ $-1 = 1$، وهكذا، فإنّ $(-\alpha)^{p^n} = -\alpha$، ما يعني أنّ $-\alpha \in K$، ولكن 0 و 1 أصفار لـ $x^{p^n} - x$، فإذا كانت $\alpha \neq 0$ و $\alpha^{p^n} = \alpha$، فإنّ ذلك يؤدي إلى أنّ $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{p^n} = \dfrac{1}{\alpha}$، إذن: K حقل جزئي من $\overline{\mathbb{Z}}_p$، ويحوي $\mathbb{Z}_p$، إذن، K هو الحقل المطلوب الذي يحوي p^n من العناصر؛ لأن التمهيدية 8.33 أثبتت أنّ لـ $x^{p^n} - x$، p^n من الأصفار المختلفة في $\overline{\mathbb{Z}}_p$. ♦

11.33 نتيجة (إذا كان F حقلاً منتهيًا، فإنّه لكل عدد صحيح موجب n، توجد كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$ من الدرجة n.

البرهان ليكن F يحوي $q = p^r$ من العناصر، حيث p هو المميز لـ F، فبحسب المبرهنة 10.33 يوجد حقل $K \leq \overline{F}$ يحوي $\mathbb{Z}_p$ (بحسب التماثل)، ويتكوّن أساسًا من أصفار $x^{p^{rn}} - x$. نريد إثبات أنّ $F \leq K$، فكل عنصر في F هو صفر لـ $x^{p^r} - x$، تبعًا للمبرهنة 3.33. الآن $p^{rs} = p^r p^{r(s-1)}$ وبتطبيق هذه المعادلة بصورة متكررة على القوى، واستخدام حقيقة أنه إذا كان $\alpha \in F$، فإن $\alpha^{p^r} = \alpha$، فإنه يمكننا أن نرى أنه إذا كان $\alpha \in F$، فإن

$$\alpha^{p^{rn}} = \alpha^{p^{r(n-1)}} = \alpha^{p^{r(n-2)}} = \cdots = \alpha^{p^r} = \alpha$$

إذن، $F \leq K$. تثبت المبرهنة 1.33 أننا يجب أن نحصل على $[K : F] = n$، لقد رأينا أنّ K بسيط على F في النتيجة 6.33، وهكذا، فإنّ $K = F(\beta)$، حيث $\beta \in K$، وهذا يؤدي إلى أن $\mathrm{irr}(\beta, F)$ يجب أن تكون من الدرجة n. ♦

12.33 مبرهنة ليكن p عددًا أوليًا، ولتكن $n \in \mathbb{Z}^+$، فإذا كان E و E' حقلين من الرتبة p^n، فإنّ $E \simeq E'$.

البرهان $\mathbb{Z}_p$ هو الحقل الأولي لكل من E و E' تبعًا للتماثل، وبحسب النتيجة 6.33، فإنّ E امتداد بسيط لـ $\mathbb{Z}_p$ من الدرجة n، ما يعني توافر كثيرة حدود غير مختزلة $f(x)$ من الدرجة n، في $\mathbb{Z}_p[x]$، بحيث $E \simeq \mathbb{Z}_p[x]/\langle f(x)\rangle$؛ ولأن عناصر E أصفار لـ $x^{p^n} - x$، فإننا نرى كذلك أنّ $f(x)$ عامل من عوامل $x^{p^n} - x$ في $\mathbb{Z}_p[x]$.

ولأن E' كذلك تتكوّن من أصفار $x^{p^n} - x$، فإننا نرى كذلك أنّ E' تحوي أصفارًا لغير المختزلة $f(x)$ في $\mathbb{Z}_p[x]$. إذن، ولأنّ E' تحوي تمامًا p^n من العناصر، فإن E' متماثلة مع $\mathbb{Z}_p[x]/\langle f(x)\rangle$. ♦

استخدمت الحقول المنهية في الترميز الجبري. في بحث منشور في "*American Mathematical Monthly* 77 (1970): 249–258". صنع نورمان ليفنسون ترميزًا خطيًّا يستطيع التصحيح لغاية ثلاثة أخطاء باستخدام حقل منتهٍ من الرتبة 16.

■ تمارين 33

حسابات

في التمارين 1 إلى 3، حدّد ما إذا كان يوجد حقل منتهٍ له هذا العدد من العناصر (قد تكون الآلة الحاسبة مفيدة).

1. 4096 **2.** 3127 **3.** 68,921

4. أوجد عدد الجذور البدائية من الرتبة 8 للواحد في GF(9).

5. أوجد عدد الجذور البدائية من الرتبة 18 للواحد في GF(19).

6. أوجد عدد الجذور البدائية من الرتبة 15 للواحد في GF(31).

7. أوجد عدد الجذور البدائية من الرتبة 10 للواحد في GF(23).

مفاهيم

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_____ أ. العناصر غير الصفرية في أي حقل منتهٍ تشكل زمرة دورية مع الضرب.

_____ ب. عناصر أي حقل منتهٍ تشكل زمرة إبدالية مع الجمع.

________ جـ. تشكل الأصفار في $\mathbb{C}$ لـ $(x^{28}-1)\in\mathbb{Q}[x]$ زمرة دورية مع الضرب.

________ د. يوجد حقل منتهٍ بـ 60 عنصرًا.

________ هـ. يوجد حقل منتهٍ بـ 125 عنصرًا.

________ و. يوجد حقل منتهٍ بـ 36 عنصرًا.

________ ز. العدد المركب i جذر بدائي من الرتبة 4 للواحد.

________ ح. توجد كثيرة حدود غير مختزلة من الدرجة 58 في $\mathbb{Z}_2[x]$.

________ ط. العناصر غير الصفرية في $\mathbb{Q}$ تشكل زمرة دورية $\mathbb{Q}^*$ مع الضرب.

________ ي. إذا كان F حقلاً منتهيًا، فإنّ كل تماثل غامر من F إلى حقل جزئي من الإغلاق الجبري $\overline{F}$ لـ F، يكون تماثلًا ذاتيًّا لـ F.

براهين

9. ليكن $\overline{\mathbb{Z}_2}$ إغلاقًا جبريًّا لـ $\mathbb{Z}_2$، ولتكن $\alpha,\ \beta\ \in\overline{\mathbb{Z}_2}$ أصفارًا لـ x^3+x^2+1 و x^3+x+1، على الترتيب. استخدم نتائج هذا الفصل لإثبات أنّ $\mathbb{Z}_2(\alpha)=\mathbb{Z}_2(\beta)$.

10. أثبت أنّ كل كثيرة حدود غير مختزلة في $\mathbb{Z}_p[x]$ تقسم $x^{p^n}-x$، حيث n عدد صحيح.

11. ليكن F حقلًا منتهيًا يحوي p^n من العناصر، ويحوي الحقل الأولي $\mathbb{Z}_p$. أثبت أنه إذا كانت

$\alpha\in F$ مولدة للزمرة الجزيئية $\langle F^*,\ .\rangle$ المكونة من العناصر غير الصفرية في F، فإنّ

$\deg(\alpha,\mathbb{Z}_p)=n$.

12. أثبت أنّ كل حقل من الرتبة p^n يحوي بالضبط حقلًا جزئيًّا واحدًا من الرتبة p^m لكل قاسم m لـ n.

13. أثبت أنّ $x^{p^n}-x$ هي حاصل ضرب كثيرات الحدود الأحادية جميعها غير المختزلة في $\mathbb{Z}_p[x]$ من الدرجة d التي تقسم n.

14. ليكن p عددًا أوليًّا فرديًّا.

أ. أثبت أنه لكل $a\in\mathbb{Z}$، حيث $a\not\equiv 0$ (مقياس p)، يكون هناك حل في $\mathbb{Z}$ للتطابق $x^2\equiv a$ (مقياس p)، إذا وفقط إذا كان $a^{(p-1)/2}\equiv 1$ (مقياس p).

[مساعدة: أعد الصياغة باستخدام عبارة مكافئة عن الحقل المنتهي $\mathbb{Z}_p$، واستخدم نظرية الرمز الدورية].

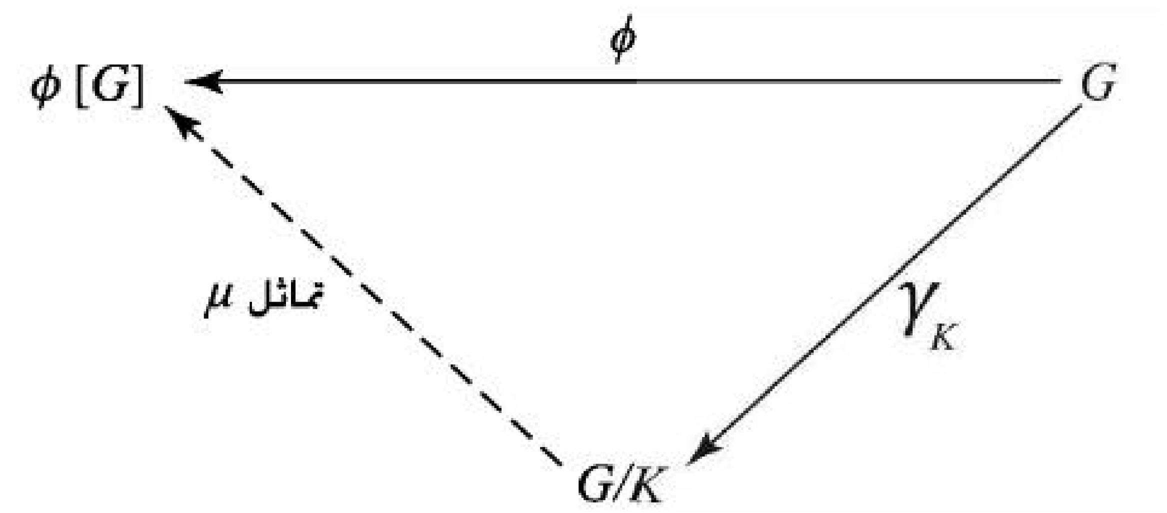
ب. استخدم الفرع (أ) لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود x^2-6 غير مختزلة $\mathbb{Z}_{17}[x]$.

الوحدة السابعة

مبرهنة الزمر المتقدّمة
Advanced Group Theory

الفصل 34 مبرهنات التماثل Isomorphism Theorems

هناك كثير من المبرهنات المتعلقة بتماثل زمر العامل المعروفة بمبرهنات التماثل في مبرهنة الزمر: أولها المبرهنة 11.14، التي سنعيد ذكر نصّها ليسهل الرجوع إليها. تمثّل المبرهنة في الشكل 1.34



الشكل 1.34

2.34 مبرهنة (**مبرهنة التماثل الأولى**): ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكلاً ذا نواة K، وليكن $\gamma_k: G \to G/K$ التشاكل القانوني، يوجد تماثل وحيد $\mu: G/K \to \phi[G]$، حيث إنّ $\phi(x) = \mu\,(\gamma_K(x))$ لكل $x \in G$.

ستساعد التمهيدية الآتية بصورة كبيرة في برهاننا وفهمنا الحدسي لمبرهنتي التماثل الأخريين.

3.34 تمهيدية لتكن N زمرة جزئية ناظمية للزمرة G، وليكن $\gamma: G \to G/N$ التشاكل القانوني، فإنّ الدالة ϕ من مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G، التي تحوي N إلى مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G/N المعطاة بـ $\phi(L) = \gamma\,[L]$ ، تكون دالة أحادية وغامرة.

البرهان تثبت المبرهنة 16.15 أنه إذا كانت L زمرة جزئية ناظمية من G وتحوي N، فإنّ $\phi(L) = \gamma[L]$ زمرة جزئية ناظمية من G/N، ولأنّ $N \leq L$، فإنّ كامل المجموعة المشاركة xN في G محتواة في L، وذلك لكل $x \in L$، إذن، وبحسب المبرهنة 15.13 $\gamma^{-1}[\phi(L)] = L$ ، وعليه، فإذا كانت L وM زمرتين جزئيتين ناظميتين من G، وكلاهما يحوي N، وإذا كانت $\phi(L) = \phi(M) = H$، فإنّ $L = \gamma^{-1}\,[H] = M$ ؛ ولذلك، فإنّ ϕ أحادية.

إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G/N، فإنّ $\gamma^{-1}\,[H]$ زمرة جزئية ناظمية في G، بحسب المبرهنة 16.15؛ ولأن $N \in H$ و $\gamma^{-1}[\{N\}] = N$ ، فنرى أنّ $N \subseteq \gamma^{-1}\,[H]$. إذن، $\phi\left(\gamma^{-1}[H]\right) = \gamma\left[\gamma^{-1}[H]\right] = H$، وهذا يثبت أنّ ϕ غامرة لمجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G/N. ♦

إذا كانت H وN زمرتين جزئيتين من الزمرة G، فسندع

$$HN = \{hn \mid h \in H,\, n \in N\}.$$

نعرف **الموصل (join)** $H \vee N$ لـ H وN ليكون تقاطع الزمر الجزئية كلها في G التي تحوي HN؛ إذن، $H \vee N$ هي أصغر زمرة جزئية في G وتحوي HN، وبالطبع، فإنّ $H \vee N$ هي أصغر زمرة جزئية في G وتحوي كلًا من H وN؛ لأن أيّ زمرة من هذه الصورة يجب أن تحوي HN. بوجه عام، HN ليست بالضرورة زمرة جزئية من G، وفي الأحوال كلها، فإنّ لدينا التمهيدية الآتية:

4.34 تمهيدية إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، وإذا كانت H أيّ زمرة جزئية من G، فإنّ $H \vee N = HN = NH$، وإضافة إلى ذلك، فإذا كانت H ناظمية كذلك، فإنّ HN ناظمية في G.

البرهان سنثبت أنّ HN زمرة جزئية من G، ومن ذلك تنتج $HN = N \vee H$ مباشرة. لتكن $h_1, h_2 \in H$ و$n_1, n_2 \in N$، ولأنّ N زمرة جزئية نظامية، فنحصل على $n_1h_2 = h_2n_3$ ، حيث $n_3 \in N$. إذن:

$$(h_1n_1)(h_2n_2) = h_1(n_1h_2)n_2 = h_1(h_2n_3)n_2 = (h_1h_2)(n_3n_2) \in HN,$$

وهذا يعني أنّ HN مغلقة على العملية المعرفة على G، من الواضح أنّ $e=ee$ تنتمي إلى HN، ولـ $h \in H$ و$n \in N$، فإنّ $(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n_4$ ، حيث $n_4 \in N$؛ لأنّ N زمرة جزئية نظامية، إذن، $(hn)^{-1} \in HN$، وهكذا، فإنّ $HN \leq G$. تثبت مناقشة شبيهة لهذه أنّ NH زمرة جزئية، وهكذا، فإنّ $NH = H \vee N = HN$.

افترض الآن أنّ H ناظمية كذلك في G، ولتكن $h \in H$، $n \in N$، $g \in G$، إذن، $ghng^{-1} = (ghg^{-1})\ (gng^{-1}) \in HN$، وهكذا، فإنّ HN ناظمية في G بالتأكيد. ♦

5.34 مبرهنة (**مبرهنة التماثل الثانية**): لتكن H زمرة جزئية من G، ولتكن N زمرة جزئية ناظمية في G. إذن، $(HN) / N \simeq H / (H \cap N)$.

البرهان ليكن $\gamma: G \to G/N$ التشاكل القانوني، ولتكن $H \leq G$. إذن، $\gamma[H]$ زمرة جزئية من G/N بحسب المبرهنة 2.13. الآن يزوّدنا تأثير γ في عناصر H فقط (يسمى **قصر** γ على H (*restricted*)) تشاكلًا يربط H بصورة غامرة مع $\gamma[H]$ ، ومن الواضح أنّ نواة هذا القصر هي مجموعة عناصر N الموجودة كذلك في H، أي التقاطع $H \cap N$، وترينا المبرهنة 2.34 أنه يوجد تماثل $\mu_1 : H / (H \cap N) \to \gamma[H]$.

وفي المقابل، قصر γ على HN يزوّدنا كذلك بتشاكل يربط HN بصورة غامرة مع $\gamma[H]$؛ لأن $\gamma(n)$ هي العنصر المحايد N في G/N لكل $n \in N$، نواة γ عند قصرها على HN هي N، وتزوّدنا المبرهنة 2.34 بتماثل $\mu_2 : (HN)/N \to \gamma[H]$.

ولأنّ $(HN)/N$ و$H/(H \cap N)$ تماثلان $\gamma[H]$ كليهما، فإنه يوجد تماثل بينهما، وبالتأكيد، $\phi: (HN)/N \to H/(H \cap N)$، حيث $\phi = \mu_1^{-1}\mu_2$ سيكون تماثلًا. بصورة أكثر وضوحًا:

$$\phi(hn)N) = \mu_1^{-1}(\mu_2((hn)N)) = \mu_1^{-1}(h) = h(H \cap N)$$ ♦

6.34 مثال ليكن $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\}$، $N = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. من الواضح أنّ: $HN = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $H \cap N = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \{0\}$. نحصل على $(HN)/N \simeq \mathbb{Z}$ وكذلك على $H/(H \cap N) \simeq \mathbb{Z}$. ▲

إذا كانت H وK كلتاهما زمرتين جزئيتين ناظميتين في G و$K \leq H$، فإنّ H/K زمرة جزئية ناظمية في G/K. تهتم مبرهنة التماثل الثالثة بهذه الزمر.

7.34 مبرهنة (**مبرهنة التماثل الثالثة**): لتكن H وK زمرتين جزئيتين ناظميتين في الزمرة G، بحيث $K \leq H$، فإنّ $G/H \simeq (G/K)\ /\ (H/K)$.

البرهان ليكن $\phi: G \to (G/K)\ /\ (H/K)$ معطًى بـ $\phi(a) = (aK)\ (H/K)$، حيث $a \in G$ ، من الواضح أنّ ϕ غامرة لـ $(G/K)\ /\ (H/K)$، ولكل $a, b \in G$.

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= [(ab)K]\ (H/K) = [(aK)(bK)]\ (H/K)\\ &= [(aK)\ (H/K)]\ [(bK)]\ (H/K)]\\ &= \phi(a)\ \phi(b),\end{aligned}$$

وهكذا، فإنّ ϕ تشاكل، وتتكوّن النواة من تلك العناصر $x \in G$، حيث إنّ $\phi(x) = H/K$، هذه العناصر هي عناصر H فقط، إذن، ترينا المبرهنة 2.34 أنّ $G/H \simeq (G/K)\ /\ (H/K)$. ♦

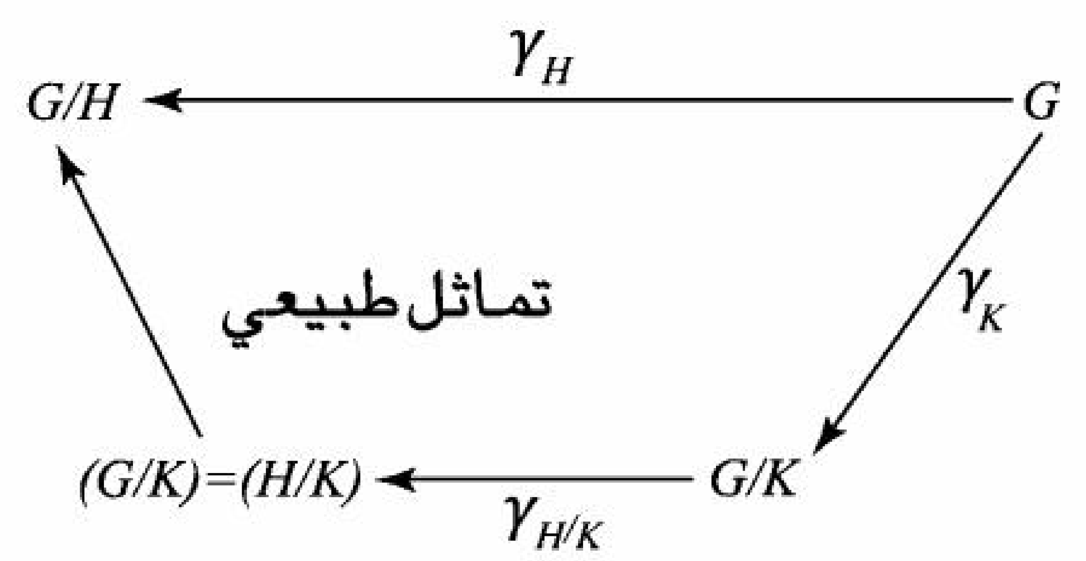
لعرض المبرهنة 7.34 بطريقة لطيفة يمكننا أن نعدّ الدالة القانونية $\gamma_H\colon G \to G/H$ وكأنها حُللت عن طريق زمرة جزئية ناظمية K في G، $K \le H \le G$، لتُعطي

$$,\gamma_H = \gamma_{H/K}\,\gamma_K$$

لتنتج تماثلًا طبيعيًّا، كما هو موضح في الشكل 8.34، وهناك طريقة أخرى لتصوير هذه المبرهنة، وذلك باستخدام الرسم البياني للزمر الجزئية في الشكل 9.34، حيث كل زمرة تكون زمرة جزئية ناظمية في G ومحتواة في التي فوقها، وكلما كبرت الزمرة الجزئية الناظمية، صغرت زمرة العامل؛ لذلك، يمكننا التفكير في G وكأنها ضعفت بـ H، أي إنّ G/H وكأنها أصغر من G عندما ضعفت

بـ K، حيث تنصّ المبرهنة 7.34 على أنه يمكن إضعاف G على طول الطريق هبوطًا إلى G/H بخطوتين: الأولى، إضعافها إلى G/K، ثمّ يضعف هذا إلى $(G/K)/(H/K)$ باستخدام H/K، والنتيجة النهائية هي نفسها (وفق التماثل) كإضعاف G بـ H.

الشكل **9.34**



الشكل **8.34**

10.34 مثال لتكن $K = 6\mathbb{Z} < H = 2\mathbb{Z} < G = \mathbb{Z}$. إذن: $G/H = \mathbb{Z}\ /\ 2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$. الآن $G/K = \mathbb{Z}\ /\ 6\mathbb{Z}$ تحوي العناصر

$$.6\mathbb{Z},\ 1+6\mathbb{Z},\ 2+6\mathbb{Z},\ 3+6\mathbb{Z},\ 4+6\mathbb{Z},\ 5+6\mathbb{Z}$$

من هذه المجموعات المشاركة الست، تقع $6\mathbb{Z}$، $2+6\mathbb{Z}$، و$4+6\mathbb{Z}$ في $2\mathbb{Z}\ /\ 6\mathbb{Z}$. إذن، $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})\ /\ (2\mathbb{Z}\ /\ 6\mathbb{Z})$ تحوي عنصرين، وتماثل $\mathbb{Z}_2$ كذلك، أو بدلاً من ذلك، فإننا نرى أنّ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_6$، وترتبط $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ بهذا التماثل مع الزمرة الجزئية الدورية $\langle 2\rangle$ في $\mathbb{Z}_6$. إذن،

$$.(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_6/\langle 2\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$ ▲

تمارين 34

حسابات

عند استخدام مبرهنات التماثل الثلاث، فمن الضروري عادة معرفة الارتباط الحقيقي المعطى بهذا التماثل، وليس مجرد حقيقة أن هذه الزمر متماثلة، تعطينا التمارين الستة الأولى تدريبًا على ذلك.

1. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ تشاكلًا، بحيث $\phi(1) = 2$.

أ. أوجد النواة K لـ ϕ.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في $\mathbb{Z}_{12}/K$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. أعطِ الارتباط بين $\mathbb{Z}_{12}/K$ و$\mathbb{Z}_3$ المعطى بالدالة μ الموصوفة في المبرهنة 2.34 .

2. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{12}$ تشاكلًا، بحيث $\phi(1)= 10$.

أ. أوجد النواة K لـ ϕ.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في $\mathbb{Z}_{18}/K$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. أوجد الزمرة $\phi[\mathbb{Z}_{18}]$.

د. أعطِ الارتباط بين $\mathbb{Z}_{18}/K$ و $\phi[\mathbb{Z}_{18}]$ المعطاة في الدالة μ الموصوفة في المبرهنة 2.34.

3. في الزمرة $\mathbb{Z}_{24}$، لتكن $H=\langle 4\rangle$ و$N=\langle 6\rangle$.

أ. عدّد العناصر في HN (التي يمكن كتابتها على صورة $H+N$ لهذه الزمر الجمعية) و $H\cap N$.

ب. عدّد العناصر في HN/N، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. عدّد مجموعات المشاركة في $H/(H\cap N)$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

د. أعطِ الارتباط بين $H/(H\cap N)$ وHN/N الموصوف في إثبات المبرهنة 5.34.

4. أعد التمرين 3 للزمرة $\mathbb{Z}_{36}$، حيث $H=\langle 6\rangle$ و $N=\langle 9\rangle$.

5. في الزمرة $G = \mathbb{Z}_{24}$، لتكن $H = \langle 4\rangle$ و $N = \langle 9\rangle$.

أ. عدّد مجموعات المشاركة في G/H، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في G/K، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. عدّد مجموعات المشاركة في H/K، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

د. عدّد مجموعات المشاركة في $(G/K)/(H/K)$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

هـ. أعطِ الارتباط بين G/H و$(G/K)/(H/K)$ الموصوف في إثبات المبرهنة 7.34.

6. أعد التمرين 5 للزمرة $G=\mathbb{Z}_{36}$، حيث $H=\langle 9\rangle$ و$K=\langle 18\rangle$.

براهين

7. أثبت مباشرة باستخدام تعريف الزمر الجزئية الناظمية أنه إذا كانت H وN زمرتين جزئيتين من الزمرة G، و N ناظمية في G، فإنّ $H\cap N$ ناظمية في H.

8. لتكن H، وK، وL زمرًا جزئية ناظمية في G، بحيث $H<K<L$، ولتكن $A=G/H$، $B=K/H$، و$C=L/H$.

أ. أثبت أنّ B و C زمرتان جزئيتان ناظميتان في A، وأنّ $B<C$.

ب. أيّ زمر عامل لـ G تماثل $(A/B)/(C/B)$؟

9. لتكن K وL زمرتين جزئيتين ناظميتين في G، حيث $K\vee L=G$، و $K\cap L=\{e\}$. أثبت أنّ $G/K\simeq L$ و$G/L\simeq K$.

الفصل 35 سلاسل الزمر Series of Groups

السلسلة الناظمية وتحت الناظمية

يركز هذا الفصل على فكرة السلسلة في الزمرة، التي تعطي فهمًا أكثر عمقًا لبنية G، حيث تتحقق النتائج لكلتا الزمر الإبدالية وغير الإبدالية، وهي ليست بتلك الأهمية للزمر الإبدالية منتهية التولد؛ بسبب مبرهنتنا القوية 12.11، حيث إنّ الكثير من توضيحاتنا ستكون مأخوذة من الزمر الإبدالية، لتسهيل الحسابات.

1.35 تعريف السلسلة تحت الناظمية للزمرة G **(subnormal or (subinvariant) series)** متتالية منتهية $H_0, H_1, \ldots H_n$ من الزمر الجزئية في G، حيث $H_i < H_{i+1}$ و H_i زمر جزئية ناظمية في H_{i+1}، وحيث $H_0=\{e\}$ و $H_n= G$. **السلسلة الناظمية لـ** G **(normal (or invariant) series)** متتالية منتهية $H_0,H_1, \ldots, H_n$ من الزمر الجزئية الناظمية في G، حيث إنّ: $H_i<H_{i+1}$، $H_0=\{e\}$ و $H_n= G$. ■

لاحظ أنّ مفهومي السلسلة الناظمية وتحت الناظمية ينطبقان في الزمر الإبدالية؛ لأن الزمر الجزئية كلها ناظمية، فضلًا عن أنّ السلسلة الناظمية دائمًا تحت ناظمية، ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحًا، وقد عرّفنا السلسلة تحت الناظمية قبل السلسلة الناظمية؛ لأن مفهوم السلسلة تحت الناظمية أكثر أهمية لعملنا.

2.35 مثال مثالان لسلسلتين ناظميتين في $\mathbb{Z}$ مع الجمع، هما:

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

و

$$\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}.$$ ▲

3.35 مثال لتكن الزمرة D_4 لتماثلات المربع، كما في المثال 10.8. السلسلة:

$$\{\rho_0\} < \{\rho_0,\mu_1\} < \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} < D_4$$

سلسلة تحت ناظمية، أضف إلى ذلك أنه يمكننا أن نتحقق باستخدام الجدول 12.8 إنها ليست سلسلة ناظمية؛ لأن $\{\rho_0,\mu_1\}$ ليست ناظمية في D_4. ▲

4.35 تعريف تصفية للسلسلة تحت الناظمية (الناظمية) $\{H_i\}$ **(refinement of a subnormal (normal) series)** للزمرة G، إذا كان $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$، أي إنّ كل H_i هي أحد الـ K_j. ■

(السلسلة تحت الناظمية (الناظمية) $\{K_j\}$)

5.35 مثال السلسلة:

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 24\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

تصفية للسلسلة

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

لقد أُدرج الحدّان، $4\mathbb{Z}$ و$24\mathbb{Z}$. ▲

إنّ زمر العامل H_{i+1}/H_i ذات أهمية في دراستنا لبنية G، وهي معرفة في السلاسل الناظمية وتحت الناظمية؛ لأن H_i ناظمية في H_{i+1} في كلتا الحالتين.

6.35 تعريف ككون السلسلتين تحت الناظميتين (الناظميتين) $\{H_i\}$ و$\{K_j\}$ للزمرة G نفسها **متماثلتين (iso-morphic)**، إذا وجد تقابل بين مجموعتي زمر العامل $\{H_{i+1}/H_i\}$ و$\{K_{j+1}/K_j\}$، حيث إنّ زمرتي العامل المتقابلتين متماثلتان. ■

من الواضح أن السلسلتين تحت الناظميتين (الناظميتين) المتماثلتين، لهما عدد الزمر نفسه.

7.35 مثال السلسلتان في $\mathbb{Z}_{15}$،

$$\{0\} < \langle 5\rangle < \mathbb{Z}_{15}$$

و

$$\{0\} < \langle 3\rangle < \mathbb{Z}_{15}$$

متماثلتان. كلا $\mathbb{Z}_{15}/\langle 5\rangle$ و$\langle 3\rangle/\{0\}$ تماثل $\mathbb{Z}_5$، و$\mathbb{Z}_{15}/\langle 3\rangle$ تماثل $\langle 5\rangle / \{0\}$ أو $\mathbb{Z}_3$. ▲

مبرهنة شراير (Schreier Theorem)

سنكمل لبرهان أنّ أيّ سلسلتين تحت ناظميتين في زمرة G لهما تصفيتان متماثلتان. هذه مبرهنة أساسية في مبرهنة السلاسل، البرهان ليس صعبًا جدًّا، إلّا أنه من المعلوم أنّ بعض الطلاب يتوهون في أثناء البرهان، ويميلون للشعور بأنهم لن يستطيعوا فهم المبرهنة، سنعطي توضيحًا للمبرهنة قبل أن ندخل إلى برهانها.

8.35 مثال لنحاول إيجاد تصفيات متماثلة للسلسلتين:

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

و

$$\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

الموجودتين في المثال 2.35. لتكن التصفية:

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

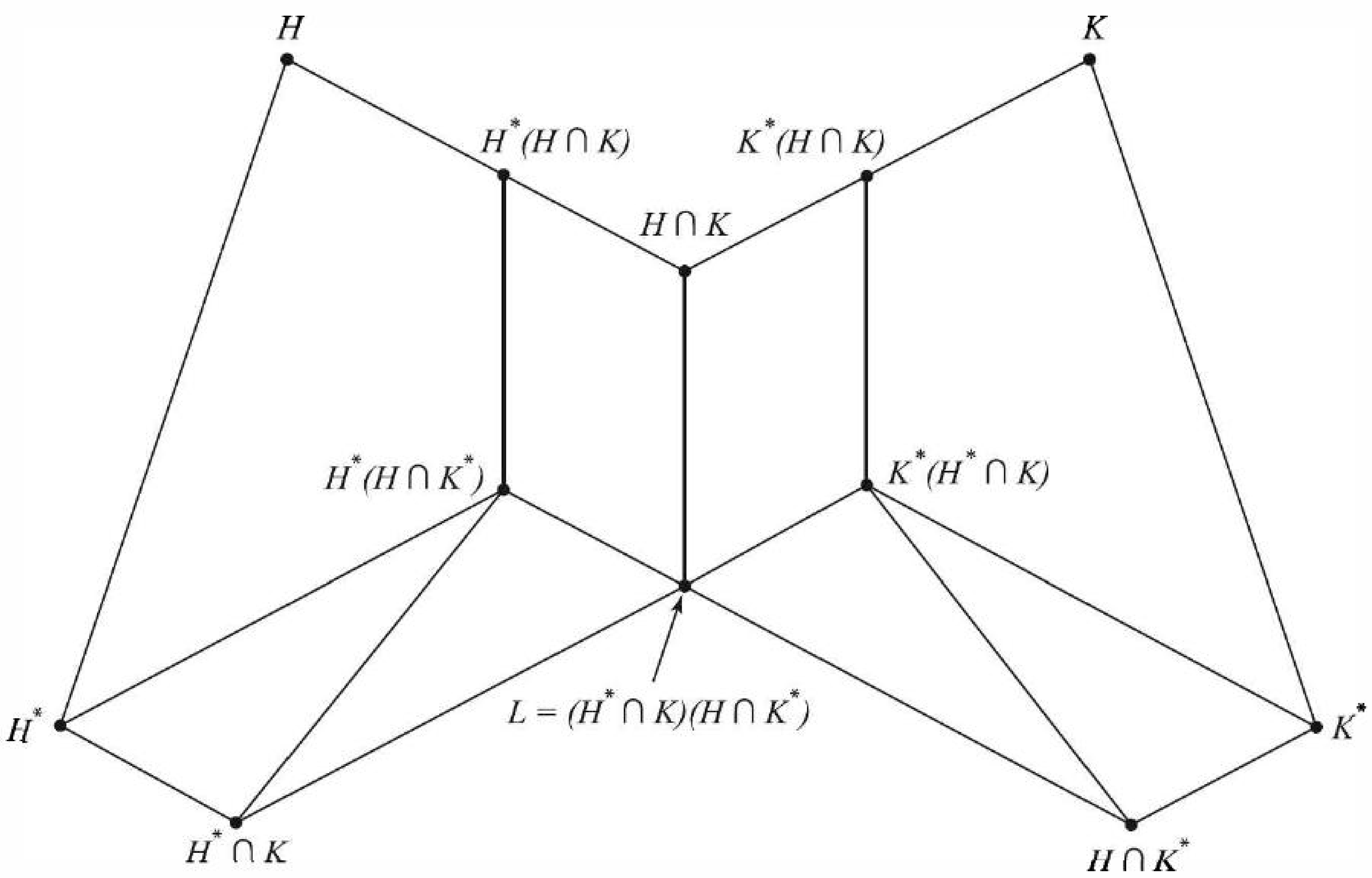
لـ $\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ ، والتصفية $\{0\} < 72\mathbb{Z} < 18\mathbb{Z} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

لـ $\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$. في كلتا الحالتين. تحوي التصفيتان أربع زمر عامل تماثل $\mathbb{Z}_9$، $\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_4$، و$72\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{Z}$، الترتيب الذي تظهر فيه زمر العامل مختلف بالتأكيد. ▲

سنبدأ بتمهيدية تقنية طورت على يد زاسنهاوس (*Zassen Haus*). تسمى هذه التمهيدية أحيانًا تمهيدية الفراشة؛ لأن الشكل 9.35 – الذي يرافق التمهيدية– له هيأة الفراشة.

لتكن H وK زمرًا جزئية من الزمرة G، ولتكن H^* زمرة جزئية ناظمية من H و K^* زمرة جزئية ناظمية من K، بتطبيق العبارة الأولى من التمهيدية 4.34 على H^* و$H \cap K$ بوصفها زمرًا جزئية من H، نرى أنّ $H^*(H \cap K)$ زمرة، وتثبت مناقشة شبيهة أنّ $H^*(H \cap K^*)$، و$K^*(H \cap K)$، و$K^*(H^* \cap K)$ زمر كذلك، وليس من الصعب إثبات أنّ $H^* \cap K$ زمرة جزئية ناظمية من $H \cap K$ (انظر التمرين 22)، والمناقشة نفسها باستخدام التمهيدية 4.34 مطبقة على $H^* \cap K$ و$H \cap K^*$ بوصفها زمرًا جزئية من $H \cap K$، تثبت أنّ $L= (H^* \cap K)(H \cap K^*)$ زمرة. إذن، ينتج لدينا المخطط البياني للزمر الجزئية المعروض في الشكل 9.35 ، ليس من الصعب إثبات علاقات الاحتواء المبينة في الرسم.

لأنّ كلتا $H \cap K^*$ و$H^* \cap K$ زمرة جزئية ناظمية في $H \cap K$، تثبت العبارة الثانية في التمهيدية 4.34 أنّ $L= (H^* \cap K)(H \cap K^*)$ زمرة جزئية ناظمية في $H \cap K$. لقد ميّزنا علاقة الزمرة الجزئية الناظمية هذه بالخط الثقيل في منتصف الشكل 9.35، وندعي أنّ الخطين الثقيلين الآخرين يرمزان لعلاقات زمر جزئية ناظمية، وأنّ زمر العامل الثلاث المعطاة بالزمر الجزئية الناظمية الثلاث كلها متماثلة، ولإثبات هذا، سنعرّف التشاكل $\phi: H^*(H \cap K) \to (H \cap K)/L$ ، ونثبت أنّ ϕ غامرة لـ $(H \cap K) \,/\, L$ ونواتها $H^*(H \cap K^*)$، وسينتج حينها مباشرة عن المبرهنة 2.34 أنّ $H^*(H \cap K^*)$ ناظمية



الشكل 9.35

في $H^*(H \cap K)$، وأنّ $H^*(H \cap K) \,/\, H^*(H \cap K^*) \simeq (H \cap K) \,/\, L$. ونحصل على نتيجة مشابهة بالتناظر للزمر على يمين الخط الثقيل في الشكل 9.35.

ليكن $\phi: H^*(H \cap K) \to (H \cap K)/L$ معرفًا كالآتي:

لـ $h \in H^*$ و $x \in H \cap K$ ، دع $\phi(hx) = xL$. سنثبت أنّ ϕ تشاكل بحسب التعريف، لتكن $h_1, h_2 \in H^*$ و $x_1, x_2 \in H \cap K$، فإذا كان $h_1x_1 = h_2x_2$، فإنّ $h_2^{-1} h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^* \cap (H \cap K) = H^* \cap K \subseteq L$ ، وإذن، $x_1L = x_2L$. وهكذا فإنّ ϕ حسن التعريف، ولأنّ H^* ناظمية في H، فيوجد h_3 في H^* حيث إنّ $x_1h_2 = h_3\, x_1$، إذن:

$$\phi((h_1x_1)(h_2x_2)) = \phi((h_1h_3)(x_1x_2)) = (x_1x_2)L$$
$$= (x_1L)(x_2L) = \phi(h_1x_1)\phi(h_2x_2)$$

إذن، ϕ تشاكل.

من الواضح أنّ ϕ غامرة لـ $(H \cap K) / L$.

أخيرًا، إذا كانت $h \in H^*$ و $x \in H \cap K$، فإنّ $\phi(hx) = xL = L$ ، إذا وفقط إذا كانت $xL = L$، أو إذا وفقط إذا كانت $x \in L$، أو إذا وفقط إذا كانت $hx \in H^*L = H^*(H^* \cap K)(H \cap K^*) = H^*(H \cap K^*)$، إذن، $Ker(\phi) = H^*(H \cap K^*)$. لقد برهنا التمهيدية الآتية:

10.35 تمهيدية (**تمهيدية زاسنهاوس**): لتكن H و K زمرًا جزئية من الزمرة G، ولتكن H^* و K^* زمرًا جزئية ناظمية من H و K، على الترتيب، فإنّ:

1. $H^*(H \cap K^*)$ زمرة جزئية ناظمية في $H^*(H \cap K)$.
2. $K^*(H^* \cap K)$ زمرة جزئية ناظمية في $K^*(H \cap K)$.
3. $$H^*(H \cap K) / H^*(H \cap K^*) \simeq K^*(H \cap K) / K^*(H^* \cap K)$$
$$\simeq (H \cap K)/[(H^* \cap K)(H \cap K^*)]$$

11.35 مبرهنة (**مبرهنة شراير**): لأيّ سلسلتين تحت ناظميتين (ناظميتين) في زمرة G توجد تصفيتان متماثلتان.

البرهان لتكن G زمرة، ولتكن:

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \dots < H_n = G \qquad (1)$$

و

$$\{e\} = K_0 < K_1 < K_2 < \dots < K_m = G \qquad (2)$$

سلسلتين تحت ناظميتين في G. لـ i حيث $0 \le i \le n\text{-}1$ ، كوّن سلسلة الزمر:

$$H_i = H_i(H_{i+1} \cap K_0) \le H_i(H_{i+1} \cap K_1) \le \cdots \le H_i(H_{i+1} \cap K_m) = H_{i+1}.$$

يُدرج هذا $m\text{-}1$ زمرة – ليست بالضرورة مختلفة – بين H_i و H_{i+1}. إذا صنعنا هذا لكل i حيث $0 \le i \le n\text{-}1$، وجعلنا $H_{i,j} = H_i(H_{i+1} \cap K_j)$، فإننا نحصل على سلسلة الزمر:

$$\begin{aligned}\{e\} = H_{0,0} &\le H_{0,1} \le H_{0,2} \le \cdots \le H_{0,m-1} \le H_{1,0}\\ &\le H_{1,1} \le H_{1,2} \le \cdots \le H_{1,m-1} \le H_{2,0}\\ &\le H_{2,1} \le H_{2,2} \le \cdots \le H_{2,m-1} \le H_{3,0}\\ &\le \cdots\\ &\le H_{n-1,1} \le H_{n-1,2} \le \cdots \le H_{n-1,m-1} \le H_{n-1,m}\\ &= G. \end{aligned} \qquad (3)$$

تحوي السلسلة (3) هذه $nm+1$ زمرة – ليست بالضرورة مختلفة، و $H_{i,0}=H_i$ لكل i. بحسب بدهية زاسنهاوس، السلسلة (3) تحت ناظمية، أي إنّ كل زمرة ناظمية في الزمرة التي تليها، هذه السلسلة تصفي السلسلة (1).

بطريقة مماثلة، نضع $K_{j,i}=K_j(K_{j+1}\cap H_i)$، حيث $0\le i\le n$ و$0\le j\le m\text{-}1$، هذا يعطي السلسلة تحت الناظمية:

$$\begin{aligned}\{e\} = K_{0,0} &\le K_{0,1} \le K_{0,2} \le \cdots \le K_{0,n-1} \le K_{1,0}\\ &\le K_{1,1} \le K_{1,2} \le \cdots \le K_{1,n-1} \le K_{2,0}\\ &\le K_{2,1} \le K_{2,2} \le \cdots \le K_{2,n-1} \le K_{3,0}\\ &\le \cdots\\ &\le K_{m-1,1} \le K_{m-1,2} \le \cdots \le K_{m-1,n-1} \le K_{m-1,n}\\ &=G. \qquad \textbf{(4)}\end{aligned}$$

السلسلة (4) تحوي $mn+1$ زمرة – ليست بالضرورة مختلفة – و $K_{j,0}=K_j$ لكل j، وهذه السلسلة تصفي السلسلة (2).

ونحصل بحسب بدهية زاسنهاوس 10.35 على:

$$H_i(H_{i+1}\cap K_{j+1})/H_i(H_{i+1}\cap K_j)\simeq K_j(K_{j+1}\cap H_{i+1})/K_j(K_{j+1}\cap H_i),$$

أو

$$H_{i,j+1}/H_{i,j}\simeq K_{j,i+1}/K_{j,i} \qquad \textbf{(5)}$$

حيث $0\le i\le n-1$ و $0\le j\le m\text{-}1$. التماثلات في العلاقة (5) تعطي تقابلا لتماثل زمر العامل بين السلسلة تحت الناظمية (3) و(4). ولتبيين هذا التقابل، لاحظ أنّ $H_{i,0}=H_i$ و $H_{i,m}=H_{i+1}$، بينما $K_{j,0}=K_j$ و $K_{j,n}=K_{j+1}$، حيث تحوي كل سلسلة في (3) و(4) مصفوفة مستطيلة من mn رمزًا $\le$. وكل $\le$ تعطي زمرة عامل، إضافة إلى أنّ زمر العامل التي تظهر من الصف r لـ $\le$ في السلسلة (3) ترتبط بزمر العامل التي تظهر في العمود r لـ $\le$ في السلسلة (4)، وبحذف الزمر المكررة من السلسلتين (3) و(4)، نحصل على سلسلتين تحت ناظميتين من الزمر المختلفة، التي تكون تصفيتين متماثلتين للسلسلتين (1) و (2). وهذا يثبت المبرهنة للسلاسل تحت الناظمية.

للسلاسل الناظمية، حيث ألـ H_i و K_j جميعها ناظمية في G، نلاحظ فقط أنّ الزمر $H_{i,j}$ و $K_{j,i}$ المكوّنة في الأعلى كلها تكون ناظمية كذلك في G، وهكذا ينطبق البرهان نفسه. ناظمية $H_{i,j}$ و$K_{j,i}$ هذه تنتج مباشرة من الجزء الثاني في البدهية 4.34، ومن حقيقة أنّ تقاطع الزمر الجزئية الناظمية في الزمرة يعطي زمرًا جزئية ناظمية. ♦

مبرهنة جوردان – هولدر (*Jordan- Hölder Theorem*)

نأتي الآن إلى اللب الحقيقي للمبرهنة.

12.35 تعريف تكون السلسلة تحت الناظمية $\{H_i\}$ في الزمرة G سلسلة تركيب **(Composition Series)** إذا كانت زمر العامل H_{i+1}/H_i كلها بسيطة، وتكون السلسلة الناظمية $\{H_i\}$ في G سلسلة رئيسة **(principal or Chief series)** إذا كانت زمر العامل H_{i+1}/H_i كلها بسيطة. ■

لاحظ أنه في الزمر الإبدالية ينطبق مفهوما سلسلة التركيب والسلسلة الرئيسة. وكذلك فلأنّ كل سلسلة ناظمية هي كذلك سلسلة تحت ناظمية، فإنّ أيّ سلسلة رئيسة هي كذلك سلسلة تركيب لأي زمرة، إبدالية أم لا.

13.35 مثال إن $\mathbb{Z}$ لا تحوي سلاسل تركيب (وكذلك لا تحوي سلاسل رئيسة)؛ لأنه إذا كانت

$$\{0\} = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = \mathbb{Z}$$

سلسلة تحت ناظمية، فيجب أن تكون H_1 على الصورة $r\mathbb{Z}$، حيث $r \in \mathbb{Z}^+$، ولكن عندها H_1 / H_0 تماثل $r\mathbb{Z}$، وهي دورية غير منتهية وتحوي الكثير من الزمر الجزئية الناظمية الفعلية غير التافهة، على سبيل المثال: $2r\mathbb{Z}$؛ إذن، لا تحوي $\mathbb{Z}$ سلاسل تركيب (وكذلك لا تحوي سلاسل رئيسة). ▲

14.35 مثال السلسلة

$$\{e\} < A_n < S_n$$

حيث $n \geq 5$ سلسلة تركيب (وكذلك سلسلة رئيسة) في S_n؛ لأن $A_n/\{e\}$ تماثل A_n، وهي بسيطة لكل $n \geq 5$، و S_n / A_n تماثل $\mathbb{Z}_2$، وهي بسيطة. وبالمثل، السلسلتان في المثال 7.35 سلسلتا تركيب (وكذلك سلسلتان رئيستان) في $\mathbb{Z}_{15}$، إنهما متماثلتان، كما أثبت في ذلك المثال. هذا يوضح نظريتنا الرئيسة، التي سينُصّ عليها قريبًا. ▲

لاحظ أنه بحسب المبرهنة 8.15، H_{i+1} / H_i بسيطة، إذا وفقط إذا كانت H_i زمرة جزئية ناظمية أعظمية في H_{i+1}؛ إذن، يجب أن تكون كل H_i في سلسلة التركيب زمرة جزئية ناظمية أعظمية في H_{i+1}. لبناء سلسلة تركيب لزمرة G، نصطاد فقط زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-1} في G، ثم زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-2} في H_{n-1}، وهكذا، إذا توقفت هذه العملية بعدد منتهٍ من الخطوات، فنكون قد حصلنا على سلسلة تركيب.

لاحظ أنه بحسب المبرهنة 18.15، لا يمكن أن يكون هناك تصفية أبعد من ذلك لسلسلة تركيب. لبناء سلسلة رئيسة، يجب علينا أن نصطاد زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-1} في G، ثمّ زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-2} في H_{n-1} وهي كذلك ناظمية في G، وهكذا. المبرهنة الرئيسة كما يأتي:

15.35 مبرهنة (مبرهنة جوردان – هولدر): أيّ سلسلتي تركيب (رئيستين) في زمرة G متماثلتان.

البرهان لتكن $\{H_i\}$ و$\{K_i\}$ سلسلتي تركيب (رئيستين) في G، فبحسب المبرهنة 11.35، فإنّ لهما تصفيتين متماثلتين؛ ولكن، لأن زمر العامل فيها كلها بسيطة، فتثبت المبرهنة 18.15 عدم وجود أيّ تصفية أبعد من ذلك؛ إذن، يجب أن تكون $\{H_i\}$ و $\{K_i\}$ متماثلتين. ♦

في الزمر المنتهية، يمكننا أن نعُدّ سلسلة التركيب نوعًا من تحليل الزمرة إلى زمر عامل بسيطة، ومماثلاً لتحليل العدد الصحيح الموجب إلى عوامل أولية، وفي كلتا الحالتين، التحليل وحيد، تبعًا لترتيب العوامل.

نبذة تاريخية

كان الظهور الأول لما بات يعرف بمبرهنة جوردان– هولدر عام 1869م، بوصفه تعليقًا على عمل جالوا من خلال عالم الجبر الفرنسي المتألق كامايل جوردان (1922– 1938) (Camille Jordan)، فقد كان السياق الذي ظهرت به في دراسة زمر التباديل المرتبطة بجذور معادلات كثيرات الحدود، حيث أثبت جوردان أنه على الرغم من أنّ متتالية الزمر الجزئية الناظمية G، I، J، ... لزمرة المعادلة ليست بالضرورة وحيدة، ومع ذلك، فإنّ متتالية مؤشرات سلسلة التركيب هذه وحيدة، وقد أعطى جوردان برهانًا في عمله العظيم عام 1870م أطروحة في التعويض والمعادلات الجبرية (Treatiseon Substitutions and Algebraic Equations). هذا العمل الأخير – ظل مع ذلك محددًا لما أصبح يطلق عليه الآن زمر التباديل – بقي الموضوع القياسي لمبرهنة الزمر سنوات عدة.

كان الجزء الخاص بهولدر في المبرهنة، أنّ متتالية زمر العامل في سلسلة التركيب وحيدة تبعًا للترتيب، وكان من عمل أوتو هولدر (Otto Holer 1859 – 1937)، الذي أدى دورًا مهمًّا جدًّا في تطور مبرهنة الزمر بعد أن أعطي التعريف المجرد الكامل للزمرة، ومن بين مشاركاته الأخرى، أنه أعطى أول تعريف مجرد "لزمرة العامل"، وحدّد بنية الزمر المنتهية جميعها ذات الرتبة غير المقسومة بمربع كامل.

16.35 مبرهنة إذا كان لـ G سلسلة تركيب (رئيسة)، وإذا كانت N زمرة جزئية ناظمية فعلية في G، فيوجد سلسلة تركيب (رئيسة) تحوي N.

البرهان السلسلة تحت ناظمية $\{e\} < N < G$ وكذلك هي سلسلة ناظمية؛ ولأن G تحوي سلسلة تركيب $\{H_i\}$، فإنه وبحسب المبرهنة 11.35 يوجد تصفية لـ لسلسلة تحت ناظمية تماثل تصفية $\{H_i\}$، أمّا بوصفها سلسلة تركيب، فلا يوجد لـ $\{H_i\}$ تصفية أبعد من ذلك. إذن، يمكن تصفية $\{e\} < N < G$ إلى سلسلة تحت ناظمية، حيث إنّ زمر العامل فيها كلها بسيطة – أي سلسلة تركيب– ، وتتحقق مناقشة شبيهة إذا بدأنا بسلسلة رئيسة $\{K_j\}$ في G ♦

17.35 مثال سلسلة تركيب (وكذلك رئيسة) في $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ وتحوي $\langle(0,1)\rangle$، هي:

$$\{(0,0)\} < \langle(0,3)\rangle < \langle(0,1)\rangle < \langle 2\rangle \times \langle 1\rangle < \langle 1\rangle \times \langle 1\rangle = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9.$$

التعريف الآتي أساسي في تشخيص معادلات كثيرات الحدود التي يمكن التعبير عن حلولها باستخلاص الجذور.

18.35 تعريف تسمى الزمرة G **قابلة للحل (Solvable)**، إذا كانت تحوي سلسلة تركيب $\{H_i\}$، حيث إنّ زمر العامل H_{i+1} / H_i كلها إبدالية. ■

وبحسب مبرهنة جوردان – هولدر، نرى أنه في زمرة قابلة للحل، كل سلسلة تركيب $\{H_i\}$، يجب أن تكون زمر العامل H_{i+1} / H_i إبدالية.

19.35 مثال الزمرة S_3 قابلة للحل؛ لأن سلسلة التركيب

$$\{e\} < A_3 < S_3$$

لها زمر عامل تماثل $\mathbb{Z}_3$ و$\mathbb{Z}_2$، التي هي إبدالية. والزمرة S_5 ليست قابلة للحل؛ لأن A_5 بسيطة، والسلسلة

$$\{e\} < A_5 < S_5$$

سلسلة تركيب، و $A_5/\{e\}$ تماثل A_5، وهي ليست إبدالية. يمكن إثبات أنّ A_5 ذات الرتبة 60 هي أصغر زمرة غير قابلة للحل، وهذه الفكرة مرتبطة بصورة قريبة من حقيقة أنّ معادلة كثيرة حدود من الدرجة 5، ليست بوجه عام قابلة للحل باستخلاص الجذور، بخلاف معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجة ≤ 4. ▲

السلسلة المركزية المتصاعدة

سنذكر سلسلة تحت ناظمية لزمرة G يمكن تكوينها باستخدام مراكز الزمر. ذكر الفصل 15 أنّ $Z(G)$ مركز الزمرة G معرف بـ

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ لكل } g \in G\},$$

وأنّ $Z(G)$ زمرة جزئية ناظمية في G، فإذا كان لدينا جدول زمرة منتهية، فمن السهل إيجاد المركز، وسيكون العنصر a في مركز G، إذا وفقط إذا كانت العناصر في الصف المقابل لـ a الواقعة أقصى اليسار، معطاة بترتيب العناصر نفسه في العمود أسفل a الواقعة في أعلى الجدول.

الآن، لتكن G زمرة، وليكن $Z(G)$ مركز G، ولأنّ $Z(G)$ ناظمية في G، فيمكننا صنع زمرة العامل $G/Z(G)$، وأن نجد المركز $Z(G/Z(G))$ لزمرة العامل هذه، ولأنّ $Z(G/Z(G))$ ناظمية في $G/Z(G)$، وإذا كانت $\gamma : G \to G/Z(G)$ الدالة القانونية، فتكون $\gamma^{-1}[Z(G/Z(G))]$ بحسب المبرهنة 15.16، زمرة جزئية ناظمية $Z_1(G)$ في G، وهكذا يمكننا صنع زمرة العامل $G/Z_1(G)$ ونجد مركزها، خذ $(\gamma)^{-1}$ لها لتحصل على $Z_2(G)$، وهكذا.

20.35 مثال تسمى السلسلة

$$\{e\} \leq Z(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \cdots$$

الموصوفة في المناقشة السابقة **سلسلة مركزية متصاعدة للزمرة** G

(Ascending Central Series Of The Group G). ■

21.35 مثال مركز S_3 هو مجرد العنصر المحايد $\{\rho_0\}$. إذن، السلسلة المركزية المتصاعدة لـ S_3 هي:

$$\{\rho_0\} \leq \{\rho_0\} \leq \{\rho_0\} \leq \cdots$$

مركز الزمرة D_4 لتماثلات المربع في المثال 10.8 هو $\{\rho_0, \rho_2\}$. (هل تذكر أننا قلنا: إنّ هذه الزمرة ستعطينا أمثلة جميلة على أشياء كثيرة ناقشناها؟)؛ لأن $D_4/\{\rho_0, \rho_2\}$ من الرتبة 4 فهي إبدالية، ومركزها هو كل $D_4/\{\rho_0, \rho_2\}$. إذن، السلسلة المركزية المتصاعدة لـ D_4 هي:

$$\{\rho_0\} \leq \{\rho_0,\rho_2\} \leq D_4 \leq D_4 \leq D_4 \leq \cdots$$ ▲

تمارين 35

حسابات

في التمارين 1 إلى 5، أعطِ تصفيتين متماثلتين للسلسلتين.

1. $\{0\} < 10\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ و $\{0\} < 25\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

2. $\{0\} < 60\mathbb{Z} < 20\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ و $\{0\} < 245\mathbb{Z} < 49\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

3. $\{0\} < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$ و $\{0\} < \langle 8 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$

4. $\{0\} < \langle 18 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{72}$ و $\{0\} < \langle 24 \rangle < \langle 12 \rangle < \mathbb{Z}_{72}$

5. $\{(0,0)\} < (60\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (10\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $\{(0,0)\} < \mathbb{Z} \times (80\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (20\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

6. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_{60}$ وبرهن على أنها متماثلة.

7. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_{48}$ وبرهن على أنها متماثلة.

8. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

9. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

10. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$.

11. أوجد مركز $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.

12. أوجد مركز $S_3 \times D_4$.

13. أوجد السلسلة المركزية المتصاعدة لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.

14. أوجد السلسلة المركزية المتصاعدة لـ $S_3 \times D_4$.

مفاهيم

في التمرينين 15 و16، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

15. سلسلة التركيب لزمرة G هي متتالية منتهية

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$$

من الزمر الجزئية من G، حيث إنّ H_i زمرة جزئية ناظمية أعظمية في H_{i+1}، حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

16. الزمرة القابلة للحلّ هي تلك التي لها سلسلة تركيب من الزمر الإبدالية.

17. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل سلسلة ناظمية هي كذلك تحت ناظمية.

________ ب. كل سلسلة تحت ناظمية هي كذلك ناظمية.

________ جـ. كل سلسلة رئيسة هي كذلك سلسلة تركيب.

________ د. كل سلسلة تركيب هي كذلك سلسلة رئيسة.

________ هـ. كل زمرة إبدالية لها بالضبط سلسلة تركيب واحدة.

________ و. كل زمرة منتهية لها سلسلة تركيب.

________ ز. الزمرة قابلة للحلّ، إذا وفقط إذا كان لها سلسلة تركيب مع زمر عامل بسيطة.

________ ح. S_7 زمرة قابلة للحلّ.

________ ط. يوجد بعض التشابه بين مبرهنة جوردان – هولدر والمبرهنة الأساسية في الحساب، التي تنصّ على أنّ كل عدد صحيح موجب أكبر من 1، يمكن تحليله إلى حاصل ضرب أعداد أولية وحيدة تبعًا للترتيب.

________ ي. كل زمرة منتهية رتبتها عدد أولي قابلة للحلّ.

18. أوجد سلسلة تركيب لـ $S_3 \times S_3$. هل $S_3 \times S_3$ قابلة للحلّ؟

19. هل الزمرة D_4 لتماثلات المربع في المثال 10.8 قابلة للحلّ؟

20. لتكن G هي $\mathbb{Z}_{36}$. ارجع إلى إثبات المبرهنة 11.35 ولتكن السلسلة تحت الناظمية (1) هي:

$$\{0\} < \langle 12 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{36}$$

ولتكن السلسلة تحت الناظمية (2) هي:

$$\{0\} < \langle 18 \rangle < \mathbb{Z}_{36}$$

أوجد السلسلتين (3) و(4)، واعرض زمر العامل المتماثلة كما وصف في الإثبات. اكتب السلسلتين (3) و(4) كالمصفوفة المستطيلة المعروضة في الكتاب.

21. أعد التمرين 20 للزمرة $\mathbb{Z}_{24}$ مع السلسلة تحت الناظمية (1)

$$\{0\} < \langle 12 \rangle < \langle 4 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$$

ولتكن السلسلة (2)

$$\{0\} < \langle 6 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{24}.$$

براهين

22. لتكن H^*، H، وK زمرًا جزئية من G، بحيث إنّ H^* ناظمية في H. أثبت أنّ $H^* \cap K$ ناظمية في $H \cap K$.

23. أثبت أنه إذا كانت

$$H_0 = \{e\} < H_1 < H_2 < \cdots < H_n = G$$

سلسلة تحت ناظمية (ناظمية) للزمرة G، وإذا كانت H_{i+1}/H_i من رتبة منتهية s_{i+1}، فإنّ G من رتبة منتهية $s_1 s_2 \ldots s_n$.

24. أثبت أنه لا يمكن لزمرة إبدالية غير منتهية أن تحوي سلسلة تركيب. [مساعدة: استخدم التمرين 23 مع حقيقة أنّ أيّ زمرة إبدالية غير منتهية يجب أن تحوي زمرة جزئية ناظمية فعلية].

25. أثبت أنّ الضرب المباشر المنتهي لزمر قابلة للحلّ يكون قابلًا للحل.

26. أثبت أنّ الزمرة الجزئية K من زمرة G قابلة للحلّ تكون قابلة للحل كذلك. [مساعدة: لتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \cdots < H_n = G$ سلسلة تركيب في G. أثبت أنّ الزمر المختلفة بين $K \cap H_i$ ، حيث $i= 0, ..., n$ تشكل سلسلة تركيب لـ K. لاحظ أنّ:

$$(K \cap H_i) / (K \cap H_{i-1}) \simeq [H_{i-1}(K \cap H_i)] / [H_{i-1}]$$

بحسب المبرهنة 5.34، حيث $H= K \cap H_i$ و$N= H_{i-1}$ ، وأنّ $[H_{i-1}(K \cap H_i) \leq H_i]$.[

27. لتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \cdots < H_n = G$ سلسلة تركيب في الزمرة G. لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G، وافترض أنّ N زمرة بسيطة. أثبت أنّ الزمر المختلفة بين H_0، $H_i N$، حيث $i= 0, ..., n$ تشكل كذلك سلسلة تركيب لـ G. [مساعدة: $H_i N$ زمرة بحسب التمهيدية 4.34. أثبت أنّ $H_{i-1} N$ ناظمية في $H_i N$. بحسب المبرهنة 5.34

$$(H_i N) / (H_{i-1} N) \simeq H_i / [H_i \cap (H_{i-1} N)]$$

الزمرة الأخيرة تماثل

$$[H_i / H_{i-1}] / [(H_i \cap (H_{i-1} N)) / H_{i-1}]$$

بحسب المبرهنة 7.34. ولكن H_i / H_{i-1} بسيطة].

28. لتكن G زمرة، ولتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \cdots < H_n = G$ سلسلة تركيب لـ G. لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G، ولتكن $\gamma : G \to G/N$ الدالة القانونية. أثبت أنّ الزمر المختلفة بين $\gamma\ [H_i]$، حيث $i= 0,..,n$ تشكل سلسلة تركيب في G/ N. [مساعدة: لاحظ أنّ الدالة

$$\psi: H_i N \to \gamma[H_i] / \gamma[H_{i-1}]$$

المعرفة بـ

$$\psi(h_i n) = \gamma(h_i n)\ \gamma[H_{i-1}]$$

تشاكل نواته $H_{i-1} N$. بحسب المبرهنة 2.34

$$\gamma[H_i] / \gamma[H_{i-1}] \simeq (H_i N) / (H_{i-1} N)$$

أكمل من خلال المبرهنة 5.34، كما هو موضح في المساعدة للتمرين 27].

29. أثبت أنّ صورة التشاكل لزمرة قابلة للحلّ تكون قابلة للحلّ. [مساعدة: طبّق التمرين 28 لتحصل على سلسلة تركيب لصورة التشاكل. المساعدات للتمرينين 27 و28 ترينا كيف تبدو صور زمر العامل في سلسلة التركيب].

الفصل 36 مبرهنات سيلو Sylow Theorems

تعطينا المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (المبرهنة 12.11) معلومات كاملة عن الزمر الإبدالية المنتهية جميعها، حيث إنّ دراسة الزمر المنتهية غير الإبدالية معقدة أكثر، وتعطينا مبرهنات سيلو بعض المعلومات المهمة عنها.

نعلم أنّ رتبة الزمرة الجزئية لزمرة منتهية G يجب أن تقسم $|G|$، فإذا كانت G إبدالية، فتوجد زمرة جزئية من كل رتبة تقسم $|G|$، وقد أثبتنا في المثال 6.15 أنّ A_4– ذات الرتبة 12 – لا تحوي زمرة جزئية من الرتبة 6. إذن، الزمر غير الإبدالية G من الممكن ألا تحوي زمرًا جزئية من إحدى الرتب d التي تقسم $|G|$؛ "ومعكوس مبرهنة لاجرانج" لا يتحقق، وتعطينا مبرهنات سيلو معكوسًا ضعيفًا. تحديدًا، إنها تثبت أنه إذا كانت d قوة لعدد أولي وd تقسم $|G|$، فإنّ G تحوي زمرة جزئية من الرتبة d. (لاحظ أنّ 6 ليست قوة لعدد أولي)، وتعطي مبرهنات سيلو كذلك معلومات تتعلق بعدد مثل هذه الزمر الجزئية وعلاقتها مع بعضها، وسنرى أنّ هذه المبرهنات مفيدة جدًا في دراسة الزمر المنتهية غير الإبدالية.

تعطي براهين مبرهنات سيلو تطبيقًا آخر على تأثير الزمرة في مجموعة، الموصوف في الفصل 16. في هذه المرة، المجموعة نفسها مصنوعة من الزمرة؛ في بعض الأحيان المجموعة هي الزمرة نفسها، وهي – أحيانًا – مجموعة المجموعات المشاركة لزمرة جزئية، وفي أحيان أخرى هي مجموعة زمر جزئية.

الزمر – p

أعطى الفصل 17 تطبيقًا على صيغة بيرنسايد، التي تحصي عدد المدارات في مجموعة –G منتهية، حيث تنبع معظم نتائج هذا الفصل من معادلة تحسب عدد العناصر في مجموعة –G منتهية.

لتكن X مجموعة –G منتهية. تذكّر أنه إذا كان $x \in X$، فإن مدار x في X بالنسبة إلى G، هو: $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. افترض وجود r من المدارات في X بالنسبة إلى G، ولتكن $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ تحوي عنصرًا من كل مدار في X. كل عنصر الآن في X هو بالتحديد في مدار واحد. إذن:

$$|X| = \sum_{i=1}^{r} |Gx_i| \tag{1}$$

يمكن أن تكون هناك مدارات بعنصر واحد فقط في X. لتكن $X_G = \{x \in X \mid gx = x$ لكل $g \in G\}$. إذن، X_G هي بالضبط اتحاد المدارات ذات العنصر الواحد في X. لنفترض وجود s من المدارات ذات العنصر الواحد، حيث $0 \leq s \leq r$. إذن، $|X_G| = s$، وبإعادة ترتيب الـ x_i – إذا كان ذلك ضروريًا -. فإنه يمكننا كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=s+1}^{r} |Gx_i|. \tag{2}$$

نحصل على معظم نتائج هذا الفصل من المعادلة (2). سنعرض مبرهنة سيلو كما في (Hungerford [10])، حيث ينسب الفضل إلى (R. J. Nunke) في خطوات البرهان، وينسب الفضل في إثبات المبرهنة 3.36 (مبرهنة كوشي) إلى (J. H. Mckay).

المبرهنة 1.36 الآتية ليست مبرهنة عدّ بالضبط، ولكن لها استنتاج عددي، فهي تعدّ مقياس p، حيث تبدو المبرهنة قوية بصورة مذهلة، وفي بقية هذه الوحدة، إذا اخترنا المجموعة الصحيحة، وتأثير الزمرة الصحيح فيها، وطبّقنا المبرهنة 1.36 ، فإنّ ما نريده يقع تمامًا في يدنا! مقارنة بالبراهين الأقدم، فإنّ المناقشة جميلة جدًا ورائعة.

خلال هذا الفصل، سيكون p دائمًا عددًا صحيحًا أوليًّا.

1.36 مبرهنة لتكن G زمرة من الرتبة p^n ، ولتكن X مجموعة $G-$ منتهية، فإنّ $|X| \equiv |X_G|$ (مقياس p).

البرهان باستخدام مصطلحات المعادلة (2)، نعلم أنّ $|Gx_i|$ تقسم $|G|$ بحسب المبرهنة 16.16 ، وعليه، فإنّ p تقسم $|Gx_i|$، حيث $s+1 \leq i \leq r$، وهكذا، فإنّ المعادلة (2) تثبت أنّ p تقسم $|X| - |X_G|$، إذن، $|X| \equiv |X_G|$ (مقياس p). ♦

2.36 تعريف ليكن p عددًا أوليًّا. تسمى الزمرة G **زمرة $p-$ (p- group)** إذا كان كل عنصر في G ذا رتبة قوّة للعدد الأولي p. والزمرة الجزئية في G هي **زمرة جزئية $p-$** من G إذا كانت الزمرة الجزئية هي نفسها زمرة $p-$ ■

إنّ هدفنا في هذا الفصل إثبات أنّ الزمرة المنتهية G تحوي زمرة جزئية من رتبة تساوي كل قوة لعدد أولي يقسم $|G|$. ستثبت مبرهنة كوشي بوصفها خطوة أولى، التي تقول: إنه إذا كان p يقسم $|G|$، فإنّ G تحوي زمرة جزئية من الرتبة p.

3.36 مبرهنة (**مبرهنة كوشي** Cauchy's Theorem) ليكن p عددًا أوليًّا. لتكن G زمرة منتهية، وليكن p يقسم $|G|$، فإنّ G تحوي عنصرًا من الرتبة p، وعليه، زمرة جزئية من الرتبة p.

البرهان نكوّن المجموعة X من المتعددات $p-$ $(g_1, g_2, ..., g_P)$ كلها من عناصر G التي تتمتع بخاصية أنّ حاصل ضرب الإحداثيات في G يساوي e، أي إنّ:

$$X = \{(g_1, g_2, \cdots, g_p) \mid g_i \in G \text{ و } g_1 g_2 \cdots g_p = e\}.$$

ندّعي أنّ p تقسم $|X|$. عند تكوين المتعددات $p-$ في X، فيمكننا أن ندع $g_1, g_2, .., g_{n-1}$ لتكون أيّ عناصر في G، و g_p تحدد بصورة وحيدة بوصفها $(g_1g_2...g_{p-1})^{-1}$. إذن، $|X| = |G|^{p-1}$ ، ولأنّ p تقسم $|G|$، فنرى أنّ p تقسم $|X|$.

لتكن σ الحلقة $(1,2,3,..,p)$ في S_p. سندع σ تؤثر في X كالآتي:

$$\sigma(g_1, g_2, \cdots, g_p) = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \cdots, g_{\sigma(p)}) = (g_2, g_3, \cdots, g_p, g_1)$$

لاحظ أنّ $(g_2, g_3, \cdots, g_p, g_1) \in X$؛ لأن $g_1(g_2 g_3 \cdots g_p) = e$ يؤدي إلى أن $g_1 = (g_2 g_3 \cdots g_p)^{-1}$، وهكذا، فإنّ $(g_2 g_3 \cdots g_p)g_1 = e$ كذلك. إذن، σ تؤثر في X، وسنعدّ تأثير الزمرة الجزئية $\langle\sigma\rangle$ في S_p على X بالتكرار بطريقة طبيعية.

الآن، $p = |\langle\sigma\rangle|$، وهكذا، فبإمكاننا تطبيق المبرهنة 1.36، حيث نعلم أنّ $|X| \equiv |X_{\langle\sigma\rangle}|$ (مقياس p)، ولأنّ p تقسم $|X|$، فإنّ p تقسم $|X_{\langle\sigma\rangle}|$ كذلك، لنختبر $X_{\langle\sigma\rangle}$، يُترك –الآن– $(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ ثابتًا بـ σ، وإذن، بكل $\langle\sigma\rangle$، إذا وفقط إذا كان $g_1 = g_2 = \ldots = g_p$، حيث نعرف على الأقل عنصرًا واحدًا في $X_{\langle\sigma\rangle}$، $(e, e, \ldots, e)$، ولأنّ p تقسم $|X_{\langle\sigma\rangle}|$، فيجب أن يكون هناك p عنصر على الأقل في $X_{\langle\sigma\rangle}$ إذن، يوجد عنصر $a \in G$، $a \neq e$، حيث إنّ $(a, a, \cdots, a) \in X_{\langle\sigma\rangle}$، وهكذا $a^p = e$، وإذن، رتبة a تساوي p، وبالطبع، $\langle a\rangle$ زمرة جزئية من G من الرتبة p. ♦

4.36 نتيجة لتكن G زمرة منتهية. تكون G زمرة $p-$ ، إذا وفقط إذا كان $|G|$ قوة لـ p.

البرهان سنترك برهان هذه النتيجة للتمرين 14. ♦

مبرهنات سيلو

لتكن G زمرة، ولتكن $\mathscr{S}$ مجموعة الزمر الجزئية في G جميعها. سنجعل $\mathscr{S}$ مجموعة $- G$ بجعل G تؤثر في $\mathscr{S}$ بالترافق، أي إنه إذا كانت $H \in \mathscr{S}$ – أي $H \leq G$ – و $g \in G$، فإنّ g تؤثر في H، ما يعطي الزمرة الجزئية المرافقة $g\,H\,g^{-1}$. (لتجنب الإرباك، لن نكتب هذا التأثير أبدًا على الصورة gh)، من السهل الآن رؤية أنّ $G_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ زمرة جزئية من G (التمرين 11)، و H زمرة جزئية ناظمية في G_H ، ولأنّ G_H تتألف من عناصر G جميعها التي تترك H ثابتة تحت تأثير المرافقة، فإنّ G_H أكبر زمرة جزئية في G تحوي H بوصفها زمرة جزئية ناظمية.

5.36 تعريف

الزمرة الجزئية G_H التي نوقشت توًّا هي **منظّم H في G (normalizer)**، وسيرمز لها بالرمز $N[H]$ من الآن فصاعدًا. ■

في إثبات التمهيدية الآتية، سنستخدم حقيقة أنه إذا كانت H زمرة جزئية منتهية في الزمرة G، فإنّ $g \in N[H]$ إذا كان $ghg^{-1} \in H$ لكل $h \in H$، ولرؤية هذا، لاحظ أنه إذا كان $gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1}$ ، فإنّ $h_1 = h_2$ بخاصية الحذف في الزمرة G. إذن، دالة الترافق $i_g : H \to H$ المعطاة بـ $i_g(h) = ghg^{-1}$ دالة أحادية؛ ولأن $|H|$ منتهية، فإنّ i_g دالة غامرة من H إلى H، أي إنّ $gHg^{-1} = H$ و $g \in N[H]$.

6.36 تمهيدية

لتكن H زمرة p-جزئية من الزمرة المنتهية G، فإنّ:

$$(N[H] : H) \equiv (G : H) \quad (\text{مقياس } p).$$

نبذة تاريخية

تنسب مبرهنات سيلو إلى الرياضي النرويجي (Peter Ludvig Mejdell Sylow) (1832 – 1918)، الذي نشرها في بحث مختصر عام 1872 م، فقد نصّ سيلو على هذه المبرهنات مستخدمًا زمر التباديل (لأن التعريف المجرد للزمر المجردة لم يكن قد أُعطي بعد)، وقد أعاد جورج فروبينس إثبات هذه المبرهنات للزمر المجردة عام 1887 م، على الرغم من ملاحظته أنّ كل زمرة هي في الحقيقة زمرة تباديل (مبرهنة كيلي [المبرهنة 16.8]، وقد طبّق سيلو نفسه مباشرة المبرهنات على مسألة حل المعادلات الجبرية، وبرهن على أنّ أيّ معادلة ذات زمرة جالوا من رتبة تساوي قوة لعدد أولي p، يمكن حلها باستخلاص الجذور.

أمضى سيلو معظم حياته المهنية بوصفه معلمًا في مدرسة عليا في هالدن في النرويج، ولم يعيّن في موقع في جامعة كريستينا إلا عام 1898م، حيث كرّس ثماني سنوات من عمره لمشروع تحرير أعمال ابن بلده (Niels Henrik Able) الرياضية.

البرهان لتكن $\mathscr{L}$ مجموعة مجموعات المشاركة اليسرى لـ H في G، ولندع H تؤثر في $\mathscr{L}$ بالإزاحة من اليسار، بحيث $h(xH) = (hx)H$. إذن، تصبح $\mathscr{L}$ مجموعة-H. لاحظ أنّ $|\mathscr{L}| = (G:H)$

لنحدد $\mathscr{L}_H$، أي مجموعات المشاركة اليسرى التي تترك ثابتة تحت تأثير عناصر H جميعها. الآن، $xH = h(xH)$ إذا وفقط إذا كان $H = x^{-1}h(xH) \in$، أو إذا وفقط إذا كان $H = x^{-1}hxH$. إذن، $xH = h(xH)$ لكل $h \in H$، إذا وفقط إذا كان $x^{-1}hx = x^{-1}h(x^{-1})^{-1} \in H$ لكل $h \in H$، أو إذا وفقط إذا كان $x^{-1} \in N[H]$ (انظر إلى التعليق السابق للتمهيدية)، أو إذا وفقط إذا كان $x \in N[H]$. إذن، مجموعات المشاركة اليسرى في $\mathscr{L}_H$ هي تلك المحتواة في $N[H]$، وعدد هذه المجموعات المشاركة هو $(N[H]:H)$، وهكذا، فإنّ $|\mathscr{L}_H| = (N[H]:H)$.

لأنّ H زمرة-p، فإنّ رتبتها قوة لـ p بحسب النتيجة 4.36، وتخبرنا المبرهنة 1.36 الآن بأنّ

$|\mathscr{L}_H| \equiv |\mathscr{L}|$ (مقياس p)، أي أنّ $(N[H]:H) \equiv (G:H)$ (مقياس p). ♦

7.36 نتيجة لتكن H زمرة-p جزئية من الزمرة المنتهية G، فإذا كان p يقسم $(G:H)$، فإنّ $N[H] \neq H$.

البرهان ينتج عن التمهيدية 6.36 أنّ p تقسم $(N[H]:H)$، التي يجب ألا تساوي 1. إذن، $H \neq N[H]$. ♦

إننا مستعدون الآن لأولى مبرهنات سيلو، التي تؤكد وجود زمرة جزئية في G من رتبة تساوي قوة عدد أولى لأيّ قوة عدد أولى تقسم $|G|$.

8.36 مبرهنة (**مبرهنة سيلو الأولى**) لتكن G زمرة منتهية، وليكن $|G| = p^n m$، حيث $n \geq 1$ و p لا تقسم m، فإنّ

1. تحوي G زمرة جزئية من الرتبة p^i لكل $1 \leq i \leq n$.
2. تكون كل زمرة جزئية H في G من الرتبة p^i، زمرة جزئية ناظمية في زمرة جزئية من الرتبة p^{i+1}، حيث $1 \leq i < n$.

البرهان 1. نعلم من مبرهنة كوشي أنّ G تحوي زمرة جزئية من الرتبة p. (المبرهنة 3.36). سنستخدم الاستقراء الرياضي في إثبات أنّ وجود زمرة جزئية من الرتبة p^i ، حيث $i < n$ يؤدي إلى وجود زمرة جزئية من الرتبة p^{i+1}. لتكن H زمرة جزئية من الرتبة p^i ولأنّ $i < n$، فنرى أنّ p تقسم $(G: H)$، ونعلم من التمهيدية 6.36 أنّ p تقسم $(N[H]:H)$: لأنّ H زمرة جزئية ناظمية في $N[H]$، فيمكننا صنع $N[H]/H$، ونرى أنّ p تقسم $|N[H]/H|$، ويحسب مبرهنة كوشي، يوجد لزمرة العامل $N[H]/H$ زمرة جزئية K من الرتبة p، إذا كان $\gamma:N[H]\to N[H]/H$ التشاكل القانوني، فإنّ $\gamma^{-1}[K]=\{x\in N[H] \mid \gamma(x)\in K\}$ زمرة جزئية من $N[H]$ ومن ثم من G، هذه الزمرة الجزئية تحوي H ومن الرتبة p^{i+1}.

2. نعيد البناء في الجزء 1، ونلاحظ أنّ $H < \gamma^{-1}[K] \leq N[H]$، حيث $|\gamma^{-1}[K]| = p^{i+1}$، ولأنّ H ناظمية في $N[H]$، فإنها بالطبع ناظمية في الزمرة التي ربما تكون أصغر. $\gamma^{-1}[K]$ ♦

9.36 تعريف **زمر سيلو الجزئية -p (Sylow p- Subgroup)** في الزمرة G، هي زمرة جزئية -p أعظمية في G، أي إنها زمرة جزئية - p ، وغير محتواة في زمرة جزئية - p أكبر منها. ■

لتكن G زمرة منتهية، حيث $|G| = p^n m$ كما في المبرهنة 8.36. تثبت المبرهنة أنّ زمر سيلو الجزئية -p في G هي بالضبط تلك الزمر الجزئية من الرتبة p^n، فإذا كانت P زمرة سيلو الجزئية -p، فإنّ كل مرافقة gPg^{-1} لـ P هي كذلك زمرة سيلو جزئية -p وتنصّ مبرهنة سيلو الثانية على أنه يمكن الحصول على زمر سيلو الجزئية -p جميعها من P بهذه الطريقة، أي إنّ أيّ زمرتي سيلو جزئيتين -p تكونان مترافقتين.

10.36 مبرهنة **(مبرهنة سيلو الثانية)** لتكن P_1 وP_2 زمرتي سيلو جزئيتين -p في زمرة منتهية G، فإنّ P_1 وP_2 زمرتان جزئيتان مترافقتان في G.

البرهان هنا سندع إحدى الزمرتين الجزئيتين تؤثر في مجموعات المشاركة اليسرى للأخرى، ونستخدم المبرهنة 1.36. لتكن $\mathscr{L}$ مجموعة مجموعات المشاركة اليسرى لـ P_1 ، ولندع P_2 تؤثر في $\mathscr{L}$ كالآتي: $y(xP_1) = (yx)P_1$، حيث $y \in P_2$. إذن، $\mathscr{L}$ مجموعة -p_2. وبحسب المبرهنة 1.36، فإنّ $|\mathscr{L}| \equiv |\mathscr{L}_{P_2}|$ (مقياس p)، $|\mathscr{L}| = (G:P_1)$ ولا تقبل القسمة على p، وهكذا، فإنّ $|\mathscr{L}_{P_2}| \neq 0$. لتكن $xP_1 \in \mathscr{L}_{P_2}$. إذن، $yxP_1 = xP_1$ لكل $y \in P_2$ وهكذا، فإنّ $x^{-1}yxP_1 = P_1$، ولأنّ $|P_1| = |P_2|$، فيجب أن نحصل على $P_1 = x^{-1}P_2x$، وهكذا، فإنّ P_1 وP_2 بالتأكيد زمرتان جزئيتان مترافقتان. ♦

مبرهنة سيلو الأخيرة تعطي معلومات عن عدد زمر سيلو الجزئية - p بعض التوضيحات معطاة بعد المبرهنة، والمزيد معطًى في الفصل المقبل.

11.36 مبرهنة (**مبرهنة سيلو الثالثة**) إذا كانت G زمرة منتهية وp تقسم $|G|$، فإنّ عدد زمر سيلو الجزئية -p مطابق لـ 1 مقياس p، ويقسم $|G|$.

البرهان لتكن P إحدى زمر سيلو الجزئية -p في G. لتكن $\mathscr{S}$ مجموعة كل زمر سيلو الجزئية -p، ولندع P تؤثر في $\mathscr{S}$ بالترافق، حيث إنّ $x \in P$ ترسل $T \in \mathscr{S}$ إلى xTx^{-1}، فبحسب المبرهنة 1.36، فإنّ $|\mathscr{S}| \equiv |\mathscr{S}_P|$ (مقياس p). لنحسب $\mathscr{S}_P$.

إذا كانت $T \in \mathscr{S}_P$، فإنّ $xTx^{-1} = T$ لكل $x \in P$. إذن، $P \leq N[T]$، وبالطبع، $T \leq N[T]$ كذلك، ولأنّ كلا P وT زمر سيلو جزئية -p في G، فهي كذلك زمر سيلو جزئية -p في $N[T]$، ولكنهما عند ذلك يصبحان مترافقين في $N[T]$ بحسب المبرهنة 10.36، ولأنّ T زمرة جزئية ناظمية في $N[T]$، فإنها المرافق الوحيد لنفسها في $N[T]$. إذن، $T = P$، وهكذا، فإنّ $\mathscr{S}_P = \{P\}$، ولأنّ $|\mathscr{S}| \equiv |\mathscr{S}_P| = 1$ (مقياس p)، فنرى أنّ عدد زمر سيلو الجزئية -p مطابق لـ 1 مقياس p.

لندع الآن G تؤثر في $\mathscr{S}$ بالترافق. فلأنّ زمر سيلو الجزئية -p كلها مترافقة، فيوجد مدار واحد فقط في $\mathscr{S}$ تحت G، وإذا كانت $P \in \mathscr{S}$، فإنّ $|\mathscr{S}| = |p \text{ مدار}| = (G : G_P)$ بحسب المبرهنة 16.16 (في الحقيقة G_P هي منظّم P)؛ ولكن $(G: G_P)$ يقسم $|G|$، وهكذا، فإنّ عدد زمر سيلو الجزئية -p يقسم $|G|$. ♦

12.36 مثال زمر سيلو الجزئية -2 في S_3 لها رتبة 2. الزمر الجزئية من الرتبة 2 في S_3 في المثال 7.8، هي:

$$\{\rho_0, \mu_1\}, \qquad \{\rho_0, \mu_2\}, \qquad \{\rho_0, \mu_3\}.$$

لاحظ أنه توجد ثلاث زمر جزئية، وأنّ $3 \equiv 1$ (مقياس 2)، وكذلك 3 تقسم 6 (رتبة S_3) يمكننا التحقق بسهولة أنّ: $i_{\rho 1}[\{\rho_0, \mu_1\}] = \{\rho_0, \mu_2\}$ و $i_{\rho 2}[\{\rho_0, \mu_1\}] = \{\rho_0, \mu_3\}$ حيث $i_{\rho j}(x) = \rho_j x \rho_j^{-1}$، موضحة أنها جميعها مترافقة. ▲

13.36 مثال لنستخدم مبرهنات سيلو في برهان أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 15. لتكن G رتبة 15، فندعي أنّ G تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 5، وبحسب المبرهنة 8.36، تحوي G على الأقل زمرة جزئية واحدة من الرتبة 5، وبحسب المبرهنة 11.36 عدد مثل هذه الزمر الجزئية يطابق 1 مقياس 5، ويقسم 15، ولأنّ 1، و6، و11 هي الأعداد الصحيحة الموجبة الوحيدة الأقل من 15 وتطابق 1 مقياس 5، ولأنّ العدد 1 هو الوحيد بينها الذي يقسم 15، فنرى أنّ G تحوي بالضبط زمرة جزئية واحدة P من الرتبة 5؛ ولكن لكل $g \in G$، يربط التماثل الذاتي الداخلي i_g المعرّف على G، حيث $i_g(x) = gxg^{-1}$، الزمرة الجزئية P بصورة غامرة بزمرة جزئية gPg^{-1}، وهي الأخرى من الرتبة 5. إذن، يجب أن يكون لدينا $gPg^{-1} = P$ لكل $g \in G$، وهكذا، فإنّ P زمرة جزئية ناظمية في G؛ لذلك، فإنّ G ليست بسيطة (سيثبت المثال 10.37 أنّ G يجب أن تكون في الحقيقة إبدالية؛ ولذلك، فيجب أن تكون دورية). ▲

إننا على ثقة بأنّ المثال 13.36 أعطى لمحة عن قوة المبرهنة 11.36. لا تقلل أبدًا من أهمية مبرهنة تُعدّ شيئًا، حتى لو كان مقياس p.

تمارين 36

حسابات

املأ الفراغات في التمارين 1 – 4.

1. زمرة سيلو جزئية –3 في زمرة رتبتها 12 لها رتبة ________.

2. زمرة سيلو جزئية –3 في زمرة رتبتها 54 لها رتبة ________.

3. الزمرة من الرتبة 24 يجب أن تحوي ______ أو ______ زمرة سيلو جزئية –2. (استخدم المعلومات المعطاة فقط في المبرهنة 11.36).

4. الزمرة من الرتبة (17) (5) (3) = 255 يجب أن تحوي إما ______ أو ______ زمرة سيلو جزئية –3 و ______ أو ______ زمرة سيلو جزئية –5.

(استخدم فقط المعلومات المعطاة في المبرهنة 11.36).

5. أوجد زمر سيلو الجزئية –3 في S_4 كلها، وبيّن أنها مترافقة.

6. أوجد زمرتي سيلو جزئيتين –2 في S_4، وأثبت أنهما مترافقتان.

مفاهيم

في التمارين 7 إلى 9، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

7. ليكن p عددًا أوليًّا. الزمرة -p هي زمرة بخاصية أنّ كل عنصر فيها له رتبة p.

8. المنظم $N[H]$ للزمرة الجزئية H في G هي مجموعة التماثلات الذاتية الداخلية كلها التي تربط H بصورة غامرة بنفسها.

9. لتكن G زمرة، حيث إنّ p يقسم رتبها. زمرة سيلو جزئية -p في الزمرة، هي أكبر زمرة جزئية P في G لها خاصية أنّ رتبتها هي إحدى قوى p.

10. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. أيّ زمرتي سيلو جزئيتين -p في زمرة منتهية مترافقتان.

________ ب. تثبت المبرهنة 11.36 أنّ أيّ زمرة من الرتبة 15 لها فقط زمرة سيلو جزئية – 5 واحدة.

________ جـ. كل زمرة سيلو جزئية -p في زمرة منتهية لها رتبة من قوى p.

________ د. كل زمرة جزئية -p في أيّ زمرة منتهية تكون زمرة سيلو الجزئية -p.

________ هـ. تحوي كل زمرة إبدالية منتهية زمرة سيلو جزئية -p واحدة فقط لكل عدد أولي p يقسم رتبة G.

________ و. المنظم في G للزمرة الجزئية H هو دائمًا زمرة جزئية ناظمية في G.

________ ز. إذا كانت H زمرة جزئية في G، فإنّ H دائمًا زمرة جزئية ناظمية في $N[H]$.

________ ح. تكون زمرة سيلو الجزئية -p في زمرة منتهية G ناظمية، إذا وفقط إذا كانت زمرة سيلو الجزئية -p الوحيدة في G.

__________ ط. إذا كانت G زمرة إبدالية وH زمرة جزئية من G، فإنّ $N[H] = H$.

__________ ي. الزمرة ذات الرتبة p^n حيث p عدد أولي، لا تحوي زمرة سيلو جزئية -p.

براهين

11. لتكن H زمرة جزئية في الزمرة G. أثبت أنّ $G_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ زمرة جزئية في G.

12. لتكن G زمرة منتهية، ولتكن الأعداد الأولية p و$q \neq p$ تقسم $|G|$. أثبت أنه إذا كانت G تحوي بالضبط زمرة سيلو جزئية -p فعلية واحدة، فإنها زمرة جزئية ناظمية، وهكذا فإنّ G ليست بسيطة.

13. أثبت أنّ أيّ زمرة من الرتبة 45 تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 9.

14. أثبت النتيجة 4.36.

15. لتكن G زمرة منتهية، وليكن p عددًا أوليًا يقسم $|G|$. لتكن P زمرة سيلو جزئية -p في G، فأثبت أنّ $N[N[P]] = N[P]$. [مساعدة: ناقش أنّ P هي زمرة سيلو الجزئية -p الوحيدة في $N[N[P]]$، ومن ثم استخدم المبرهنة 10.36].

16. لتكن G زمرة منتهية، وليكن العدد الأولي p يقسم $|G|$، ولتكن P زمرة سيلو جزئية -p في G، ولتكن H أيّ زمرة جزئية -p في G، فأثبت أنه يوجد $g \in G$، حيث إنّ $gHg^{-1} \leq P$.

17. أثبت أنّ زمرة من الرتبة $(35)^3$ تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 125.

18. أثبت عدم وجود زمر بسيطة من الرتبة $255 = (3)(5)(17)$.

19. أثبت عدم وجود زمر بسيطة من الرتبة $p^r m$، حيث p عدد أولي، r عدد صحيح موجب، و$m < p$.

20. لتكن G زمرة منتهية. افترض G كمجموعة -G، حيث G تؤثر في نفسها بالترافق.

أ. أثبت أنّ G_G هو المركز $Z(G)$ لـ G. (انظر الفصل 15).

ب. استخدم المبرهنة 1.36 في إثبات أنّ مركز زمرة -p منتهية غير تافهة يكون غير تافه.

21. ليكن p عددًا أوليًا. أثبت أنّ الزمرة المنتهية من الرتبة p^n تحوي زمرًا جزئية ناظمية H_i، حيث $0 \leq i \leq n$ و $|H_i| = p^i$ و $H_i \leq H_{i+1}$، حيث $0 \leq i < n$ [مساعدة: انظر التمرين 20، وخذ فكرة من الفصل 35].

22. لتكن G زمرة منتهية، ولتكن P زمرة جزئية -p ناظمية في G، فأثبت أنّ P محتواة في كل زمرة سيلو جزئية -p في G.

الفصل 37 تطبيقات على مبرهنات سيلو Applications of the Sylow Theory

سنعطي في هذا الفصل كثيرًا من التطبيقات على مبرهنات سيلو. إنه من المثير رؤية مدى سهولة استنتاج حقائق معينة عن زمر ذات رتب خاصة، وعلى أيِّ حال، فيجب أن ندرك أننا نعمل فقط مع زمر منتهية، وأننا حقيقة نحرز تقدمًا بسيطًا في المسألة العامة لتحديد بنية الزمر المنتهية جميعها، فإذا كانت رتبة الزمرة تحوي فقط عددًا صغيرًا من العوامل، فإنّ التقنيات الموضحة في هذا الفصل، يمكن أن تكون ذات فائدة في تحديد بنية الزمرة. سيتم توضيح هذا أكثر في الفصل 40، حيث سنثبت أنه من الممكن أحيانًا وصف الزمر كلها (تبعًا للتماثل) من رتبة معينة، حتى لو كانت بعض الزمر ليست إبدالية، وعلى أي حال، إذا كانت رتبة الزمرة المنتهية مركبة بصورة كبيرة، أي لها عدد كبير من العوامل، فإنّ المشكلة بوجه عام أصعب بكثير.

تطبيقات على الزمر -p ومعادلة الفصول

1.37 مبرهنة كل زمرة ذات رتبة تساوي قوة لعدد أولي (أي زمرة -p منتهية) قابلة للحل.

البرهان إذا كانت رتبة G تساوي p^r، فينتج مباشرة من المبرهنة 8.36، أنّ G تحوي زمرة جزئية H_i من الرتبة p^i ناظمية في زمرة جزئية H_{i+1} من الرتبة p^{i+1}، حيث $0 \leq i < r$. إذن:

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \dots < H_r = G$$

سلسلة تركيب، حيث زمر العامل جميعها من الرتبة p، وهكذا فهي إبدالية، بل في الحقيقة هي دورية. إذن، G قابلة للحل. ♦

استخدمت البراهين الأقدم لمبرهنات سيلو معادلة الفصول، وقد تمّ تجنب ذكر معادلة الفصول بصورة واضحة في براهين الفصل 36، مع أنّ المعادلة (2) هناك هي صورة عامة لها. سنطور الآن معادلة الفصول التقليدية لتصبح مألوفة لديك.

لتكن X مجموعة -G منتهية، حيث G زمرة منتهية. تخبرنا المعادلة (2) في الفصل 36 بأنّ:

$$|x| = |x_G| + \sum_{i=s+1}^{r} |Gx_i| \tag{1}$$

حيث x_i عنصر في المدار i في X سنعتمد الآن حالة خاصة من المعادلة (1)، حيث $X = G$ وتأثير G في G بالترافق، وهكذا تنقل $g \in G$ العنصر $x \in X = G$ إلى gxg^{-1}. إذن:

$$\begin{aligned} X_G &= \{x \in G \mid gxg^{-1} = x \quad \text{لكل} \quad g \in G\} \\ &= \{x \in G \mid xg = gx \quad \text{لكل} \quad g \in G\} = Z(G), \end{aligned}$$

مركز G، فإذا جعلنا $n_i = |Gx_i|$ و $c= |Z(G)|$ في المعادلة (1)، فإننا نحصل على:

$$|G| = c + n_{c+1} + \cdots + n_r \qquad (2)$$

حيث n_i عدد عناصر المدار i في G تحت تأثير الترافق في نفسها، لاحظ أنّ n_i تقسم $|G|$ لـ $c+1 \leq i \leq r$؛ لأننا نعلم في المعادلة (1) أن $|Gx_i| = (G : G_{xi})$ ، التي هي من قواسم $|G|$.

2.37 تعريف المعادلة (2) هي **معادلة الفصول لـ G (Class equation)**. كل مدار في G تحت الترافق بـ G، هو **فصل ترافق في G (Conjugate Class)**. ■

3.37 مثال من السهل التحقق أنه في S_3 في المثال 7.8 تكون فصول الترافق

$$\{\rho_0\}, \{\rho_1, \rho_2\}, \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.$$

معادلة الفصول في S_3 هي:

$$6 = 1+2+3. \qquad ▲$$

لتوضيح استخدام معادلة الفصول، نثبت المبرهنة التي طلب التمرين (b) 20 في الفصل 36 أن نبرهنها.

4.37 مبرهنة يكون مركز زمرة p- منتهية غير تافهة G غير تافه.

البرهان في المعادلة (2) لـ G، كل n_i تقسم $|G|$، حيث $c+1 \leq i \leq r$، وهكذا، فإنّ p تقسم كل n_i، وكذلك فإنّ p تقسم $|G|$. إذن، p تقسم c. الآن، $e \in Z(G)$، وهكذا $c \geq 1$؛ لذلك، $c \geq p$، ويوجد $a \in Z(G)$، بحيث $a \neq e$. ♦

نتحول الآن إلى تمهيدية على الضرب المباشر، التي ستُستخدم في المبرهنات التي تلي.

5.37 تمهيدية لتكن G زمرة تحوي زمرتين جزئيتين ناظميتين H وK، حيث إنّ $H \cap K = \{e\}$ و $H \vee K = G$. إذن، G تماثل $H \times K$.

البرهان سنبدأ بإثبات أنّ $hk= kh$، حيث $k \in K$ و $h \in H$. خذ المبدل $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})$ ، ولأنّ H وK زمرتان جزئيتان ناظميتان في G، فإنّ التجميعين في الأقواس يثبتان أنّ $hkh^{-1}k^{-1}$ في كلا H وK، ولأنّ $H \cap K = \{e\}$، فنرى أنّ $hkh^{-1}k^{-1} = e$، وهكذا $hk = kh$.

ليكن $\phi: H\times K \to G$ معرّفًا بـ $\phi(h,k) = hk$ إذن:

$$\phi((h,k)(h',k')) = \phi(hh',kk') = hh'kk'$$

$$= hkh'k' = \phi(h,k)\phi(h',k'),$$

وهكذا، فإنّ ϕ تشاكل.

إذا كان $\phi(h,k) = e$، فإنّ $hk= e$، وهكذا، فإنّ $h = k^{-1}$، وكلا h وk في $H \cap K$. إذن، $h= k= e$؛ ولذلك، $Ker(\phi) = \{(e,e)\}$ وϕ أحادية.

بحسب التمهيدية 4.34، نعلم أنّ $HK= H \vee K$، و$H \vee K= G$ بالإفتراض. إذن، ϕ غامرة لـ G، و$H \times K \simeq G$ ♦

6.37 مبرهنة للعدد الأولي p، كل زمرة من الرتبة p^2 إبدالية.

البرهان إذا كانت G غير دورية، فإنّ كل عنصر ما عدا e يجب أن يكون من الرتبة p. ليكن a أحد هذه العناصر؛ إذن، الزمرة الجزئية الدورية $\langle a\rangle$ من الرتبة p لا تستنفذ G، وكذلك ليكن $b \in G$، حيث $b \notin \langle a\rangle$؛ إذن، $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}$؛ لأن العنصر c في $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$، حيث $c \neq e$ سيكون مولدًا لكل من $\langle a\rangle$ و$\langle b\rangle$، معطيًا $\langle b\rangle = \langle a\rangle$، ما يناقض الإنشاء، ومن المبرهنة 8.36، $\langle a\rangle$ ناظمية في زمرة جزئية من الرتبة p^2 في G، أي ناظمية في G كلها، وبالمثل $\langle b\rangle$ ناظمية في G، الآن $\langle a\rangle \vee \langle b\rangle$ زمرة جزئية في G، وتحوي بصورة فعلية $\langle a\rangle$، ورتبتها تقسم p^2؛ إذن، يجب أن تكون $\langle a\rangle \vee \langle b\rangle$ هي G كلها؛ إذن، فرضيات البدهية 5.37 متحققة، وG تماثل $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$؛ ولذلك فهي إبدالية. ♦

المزيد من التطبيقات

سنتحوّل إلى مناقشة ما إذا كانت زمر بسيطة من رتب معينة موجودة، وقد رأينا أنّ كل زمرة ذات رتبة عدد أولي تكون بسيطة، وكذلك أثبتنا أنّ A_n بسيطة حيث $n \geq 5$، وأنّ A_5 أصغر زمرة بسيطة ذات رتبة ليست عددًا أوليًّا، إذ إنّ هناك تخمينًا من بيرنسايد بأنّ أيّ زمرة منتهية بسيطة ذات رتبة غير أولية، يجب أن تكون ذات رتبة زوجية، وقد كان النصر حينما برهن هذا [21] (Thompson and Feit).

7.37 مبرهنة إذا كانت p وq عددين أوليين مختلفين و$p < q$، فإنّ كل زمرة ذات رتبة pq لها زمرة جزئية وحيدة من الرتبة q، وهذه الزمرة الجزئية ناظمية في G، وهكذا فإنّ G ليست بسيطة، وإذا كان q لا يطابق 1 مقياس p، فإنّ G إبدالية ودورية.

البرهان تخبرنا المبرهنتان 8.36 و11.36 بأنّ G تحوي زمرة سيلو جزئية -q، وأنّ عدد هذه الزمر الجزئية يطابق 1 مقياس q ويقسم pq؛ ولذلك، يجب أن يقسم p، ولأنّ $p < q$، فإنّ الاحتمال الوحيد هو العدد 1؛ إذن، توجد زمرة سيلو جزئية -q واحدة Q في G، حيث يجب أن تكون الزمرة Q ناظمية في G؛ لأنها تحت تماثل ذاتي داخلي ستحمل إلى زمرة من الرتبة نفسها، أي هي نفسها؛ إذن، G ليست بسيطة.

بالمثل، توجد P زمرة سيلو جزئية -p في G، وعددها يقسم pq، ويطابق 1 مقياس p، هذا العدد يجب أن يكون 1 أو q، فإذا كان q لا يطابق 1 مقياس p، فإنّ العدد يجب أن يكون 1 وP ناظمية في G، لنفترض أنّ $q \not\equiv 1$ (مقياس p). لأنّ كل عنصر في Q مختلف عن e له رتبة q، وكل عنصر في P مختلف عن e له رتبة p، فنحصل على $Q \cap P = \{e\}$، وكذلك $P \vee Q$ يجب أن تكون زمرة جزئية من G تحوي Q فعليًا ورتبتها تقسم pq؛ إذن، $Q \vee P = G$ وبحسب البدهية 5.37 تماثل $Q \times P$ أو $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$؛ إذن، G إبدالية ودورية. ♦

سنحتاج إلى تمهيدية أخرى لبعض مناقشات العدّ الآتية.

8.37 تمهيدية إذا كانت H وK زمرتين جزئيتين منتهيتين في الزمرة G، فإنّ:

$$|HK| = \frac{(|H|)\,(|K|)}{|H \cap K|}$$

البرهان تذكر أنّ $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. ليكن $|H| = r$ و$|K| = s$ ، و $|H \cap K| = t$. الآن تحتوي HK على الأكثر rs عنصرًا، وعلى أيّ حال، فمن الممكن أن يكون h_1k_1 يساوي h_2k_2، حيث $h_1, h_2 \in H$ و$k_1, k_2 \in K$؛ أي يمكن أن يكون هناك بعض التداخل، فإذا كان $h_1k_1 = h_2k_2$، فدع

$$x = (h_2)^{-1}h_1 = k_2(k_1)^{-1}$$

يثبت $x = (h_2^{-1})h_1$ أنّ $x \in H$، و $x = k_2(k_1)^{-1}$ يثبت أنّ $x \in K$؛ إذن، $x \in (H \cap K)$،

$$h_2 = h_1x^{-1} \quad \text{و} \quad k_2 = xk_1 \text{ و}$$

من الناحية الأخرى، إذا كانت $y \in (H \cap K)$، فدع $h_3 = h_1\, y^{-1}$ و $k_3 = yk_1$ ؛ إذن، من الواضح أنّ $h_3k_3 = h_1k_1$، حيث $h_3 \in H$ و$k_3 \in K$؛ إذن، يمكن تمثيل $hk \in HK$ على صورة h_ik_i، حيث $h_i \in H$ و$k_i \in K$ بعدد من المرات يساوي عدد عناصر $H \cap K$، أي t من المرات؛ لذلك، عدد العناصر في HK يساوي rs/t. ♦

التمهيدية 8.37 هي نتيجة أخرى تعدّ الأشياء؛ لذلك لا تقلل من قيمتها، ستستخدم البدهية بالصورة الآتية: لا يمكن لزمرة منتهية G أن تحوي زمرتين جزئيتين H وK كبيرتين جدًّا مع تقاطع صغير جدًّا ، أو أنّ رتبة HK ستتجاوز رتبة G، وهذا مستحيل، على سبيل المثال: الزمرة من الرتبة 24 لا يمكن أن تحوي زمرتين جزئيتين من الرتبة 12 و8 وتقاطعًا من الرتبة 2.

تتألف بقية هذا الفصل من تمارين عدّة توضح تقنيات إثبات أنّ الزمر من رتبة معينة جميعها إبدالية، أو أنّ لها زمرة جزئية ناظمية فعلية، أي إنها ليست بسيطة. سنستخدم حقيقة واحدة ذكرناها سابقًا في التمارين فقط، الزمرة الجزئية H ذات الدليل 2 في زمرة منتهية G هي دائمًا ناظمية؛ لأنه – وبالعدّ– نرى أنّ مجموعات المشاركة اليسرى هي فقط H ومجموعة المشاركة التي تتكوّن من جميع عناصر G التي ليست في H، ومجموعات المشاركة اليمنى مثلها؛ إذن، كلّ مجموعة مشاركة يمنى هي مجموعة مشاركة يسرى، وH ناظمية في G.

مثال 9.37 لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة p^r حيث $r > 1$، حيث p عدد أولي؛ لأنه وبحسب المبرهنة 8.36، تحوي مثل هذه الزمرة G زمرة جزئية من الرتبة p^{r-1} وناظمية في زمرة جزئية من الرتبة p^r، التي يجب أن تكون G كلها؛ إذن، الزمرة من الرتبة 16 ليست بسيطة، إنها تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 8. ▲

مثال 10.37 كل زمرة من الرتبة 15 دورية (وهكذا، فهي إبدالية، وليست بسيطة؛ لأن 15 ليس عددًا أوليًّا)؛ هذا لأنّ $(3)\,(5) = 15$، و5 لا تطابق 1 مقياس 3، وبذلك نكون انتهينا بحسب المبرهنة 7.37. ▲

مثال 11.37 لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 20؛ لأن مثل هذه الزمرة G لها زمر سيلو جزئية –5، وعددها يطابق 1 مقياس 5 ، وهو من قواسم الـ 20؛ ولذلك فهو 1، زمرة سيلو الجزئية –5 هذه ناظمية؛ لأنها تساوي مرافقاتها جميعها. ▲

مثال 12.37 لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 30، وقد رأينا أنه إذا وجدت زمرة سيلو جزئية -p واحدة فقط، حيث p عدد أولي يقسم 30، فنكون انتهينا، وبحسب المبرهنة 11.36، فإنّ احتمالات عدد زمر سيلو الجزئية –5 هي 1 أو 6 ، وتلك لزمر سيلو الجزئية –3 تساوي 1 أو 10؛ ولكن، إذا كان لـ G زمر سيلو جزئية –5، فإنّ تقاطع أيّ اثنتين منها هو زمرة جزئية ذات رتبة تقسم 5؛ ولذلك هي فقط $\{e\}$؛ إذن، تحوي كل منها 4 عناصر من الرتبة 5، التي لا تنتمي إلى الأخريات؛ إذن، يجب أن تحوي G 24 عنصرًا من الرتبة 5، وبالمثل، إذا كانت G تحوي 10 زمر سيلو جزئية –3، فإنها تحوي على الأقل 20 عنصرًا من الرتبة 3، سيحتاج نوعا زمر سيلو معًا على الأقل إلى 44 عنصرًا في G؛ إذن، توجد زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 5 أو من الرتبة 3. ▲

مثال 13.37 لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 48، وسنثبت بالطبع، أنّ الزمر G ذات الرتبة 48 تحوي زمرًا جزئية ناظمية من الرتبة 16 أو الرتبة 8، وبحسب المبرهنة 11.36، فإنّ G تحوي واحدة أو ثلاث زمر سيلو جزئية $2-$ من الرتبة 16، فإذا كانت هناك زمرة جزئية واحدة فقط من الرتبة 16، فإنها تكون ناظمية في G.

افترض أنّ هناك ثلاث زمر جزئية من الرتبة 16، ولتكن H وK اثنتين منها.

إذن، يجب أن تكون رتبة $K \cap H$ تساوي 8؛ لإنه إذا كانت $K \cap H$ ذات رتبة ≤ 4، فإنه وبحسب التمهيدية 8.37 تحوي HK على الأقل $64 = 4\ /\ (16)\ (16)$ عنصرًا، ما يناقض حقيقة أنّ G تحوي فقط 48 عنصرًا، فإذن $K \cap H$ ناظمية في كل من H وK (لأنها ذات دليل يساوي 2، أو بحسب المبرهنة 8.36)؛ إذن، منظم $K \cap H$ يحوي كلًا من H وK، ويجب أن يكون ذا رتبة مضاعف < 1 لـ 16 وقاسمًا لـ 48؛ ولذلك، فهو 48؛ إذن، يجب أن تكون $K \cap H$ ناظمية في G. ▲

مثال 14.37 لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 36، ومثل هذه الزمرة G تحوي إما زمرة جزئية واحدة أو أربعة من الرتبة 9، فإذا كان هناك منها زمرة جزئية واحدة فقط، فإنها ناظمية في G، وإذا كان هناك أربعة من هذه الزمر الجزئية، فلتكن H وK اثنتين منها، وكما في المثال 13.37، يجب أن تحوي $K \cap H$ ثلاثة عناصر على الأقل، أو أنّ HK ستحوي 81 عنصرًا، وهذا مستحيل؛ إذن، منظم $K \cap H$ له رتبة مضاعف < 1 لـ 9 وقاسم لـ 36؛ إذن، يجب أن تكون الرتبة إما 18 أو 36، فإذا كانت الرتبة تساوي 18، فإنّ دليل المنظم يساوي 2؛ ولذلك، فهو ناظمي في G، أما إذا كانت الرتبة تساوي 36، فإنّ $K \cap H$ ناظمية في G. ▲

مثال 15.37 تكون كل زمرة G من الرتبة (17) (5) (3)= 255 إبدالية (ولذلك، فهي دورية بحسب المبرهنة الأساسية 12.11 وليست بسيطة؛ لأن 255 ليس عددًا أوليًا)، وبحسب المبرهنة 11.36، الزمرة G تحوي زمرة جزئية H واحدة فقط من الرتبة 17؛ إذن، G/H لها رتبة 15 وهي إبدالية بحسب المثال 10.37، حيث نرى بحسب المبرهنة 20.15، أنّ زمرة المبدلات الجزئية C في G محتواة في H؛ إذن وبوصفها زمرة جزئية من H، فإنّ رتبة C إما 1 أو 17.

كذلك ترينا المبرهنة 11.36، أنّ G تحوي إما 1 أو 85 زمرة جزئية من الرتبة 3، وإما 1 أو 51 زمرة جزئية من الرتبة 5، وفي أيّ حال، فإنّ 85 زمرة جزئية من الرتبة 3 ستحتاج إلى 170 عنصرًا من الرتبة 3، و51 زمرة جزئية من الرتبة 5 ستحتاج إلى 204 عناصر من الرتبة 5 في G، كلاهما معًا سيحتاجان إلى 375 عنصرًا في G، وذلك مستحيل؛ إذن، توجد زمرة جزئية K رتبتها إما 3 أو 5 وناظمية في G؛ إذن، $G\ /K$ لها رتبة (17) (5) أو (17) (3)، وفي كلتا الحالتين ترينا المبرهنة 7.37 أن $G\ /\ K$ إبدالية؛ إذن، $C \leq K$ ولها رتبة إما 3، 5، أو 1، ولأنّ $C \leq H$ تثبت أنّ رتبة C إمّا 17 أو 1، فنستنتج أنّ رتبة C هي 1؛ إذن، $C = \{e\}$، و $G/C \simeq G$ إبدالية، وتثبت المبرهنة الأساسية 12.11 أنّ G دورية. ▲

تمارين 37

حسابات

.1 لتكن D_4 زمرة تماثلات المربع في المثال 10.8.

أ. أوجد تحليل D_4 إلى فصول ترافق.

ب. اكتب معادلة الفصول لـ D_4.

.2 بمناقشات شبيهة لتلك التي استخدمت في الأمثلة في هذا الفصل، أقنع نفسك بأنّ كل زمرة غير تافهة ذات رتبة غير أولية وأقل من 60، تحوي زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة، وبذلك تكون غير بسيطة. لا تحتاج إلى كتابة التفاصيل. (نوقشت أصعب الحالات في الأمثلة).

مفاهيم

.3 ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل زمرة من الرتبة 159 دورية.

________ ب. كل زمرة من الرتبة 102 لها زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة.

________ جـ. كل زمرة قابلة للحل رتبتها إحدى قوى عدد أولي.

________ د. كل زمرة ذات رتبة تساوي قوة عدد أولي قابلة للحل.

________ هـ. سيكون مضجرًا جدًّا إثبات أنه لا توجد زمرة ذات رتبة غير أولية بين 60 و168 بسيطة بالطرق الموضحة في الكتاب.

________ و. لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 21.

________ ز. تحوي كل زمرة بـ 125 عنصرًا 5 عناصر على الأقل تبدل مع عناصر الزمرة جميعها.

________ ح. تحوي كل زمرة من الرتبة 42 زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 7.

________ ط. تحوي كل زمرة من الرتبة 42 زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 8.

________ ي. الزمر البسيطة الوحيدة هي الزمر $\mathbb{Z}_p$ وA_n، حيث p عدد أولي و$n \neq 4$.

براهين

.4 أثبت أن كل زمرة من الرتبة (5) (7) (47) إبدالية ودورية.

.5 أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 96.

.6 أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 160.

.7 أثبت أنّ أيّ زمرة من الرتبة 30 تحوي زمرة جزئية من الرتبة 15. [مساعدة: استخدم آخر عبارة في المثال 12.37، ثم اذهب إلى زمرة العامل].

.8 يحدد هذا التمرين فصول الترافق في S_n لكل $n \geq 1$.

أ. أثبت أنه إذا كانت $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ دورة في S_n و τ أي عنصر في S_n، فإنّ $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau a_1, \tau a_2, \cdots, \tau a_m)$.

ب. ناقش مستخدمًا (أ) أنّ أيّ دورتين في S_n من الطول نفسه تكونان مترافقتين.

جـ. ناقش مستخدمًا (أ) و(ب) أنّ ضرب s من الدورات غير المتقاطعة في S_n وذات أطول r_i، حيث $i = 1, 2, \ldots, s$، مترافق مع أيّ ضرب آخر لـ s من الدورات غير المتقاطعة وذات أطول r_i في S_n.

د. أثبت أنّ عدد فصول الترافق في S_n يساوي $p(n)$، حيث $p(n)$ تساوي عدد الطرق – بإهمال ترتيب الحدود – التي يمكن كتابة n بوصفها مجموع أعداد صحيحة موجبة، يسمى العدد $p(n)$ **عدد تقسيمات n (number of partitions of n)**.

هـ. احسب $p(n)$ لـ $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

9. أوجد فصول الترافق ومعادلة الفصول لـ S_4. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

10. أوجد معادلة الفصول لـ S_5 و S_6. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

11. أثبت أنّ عدد فصول الترافق لـ S_n ، هي كذلك عدد الزمر الإبدالية المختلفة (تبعًا للتماثل) من الرتبة p^n ، حيث p عدد أولي. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

12. أثبت أنه إذا كانت $n > 2$، فإنّ مركز S_n هو الزمرة الجزئية المكوّنة من التبديلة المحايدة فقط. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

الفصل 38 الزمر الإبدالية الحرة Free Abelian Groups

سنقدم في هذا الفصل مفهوم الزمر الإبدالية الحرة، ونثبت بعض النتائج المتعلقة بها، حيث يختم الفصل بعرض للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (المبرهنة 12.11).

الزمر الإبدالية الحرة

سنراجع أفكار مجموعة المولدات لزمرة G والزمر منتهية التولد، كما أعطيت في الفصل 7، وسنتعامل في هذا الفصل بصورة خاصة مع الزمر الإبدالية، ونستخدم مصطلحات الجمع، كما يأتي:

0 للعنصر المحايد، للعملية:

$$\left\{\begin{array}{l} na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{من المرات } n} \\ -na = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{\text{من المرات } n} \end{array}\right. \text{ حيث } a \in G,\ n \in \mathbb{Z}^{+}$$

$0a = 0$ حيث 0 الأول في $\mathbb{Z}$ والثاني في G.

سنستمر باستخدام الرمز $\times$ للضرب المباشر للزمر بدلاً من استخدام رمز الجمع المباشر.

لاحظ أنّ $\{(1,0), (0,1)\}$ مجموعة مولدة لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$؛ لأن $(n,m) = n(1, 0) + m(0, 1)$ لأيّ (m,n) في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، حيث إنّ مجموعة المولدات هذه تتمتع بخاصية أنّ كل عنصر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ يمكن كتابته بطريقة وحيدة على الصورة $n(1, 0) + m(0, 1)$، أي إنّ المعاملات n وm في $\mathbb{Z}$ وحيدة.

مبرهنة 1.38 لتكن X مجموعة جزئية من زمرة إبدالية غير صفرية G، فإنّ الشروط الآتية على X متكافئة.

1. يمكن كتابة كل عنصر a في G بطريقة وحيدة (ما عدا ترتيب الحدود) على الصورة $a = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r$، حيث $n_i \neq 0$ في $\mathbb{Z}$ وx_i عناصر مختلفة في X.
2. X تولد G، و$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r = 0$، حيث $n_i \in \mathbb{Z}$ وx_i عناصر مختلفة في X، إذا وفقط إذا كانت $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$.

البرهان افترض أنّ الشرط 1 صحيح، فلأنّ $G \neq \{0\}$، فإنّ $X \neq \{0\}$. ينتج من 1 أنّ $0 \notin X$؛ لأنه إذا كان $x_i = 0$ و$x_j \neq 0$، فإنّ $x_j = x_i + x_j$، ما سيناقض وحدانية كتابة x_j، ومن الشرط 1، x تولد G و$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r = 0$، إذا كانت $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$. افترض الآن أنّ $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r = 0$، حيث إنّ بعض ألـ $n_i \neq 0$؛ إذن:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + (n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r) \\ &= (n_1 + 1)x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r \end{aligned}$$

ما يعطي طريقتين لكتابة $x_1 \neq 0$، ما يناقض افتراض الوحدانية في الشرط 1؛ إذن، الشرط 1 يؤدي إلى الشرط 2.

سنثبت الآن أنّ الشرط 2 يؤدي إلى الشرط 1. ليكن $a \in G$، ولأنّ X تولد G، فنرى أنه يمكن كتابة a على الصورة: $a = n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r$.

افترض أنه يمكن كتابة a بطريقة أخرى باستخدام عناصر X، فباستخدام معاملات صفرية في التعبيرين عند الحاجة، بإمكاننا افتراض أنهما يشتملان على العناصر نفسها من X ، وأنهما على الصورة:

$$a = n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r$$
$$a = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_rx_r$$

بالطرح، نحصل على:

$$0 = (n_1 - m_1)x_1 + (n_2 - m_2)x_2 + \cdots + (n_r - m_r)x_r$$

وهكذا، فإنّ $n_i - m_i = 0$ بحسب الشرط 2، و $n_i = m_i$ ، حيث $i = 1,2,..., r$؛ إذن، المعاملات وحيدة. ♦

2.38 تعريف تسمى الزمر الإبدالية التي لها مجموعة مولدات X تحقق الشروط في المبرهنة 1.38 **زمرة إبدالية حرة** (**Free Abelian Group**)، وتسمى X أساسًا (**basis**) للزمرة. ■

3.38 مثال الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إبدالية حرة و$\{(1, 0), (0, 1)\}$ أساس لها، وبالمثل، $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ أساس للزمرة الإبدالية الحرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، وهكذا؛ إذن، الضرب المباشر المنتهي للزمرة $\mathbb{Z}$ مع نفسها زمر إبدالية حرة. ▲

4.38 مثال الزمرة $\mathbb{Z}_n$ ليست إبدالية حرة؛ لأن $nx = 0$ لكل $x \in \mathbb{Z}_n$، و$n \neq 0$، ما يناقض الشرط 2. ▲

افترض أنّ زمرة إبدالية حرة G لها أساس منتهٍ $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$، فإذا كان $a \in G$ و$a \neq 0$، فإنّ لـ a كتابة وحيدة على الصورة:

$$a = n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r \text{ حيث } n_i \in \mathbb{Z}.$$

(لاحظ أننا في الكتابة السابقة لـ a قد استخدمنا العناصر x_i كلها في الأساس المنتهي X، بوصفه مقابلا لكتابة a في الشرط 1 في المبرهنة 1.38، حيث يمكن أن يكون الأساس غير منتهٍ؛ إذن، في الكتابة السابقة لـ a، يجب أن نسمح باحتمالية أنّ بعض المعاملات n_i أصفار، بينما في الشرط 1 في المبرهنة 1.38 أشرنا إلى أنّ كل $n_i \neq 0$).

نعرّف

$$\phi : G \to \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{r \text{ من العوامل}}$$

بـ $\phi(a) = (n_1, n_2, ..., n_r)$ و $\phi(0) = (0,0,...,0)$، إذ إنه من السهل التحقق أنّ ϕ تماثل. نترك التفاصيل للتمارين (انظر التمرين 9)، وننصّ على النتيجة بوصفها مبرهنة.

5.38 مبرهنة إذا كانت G زمرة إبدالية حرة غير صفرية ولها أساس بـ r من العناصر، فإنّ G تماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ r من العوامل.

إنها حقيقة أنّ أيّ أساسين لزمرة إبدالية حرة G تحويان العدد نفسه من العناصر، سنثبت هذا فقط في حالة الأساس المنتهي لـ G، على الرغم من أنها صحيحة إذا كان كل أساس لـ G غير منتهٍ. إنّ البرهان جميل حقًّا؛ فهو يعطي تشخيصًا سهلًا لعدد العناصر في الأساس بدلالة حجم زمرة العامل.

6.38 مبرهنة لتكن $G \neq \{0\}$ زمرة إبدالية حرة ذات أساس منتهٍ، فإنّ كل أساس لـ G منتهٍ، وكل أسس G لها العدد نفسه من العناصر.

البرهان ليكن لـ G الأساس $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$؛ إذن، G تماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ r من العوامل. لتكن $2G = \{2g \mid g \in G\}$، ومن السهل التحقق أنّ $2G$ زمرة جزئية من G، ولأنّ

$G \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ r من العوامل، فنحصل على

$$\begin{aligned} G/2G &\simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times \cdots \times 2\mathbb{Z}) \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

لـ r من العوامل. إذا $|G/2G| = 2^r$، وهكذا عدد عناصر أيّ أساس منتهٍ X يساوي $\log_2 |G/2G|$؛ إذن، أيّ أساسين منتهيين لهما العدد نفسه من العناصر.

بقي أن نثبت أنه لا يمكن أن يكون هناك أساس غير منتهٍ لـ G. ليكن Y أساسًا لـ G، ولتكن $\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ عناصر مختلفة في Y. لتكن H زمرة جزئية في G مولدة بـ $\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$، ولتكن K زمرة جزئية في G مولدة ببقية عناصر Y، فمن السهل التحقق أنّ $G \simeq H \times K$، وهكذا فإنّ:

$$G / 2G \simeq (H \times K) / (2H \times 2K) \simeq (H / 2H) \times (K / 2K).$$

ولأنّ $|H/2H| = 2^s$، فنرى أنّ $|G/2G| \geq 2^s$، ولأنّ لدينا $|G/2G| = 2^r$ ، فنرى أنّ $s \leq r$؛ إذن، لا يمكن لـ Y أن تكون مجموعة غير منتهية؛ لأنه يمكننا حينها أن نأخذ $s > r$. ♦

7.38 تعريف إذا كانت G زمرة إبدالية حرة، فإنّ مرتبة G **(rank)** هي عدد العناصر في أساسٍ لـ G. (كل الأسس لها عدد العناصر نفسه). ■

إثبات المبرهنة الأساسية

سنثبت المبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11) بإثبات أنّ أيّ زمرة إبدالية منتهية التولد تماثل زمرة عامل على الصورة:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times d_s\mathbb{Z} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}),$$

حيث "البسط" و"المقام" كلاهما يحويان n عاملاً، وd_1 تقسم d_2، التي تقسم d_3، ...، والتي تقسم d_s. وهكذا سينتج التحليل بقوى الأعداد الأولية في المبرهنة 12.11.

لإثبات أنّ G تماثل زمرة العامل هذه، سنثبت وجود تشاكل من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ غامر لـ G ، ونواته على صورة $d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times d_s\mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}$ ، وسنحصل على النتيجة من المبرهنة 11.14. ستعطي المبرهنات الآتية تفاصيل هذه المناقشة، حيث إنّ هدفنا من هذه الفقرة التقديمية، هو رؤية إلى أين نحن ذاهبون عندما نقرأ ما يأتي:

8.38 مبرهنة لتكن G زمرة إبدالية منتهية التوليد، مولدة بالمجموعة $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$، ليكن:

$$\phi\colon \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ عامل}} \to G$$

معرّفًا بـ $\phi\colon (h_1, h_2, \dots, h_n) = h_1a_1 + h_2a_2 + \dots + h_na_n$، فإنّ ϕ تشاكل غامر لـ G.

البرهان من معنى h_ia_i ، حيث $h_i \in \mathbb{Z}$ و$a_i \in G$، نرى مباشرة أنّ:

$$\begin{aligned}
\phi[(h_1, \cdots, h_n) + (k_1, \cdots, k_n)] &= \phi(h_1 + k_1, \cdots, h_n + k_n)\\
&= (h_1 + k_1)a_1 + \cdots + (h_n + k_n)a_n\\
&= (h_1a_1 + k_1a_1) + \cdots + (h_na_n + k_na_n)\\
&= (h_1a_1 + \cdots + h_na_n) + (k_1a_1 + \cdots + k_na_n)\\
&= \phi(k_1, \cdots, k_n) + \phi(h_1, \cdots, h_n).
\end{aligned}$$

لأنّ $\{a_1, \cdots, a_n\}$ تولد G، فمن الواضح أنّ التشاكل ϕ غامر لـ G. ♦

سنبرهن الآن "خاصية الاستبدال" ، التي تجعل من الممكن ضبط الأساس.

9.38 مبرهنة إذا كان $X = \{x_1, \cdots, x_r\}$ أساسًا للزمرة الإبدالية الحرة G و $t \in \mathbb{Z}$، فإنّ لكل $i \neq j$، تكون المجموعة

$$Y = \{x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j + tx_i, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_r\}$$

أساسًا كذلك لـ G.

البرهان لأنّ $x_j = (-t)x_i + (1)(x_j + tx_i)$. فنرى أنه يمكن استعادة x_j من Y. التي هي من ثم تولد G. افترض أنّ

$$n_1x_1 + n_{j-1}x_{j-1} + n_j(x_j + tx_i) + n_{j+1}x_{j+1} + \cdots + n_rx_r = 0.$$

إذن

$$n_1x_1 + (n_i + n_jt)x_i + \cdots + n_jx_j + \cdots + n_rx_r = 0.$$

ولأنّ X أساس، فإنّ $n_1 = n_i + n_j t = \cdots = n_j = \cdots = n_r = 0$ لأن

$n_j = 0$ و$n_i + n_jt = 0$، فينتج أنّ $n_i = 0$ كذلك، وهكذا فإنّ

$n_1 = \cdots = n_i = \cdots = n_j = \cdots = n_r = 0$، وبهذا يتحقق الشرط 2 في المبرهنة 1.38؛ إذن، Y أساس. ♦

10.38 مثال المجموعة $\{(1, 0), (0, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، والمجموعة $\{(4, 1), (0, 1)\}$ أساس آخر؛ لأن $(4, 1) = 4(1, 0) + (0, 1)$ ؛ ولكن $\{(3, 0), (0, 1)\}$ ليست أساسًا. فعلى سبيل المثال: لا يمكننا التعبير عن $(2,0)$ على الصورة $n_1(3, 0) + n_2(0, 1)$، حيث $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. هنا $(3, 0) = (1, 0) + 2(1, 0)$، ومضاعف أحد عناصر الأساس أضيف إلى نفسه، بدلاً من إضافته لعنصر مختلف في الأساس. ▲

يمكن أن يكون للزمرة الإبدالية الحرة ذات مرتبة منتهية كثير من الأسس، وسنثبت أنه إذا كانت $K \leq G$، فإنّ K كذلك زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة لا تزيد على مرتبة G، وبصورة مساوية في الأهمية، توجد أسس لـ G وK مرتبطات ببعض بصورة لطيفة.

11.38 مبرهنة لتكن G زمرة إبدالية حرة غير صفرية وذات مرتبة منتهية n، ولتكن K زمرة جزئية غير صفرية في G، فإنّ K إبدالية حرّة ومرتبتها $s \leq n$.

وإضافة إلى ذلك، يوجد أساس $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ لـ G وأعداد صحيحة موجبة $d_1, d_2, ..., d_s$، حيث إنّ d_i تقسم d_{i+1} لـ $i= 1, ..., s-1$، و $\{d_1x_1, d_2x_2, \cdots, d_s x_s\}$ أساس لـ K.

البرهان سنثبت أنّ لـ K أساسًا بالصورة الموصوفة، وهذا سيثبت أنّ K إبدالية حرة ذات مرتبة على الأكثر n. افترض أنّ $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$ أساس لـ G. يمكن التعبير عن كل عنصر غير صفري في K على الصورة:

$$k_1 y_1 + \cdots + k_n y_n,$$

حيث إنّ بعض الـ $|k_i|$ لا تساوي صفرًا من بين الأسس Y كلها لـG، اختر واحدة Y_1 بحيث تعطي أقل قيم غير الصفرية $|k_i|$، وبحيث تكتب عناصر K غير الصفرية كلها بدلالة عناصر الأساس Y_1، وبإعادة ترقيم عناصر Y_1 عند الحاجة، فيمكننا افتراض وجود $w_1 \in K$، حيث إنّ:

$$w_1 = d_1 y_1 + k_2 y_2 + ... + k_n y_n$$

وحيث $d_1 > 0$ وd_1 أصغر معامل سهل المنال كما وصف توًا، ونكتب باستخدام خوارزمية القسمة $k_j = d_1 q_j + r_j$، حيث $0 \leq r_j < d_1$ لـ $j= 2,...,n$ ؛ إذن:

$$w_1 = d_1(y_1 + q_2 y_2 + ... + q_n y_n) + r_2 y_2 + ... + r_n y_n. \qquad (1)$$

الآن دع $x_1 = y_1 + q_2 y_2 + q_n y_n$. بحسب المبرهنة 9.38 $\{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$ أساس كذلك لـ G، ومن المعادلة (1) واختيارنا لـ Y_1، بحيث d_1 أصغر معامل، فنرى أنّ $r_2 = ... = r_n = 0$؛ إذن، $d_1 x_1 \in K$.

نعتمد الآن الأسس على الصورة $\{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$ لـG. كل عنصر في K يمكن كتابته على الصورة:

$$h_1 x_1 + k_2 y_2 + ... + k_n y_n$$

ولأنّ $d_1 x_1 \in K$، فبإمكاننا طرح مضاعف مناسب لـ$d_1 x_1$ ، ثم استخدام أنّ d_1 صغرى لنرى أنّ h_1 مضاعف لـd_1 ، حيث نرى في الحقيقة أنّ $k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n$ في K، ومن بين الأسس كلها على الشكل $\{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$، نختار y_2 واحدة التي تؤدي إلى بعض الـ $k_i \neq 0$ وذات أقل قيمة. (من الممكن أن تكون الـ k_i كلها أصفارًا دائمًا، وتتولد في هذه الحالة K من $d_1 x_1$، ونكون قد انتهينا). وبإعادة ترقيم عناصر Y_2، يمكننا افتراض وجود $w_2 \in K$، حيث إنّ

$$w_2 = d_2 y_2 + ... + k_n y_n$$

حيث $0 < d_2$ و d_2 صغرى كما وصفنا توًا، ويمكننا تمامًا كما في الفقرة السابقة، تعديل الأساس $Y_2 = \{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$ إلى الأساس $\{x_1, x_2, y_3, \cdots, y_n\}$ لـ G، بحيث $d_1x_1 \in K$ و $d_2x_2 \in$ K، وبكتابة $d_2 = d_1q + r$ حيث $0 \leq r < d_1$، نرى أنّ $\{x_1 + qx_2, x_2, y_3, \cdots, y_n\}$ أساس لـ G و $d_1x_1 + d_2x_2 = d_1(x_1 + qx_2) + rx_2$ عنصر في K، وباختيارنا لـ d_1 لتكون صغرى، نرى أنّ $r = 0$، وبهذا فإنّ d_1 تقسم d_2.

نعتمد الآن الأسس كلها على الصورة $\{x_1, x_2, y_3, \cdots, y_n\}$ لـ G، ونختبر عناصر في K على الصورة $k_3y_3 + \cdots + k_ny_n$، فالنمط واضح، وتستمر العملية، حتى نحصل على الأساس $\{x_1, x_2, \cdots, x_s, y_{s+1}, \cdots, y_n\}$، حيث العنصر الوحيد في K على الصورة $k_{s+1}y_{s+1} + \cdots + k_ny_n$ هو الصفر، أي إنّ ألـ k_i كلها أصفار، عندها، ندع $x_{s+1} = y_{s+1}, \cdots, x_n = y_n$. ونحصل على أساس لـ G على الصورة الموصوفة في نصّ المبرهنة 11.38. ♦

12.38 مبرهنة كل زمرة إبدالية منتهية التولد تماثل زمرة على الصورة:

$$\mathbb{Z}_{m1} \times \mathbb{Z}_{m2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{mr} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

حيث m_i تقسم m_{i+1} لـ $i = 1, \ldots, r-1$.

البرهان ولغايات هذا البرهان، سيكون من المقنع استخدام الترميز $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_1 = \{0\}$. ، لتكن G زمرة منتهية التوليد بـ n عنصر، ولتكن $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ n من العوامل، افترض التشاكل $\phi: F \to G$ من المبرهنة 8.38، ولتكن K نواة هذا التشاكل؛ إذن، يوجد أساس لـ F على الصورة $\{x_1, \ldots, x_n\}$، حيث إنّ $\{d_1x_1, \ldots, d_sx_s\}$ أساس لـ K و d_i تقسم d_{i+1} لـ $i = 1,\ldots,s-1$، وبحسب المبرهنة 11.14، G تماثل F/K؛ ولكن:

$$\begin{aligned} F/K &\simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times d_s\mathbb{Z} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}) \\ &\simeq \mathbb{Z}d_1 \times \mathbb{Z}d_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}d_s \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

من الممكن أن تكون $d_1 = 1$، وفي هذه الحالة $\mathbb{Z}_{d1} = \{0\}$، حيث يمكننا حذفها (تبعًا للتماثل) من هذا الضرب، وبالمثل، يمكن لـ d_2 أن تكون 1، وهكذا. سندع m_1 لتكون أول $d_i > 1$، m_2 تساوي ألـ d_i اللاحق، وهكذا، وتنتج مبرهنتنا مباشرة. ♦

أثبتنا أصعب جزء من المبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11)، وبالطبع، يتحقق التحليل إلى قوى أعداد أولية؛ لأننا نستطيع كسر الزمر $\mathbb{Z}_{m_i}$ إلى عوامل ذات قوّى أولية، ويخصّ الجزء المتبقي الوحيد من المبرهنة 12.11 وحدانية رقم بيتي للمعاملات الملتوية، وقوى الأعداد الأولية، حيث يظهر عدد بيتي بوصفه مرتبة للزمرة الإبدالية الحرة G/T، حيث T الزمرة الجزئية الملتوية في G، ولا تتغير هذه المرتبة بحسب المبرهنة 6.38، ما يثبت وحدانية عدد بيتي، إلّا أنّ وحدانية المعاملات الملتوية وقوى الأعداد الأولية أكثر صعوبة بعض الشيء في الإثبات. سنعطي بعض التمارين التي تظهر وحدانيتها (انظر التمارين 14 إلى 22).

تمارين 38

حسابات

1. أوجد أساسًا $\{(a_1,\ a_2,\ a_3),\ (b_1,\ b_2,\ b_3),\ (c_1,\ c_2,\ c_3)\}$ لـ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، بحيث إنّ كل $a_i \neq 0$، كل $b_i \neq 0$ وكل $c_i \neq 0$. (الكثير من الإجابات محتملة).

2. هل $\{(2, 1), (3, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ؟ برهن اختيارك.

3. هل $\{(2, 1), (4, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$؟ برهن اختيارك.

4. أوجد شروطًا على $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ؛ لتصبح $\{(a, b), (c, d)\}$ أساسًا لـ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. [مساعدة: حلّ $x\,(a, b) + y(c, d) = (e, f)$ في $\mathbb{R}$، وقرّر متى تقع x وy في $\mathbb{Z}$].

مفاهيم

في التمرينين 5 و6، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

5. مرتبة الزمرة الإبدالية الحرة G ، هي عدد العناصر في مجموعة مولدة لـ G.

6. الأساس لزمرة إبدالية غير صفرية G، هو مجموعة مولدة $X \subseteq G$، بحيث إنّ $n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_mx_m = 0$ لعناصر مختلفة $x_i \in X$ و$n_i \in \mathbb{Z}$ فقط إذا كانت $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 0$.

7. أثبت بمثال أنه من الممكن لزمرة جزئية فعلية من زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة منتهية r أن يكون لها كذلك مرتبة r.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_______ أ. تكون كل زمرة إبدالية حرة عديمة الالتواء.

_______ ب. تكون كل زمرة إبدالية عديمة الالتواء ومنتهية التولد زمرة إبدالية حرة.

_______ جـ. توجد زمرة إبدالية حرة بمرتبة تساوي أيّ عدد صحيح موجب.

_______ د. تكون الزمرة الإبدالية منتهية التولد زمرة إبدالية حرّة، إذا كان عدد بيتي لها يساوي عدد العناصر في إحدى مجموعاتها المولدة.

_______ هـ. إذا كانت X تولد الزمرة الإبدالية الحرة G، وكانت $X \leq Y \leq G$، فإنّ Y تولد G.

_______ و. إذا كانت X أساسًا للزمرة الإبدالية الحرة G، وكانت $X \leq Y \leq G$، فإنّ Y أساس لـ G.

_______ ز. لكل زمرة إبدالية حرة غير صفرية عدد غير منتهٍ من الأسس.

_______ ح. لكل زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة على الأقل 2، عدد غير منتهٍ من الأسس.

_______ ط. إذا كانت K زمرة جزئية غير صفرية من زمرة إبدالية حرّة منتهية التولد، فإنّ K إبدالية حرة.

_______ ي. إذا كانت K زمرة جزئية غير صفرية من زمرة إبدالية حرّة منتهية التولد، فإنّ G/K إبدالية حرّة.

براهين

9. أكمل إثبات المبرهنة 5.38 (ارجع للعبارتين السابقتين للمبرهنة).

10. أثبت أنّ الزمرة الإبدالية الحرة لا تحوي عناصر غير صفرية ذات رتبة منتهية.

11. أثبت أنه إذا كانت G وG' زمرتين إبداليتين حرّتين، فإنّ $G \times G'$ إبدالية حرّة.

12. أثبت أنّ الزمر الإبدالية الحرّة ذات المراتب المنتهية هي بالضبط الزمر الإبدالية المنتهية التولد، التي لا تحوي عناصر غير صفرية منتهية الرتبة.

13. أثبت أنّ $\mathbb{Q}$ مع الجمع ليست زمرة إبدالية حرة. [مساعدة: أثبت أنه لا يوجد عددان نسبيان مختلفان n/m وr/s، يمكن أن يقعا في مجموعة تحقق الشرط 2 في المبرهنة 1.38].

التمارين من 14 إلى 19 تتعامل مع إثبات وحدانية قوى الأعداد الأولية، التي تظهر في التحليل إلى قوى أعداد أولية للزمرة الجزئية الملتوية T في زمرة إبدالية منتهية التولد.

14. ليكن p عددًا أوليًّا محددًا، فأثبت أنّ عناصر T ذات الرتبة من قوى p، مع الصفر تشكل زمرة جزئية T_p من T.

15. أثبت أنه في أيّ تحليل لـ T لقوى – أولية، الزمرة T_p في التمرين السابق تماثل الضرب المباشر للعوامل الدورية من الرتب قوى العدد الأولي p. [يختزل هذا مسألتنا لإثبات أنّه لا يمكن أن يكون للزمرة T_p تحليلات مختلفة جوهريًّا كضرب زمر دورية].

16. لتكن G أيّ زمرة إبدالية، وليكن n أيّ عدد صحيح موجب، فأثبت أنّ $G[n] = \{x \in G \mid nx = 0\}$ زمرة جزئية من G. (باستخدام رموز الضرب $G[n] = \{x \in G \mid x^n = e\}$).

17. بالرجوع إلى التمرين 16، أثبت أنّ $\mathbb{Z}_{p^r}[p] \simeq \mathbb{Z}_p$ لأيّ $r \geq 1$ وعدد أولي p.

18. باستخدام التمرين 17، أثبت أنّ:

$$(\mathbb{Z}_{p^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{r_m}})[p] \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{m \text{ مرة}}$$

بشرط أنّ $r_i \geq 1$.

19. لتكن G زمرة إبدالية منتهية التولد و T_p الزمرة الجزئية المعرفة في التمرين 14. افترض أنّ

$T_p \simeq \mathbb{Z}_{p^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{r_m}} \simeq \mathbb{Z}_{p^{s_1}} \mathbb{Z}_{p^{s_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{s_n}}$، حيث

$1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_m$ و $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$، نحتاج إلى إثبات أنّ $m = n$ و $r_i = s_i$ لـ $i = 1, \ldots, n$ لإكمال برهان وحدانية التحليل إلى قوى – أعداد أولية.

أ. استخدم التمرين 18 في إثبات أنّ $n = m$.

ب. أثبت أنّ $r_1 = s_1$، وافترض أنّ $r_i = s_i$ لكل $i < j$، وأثبت أنّ $r_j = s_j$، ما يكمل البرهان [مساعدة: افترض أنّ $r_j < s_j$. افترض الزمرة الجزئية $p^{r_j} T_p = \{p^{r_j} x \mid x \in T_p\}$، وأثبت أنّ هذه الزمرة الجزئية سيكون لها تحليلان لقوى – أعداد أولية تتضمن أعدادًا مختلفة من العوامل غير الصفرية، ثم ناقش بأنّ هذا مستحيل حسب الجزء (أ) من هذا التمرين].

لتكن T الزمرة الجزئية الملتوية لزمرة إبدالية منتهية التولد، وافترض أنّ $T \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_r} \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s}$، حيث m_i يقسم m_{i+1} لـ $i = 1, \ldots, r-1$ و n_j تقسم n_{j+1} لـ $j = 1, \ldots, s-1$؛ و $m_1 > 1$ و $n_1 > 1$. نود إثبات أنّ $r = s$ و $m_k = n_k$، حيث $k = 1, \ldots, r$، ما يبرهن وحدانية المعاملات الملتوية. يتم هذا للتمارين 20 إلى 22.

20. وضّح كيف يمكن الحصول على التحليل إلى قوى – أعداد أولية من التحليل إلى معاملات – ملتوية. (لاحظ أنّ التمارين السابقة تثبت أنّ التحليل إلى قوى – أعداد أولية وحيد).

21. ناقش مستخدمًا التمرين 20 ، أنّ m_r و n_s يمكن تشخيصهما كليهما، كما يأتي: لتكن $p_1, \ldots, p_t$ أعدادًا أولية مختلفة تقسم $|T|$، ولتكن $p_1^{h_1}, \cdots, p_t^{h_t}$ أعلى قوًى لهذه الأعداد الأولية، التي تظهر في التحليل لقوى – أعداد أولية (الوحيد)؛ إذن، $m_r = n_s = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_t^{h_t}$.

22. شخّص m_{r-1} و n_{s-1} مبرهنًا أنهما متساويان، وأكمل لتبرهن أنّ $m_{r-i} = n_{s-i}$، حيث $i = 1, \ldots, r-1$، وهكذا، فإنّ $r = s$.

الفصل 39 الزمر الحرة Free Groups

سنناقش في هذا الفصل وفي الفصل 40 جزءًا من مبرهنة الزمر، وهو ذو أهمية عظيمة ليس في الجبر فقط بل في الطبولوجيا كذلك، وهناك مناقشة رائعة وسهلة القراءة للزمر الحرة وتمثيلات الزمر في (Crowell and Fox) [46، الفصلان 3 و4].

الكلمات والكلمات المختصرة

لتكن A (ليست بالضرورة منتهية) مجموعة عناصر a_i، حيث $i \in I$. نفكر في A بوصفها أبجدية **(alphabet)** وفي ألـ a_i بوصفها **حروفًا (letters)** في الأبجدية، أيّ رمز على الصورة a_i^n حيث $n = \mathbb{Z}$ هو **مقطع (syllable)**، وأيّ سلسلة منتهية w من المقاطع المكتوبة بصورة متراصّة هي **كلمة (word)**، وكذلك نقدّم مفهوم **الكلمة الفارغة 1 (empty word)**، التي لا تحوي مقاطع.

1.39 مثال لتكن $A = \{a_1, a_2, a_3\}$؛ إذن:

$$a_1a_3{}^4a_2{}^2a_3,\ a_2{}^3a_2{}^{-1}a_3a_1{}^2a_1{}^{-7} \text{ و } a_2{}^3$$

كلها كلمات، إذا اتبعنا العرف بأن نعُدّ تساوي a_i. ▲

ووُجدت طريقتان طبيعيتان لتعديل كلمات معينة، **الانكماش الأولي (elementary contraction)**. يتكوّن النوع الأول من استبدال ظهور $a_i^m a_i^n$ في كلمة بـ a_i^{m+n}، والنوع الثاني يتكوّن من تبديل ظهور a_i^0 في الكلمة بـ 1، أي حذفها من الكلمة، وعن طريق الانكماش الأولي لعدد منتهٍ من المرات، يمكن تحويل كل كلمة إلى **كلمة مختصرة (reduced word)**، وهي التي لا يمكن إجراء مزيد من الانكماشات الأولية لها، لاحظ أنّ الانكماشات الأولية هي تقابل – شكليًّا – التعامل مع أسس الأعداد الصحيحة.

2.39 مثال الصورة المختصرة للكلمة $a_2{}^3a_2{}^{-1}a_3a_1{}^2a_1{}^{-7}$ في المثال 1.39 هي $a_2{}^2a_3a_1{}^{-5}$. ▲

يتعيّن أن يقال هنا وبصورة نهائية: إننا سنشرح كثيرًا من النقاط التي تستغرق بعض الكتب صفحات في برهانها– عادة بمناقشة معقدة في الاستقراء الرياضي التي تُجزّأ إلى كثير من الحالات، على سبيل المثال: افترض أننا أعطينا كلمة، ونرغب في إيجاد الصورة المختصرة لها، فقد تكون هناك تشكيلة من الانكماشات الأولية التي يمكن إنجازها أولاً.

كيف يمكن أن نعلم أنّ الكلمة المختصرة التي توصّلنا إليها أخيرًا ستكون نفسها، بغض النظر عن الترتيب الذي اتبعناه في أداء الانكماشات الأولية؟ قد يقول الطالب: هذا واضح. يقضي بعض المؤلفين جهدًا كبيرًا في إثبات هذا، حيث يميل المؤلف هنا إلى موافقة الطالب، فهو يعُدّ هذا النوع من البراهين مملًّا، ولا يجعله مرتاحًا مع هذا الوضع أبدًا، وعلى أيّ حال، فالمؤلف هو أول من يعترف بأنه ليس رياضيًّا عظيمًا، مع احترام أنّ بعض الرياضيين يشعرون بأنّ هذه الأشياء تحتاج إلى مناقشة كبيرة، سنميز الحالات عندما ننصّ فقط على هذه الحقائق بالعبارة «سيبدو واضحًا أنّ» مع إبقاء علامتي التنصيص.

الزمر الحرة

لتكن مجموعة الكلمات المختصرة كلها والمكوّنة من أبجديتنا A هي $F[A]$، سنجعل $F[A]$ الآن زمرة بصورة طبيعية. لـ w_1 و w_2 في $F[A]$ عرّف $w_1 .w_2$ لتكون الصورة المختصرة للكلمة المكوّنة من وضع الكلمتين w_1w_2 بصورة متراصّة.

3.39 مثال إذا كانت

$$w_1 = a_2{}^3 a_1{}^{-5} a_3{}^2$$

و

$$w_2 = a_3{}^{-2} a_1{}^2 a_3 a_2{}^{-2},$$

فإنّ $w_1 \cdot w_2 = a_2{}^3 a_1{}^{-3} a_3 a_2{}^{-2}$.

"سيبدو واضحًا أنّ" عملية الضرب هذه على $F[A]$ حسنة التعريف وتجميعية، تؤدي الكلمة الفارغة 1 دور العنصر المحايد، و"سيبدو واضحًا أنه" إذا أعطينا كلمة مختصرة

$w \in F[A]$، وإذا كوّنا الكلمة التي نحصل عليها، أولًا بكتابة مقاطع w بترتيب معكوس وثانيًا باستبدال a_i^{-n} بـ a_i^n، فإنّ الكلمة الناتجة w^{-1} هي كلمة مختصرة أيضًا، و

$$w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1.$$ ▲

4.39 تعريف الزمرة $F[A]$ التي عرفت توًّا هي **الزمرة الحرة المولدة من A**

(free group generated by A) ■

ارجع إلى المبرهنة 6.7 وإلى التعريف السابق لها؛ لترى أنّ الاستخدام الحالي لمصطلح يولد متوافقة مع الاستخدام السابق.

بدءًا بزمرة G ومجموعة مولدات $\{a_i \mid i \in I\}$ التي سنختصرها بـ $\{a_i\}$، يمكننا أن نسأل ما إذا كانت G حرة على $\{a_i\}$. سنعرّف بالضبط ماذا يعني هذا.

5.39 تعريف إذا كانت G زمرة مع مجموعة المولدات $A = \{a_i\}$، وإذا كانت G تماثل $F[A]$ تحت تأثير الدالة $\phi\colon G \to F[A]$ ، حيث إنّ $\phi(a_i) = a_i$، فإنّ G **حرّة على A (free on A)**، و a_i **مولدات حرة (free generators)** لـ G، وتكون الزمرة **حرة (free)** إذا كانت حرة على مجموعة غير خالية A ■

6.39 مثال المثال الوحيد السابق لزمرة حرة هو $\mathbb{Z}$، التي تكون حرة على مولّد واحد. لاحظ أنّ كل زمرة حرة تكون غير منتهية. ▲

ارجع إلى المراجع لإثبات المبرهنات الثلاث الآتية. لن نستخدم هذه النتائج، فقد ذكرناها ببساطة؛ لتعلمنا بهذه الحقائق الممتعة.

7.39 مبرهنة إذا كانت الزمرة G حرة على A وعلى B كذلك، فإنّ للمجموعتين A و B عدد العناصر نفسه؛ أي إنّ مجموعتي توليد حرتين لزمرة حرة لهما عدد العناصر نفسه.

8.39 تعريف إذا كانت G حرة على A، فإنّ عدد عناصر A هي **مرتبة الزمرة الحرة G (rank of the free group G)**. ■

في الحقيقة، المبرهنة الآتية هي نتيجة واضحة تمامًا من المبرهنة 7.39.

9.39 مبرهنة تكون الزمرتان الحرتان متماثلتين، إذا وفقط إذا كان لهما المرتبة نفسها.

10.39 مبرهنة الزمرة الجزئية الفعلية غير التافهة من الزمرة الحرة تكون كذلك حرة.

11.39 مثال لتكن $F[\{x, y\}]$ الزمرة الحرة على $\{x, y\}$. لتكن

$$y_k = x^k y x^{-k}$$

حيث $k \geq 0$. ألـ y_k، حيث $k \geq 0$ مولدات حرة للزمرة الجزئية من $F[\{x, y\}]$ التي تولدها، هذا يوضح أنه على الرغم من أنّ الزمرة الجزئية من الزمرة الحرة تكون حرة، ولكن قد تكون مرتبة الزمرة الجزئية أكبر بكثير من مرتبة كامل الزمرة! ▲

تشاكلات الزمر الحرة

سيركز عملنا في الفصل وقبل كل شيء على التشاكلات المعرّفة على الزمر الحرة، والنتائج هنا بسيطة ورائعة.

12.39 مبرهنة لتكن G زمرة مولدة بـ $A = \{a_i \mid i \in I\}$، ولتكن G' أيّ زمرة، فإذا كانت a'_i، حيث $i \in I$ أي عناصر في G' – ليست بالضرورة مختلفة – فإنه يوجد على الأكثر تشاكل واحد $\phi\colon G \to G'$، بحيث إنّ $\phi(a_i) = a_i'$، وإذا كانت G حرة على A، فإنه يوجد بالضبط تشاكل واحد من هذا النوع.

البرهان ليكن ϕ تشاكلاً من G إلى G'، بحيث إنّ $\phi(a_i) = a_i'$. الآن وبحسب المبرهنة 6.7، فلكل $x \in G$، نحصل على:

$$x = \prod_j a_{i_j}{}^{n_j}$$

لضرب منتهٍ من المولدات a_i، وحيث إنّ ألـ a_{ij} التي تظهر في الضرب ليست بالضرورة مختلفة؛ إذن، ولأنّ ϕ تشاكل، فيجب أن يكون:

$$\phi(x) = \prod_j \phi\left(a_{i_j}{}^{n_j}\right) = \prod_j \left(a_{i_j}{}'\right)^{n_j}.$$

إذن، يتحدد التشاكل بالكامل بقيمه على عناصر المجموعة المولدة. هذا يثبت وجود تماثل واحد على الأكثر، بحيث إنّ $\phi(a_i) = a_i'$.

افترض الآن أنّ G حرة على A ، أي إنّ $G = F[A]$. لـ

$$x = \prod_j a_{i_j}{}^{n_j}$$

في G، عرف $\psi: G \to G'$ بـ

$$\psi(x) = \prod_j (a_{i_j}{}')^{n_j}.$$

الدالة حسنة التعريف؛ لأن $F[A]$ تتكوّن بالضبط من الكلمات المختصرة؛ ولا يوجد ضربان شكليان مختلفان في $F[A]$ متساويان، ولأنّ قواعد الحسابات المتضمنة للأسس في G' هي شكليًّا نفسها تلك المتضمنة للأسس في G، فمن الواضح أنّ $\psi(xy) = \psi(x)\ \psi(y)$ لأيّ عنصرين x وy في G؛ إذن، ψ هي بالتأكيد تشاكل. ♦

ربما كان علينا إثبات الجزء الأول من هذه المبرهنة مبكرًا، بدلاً من تحويلها إلى التمارين. لاحظ أنّ المبرهنة تنصّ على أنّ تشاكل الزمر يتحدد تمامًا بمعرفة قيمه على كل عنصر من مجموعة المولدات. كان هذا التمرين 46 في الفصل 13، وبوجه خاص، تشاكل الزمرة الدورية يتحدد تمامًا بقيمته على أيّ مولد مفرد للزمرة.

13.39 مبرهنة كل زمرة G' هي صورة تشاكل لزمرة حرة G.

البرهان لتكن $A = \{a_i \mid i \in I\}$ أيّ مجموعة لها عدد عناصر G' نفسه، ولتكن $G' = \{a_i' \mid i \in I\}$. لتكن $G = F[A]$؛ إذن، وبحسب المبرهنة 12.39، يوجد تشاكل ψ يربط G بـ G'، بحيث إنّ $\psi(a_i) = a_i'$. من الواضح أنّ صورة G مع ψ هي كل G'. ♦

نظرة أخرى للزمر الإبدالية الحرة

من المهم ألا نخلط بين مفهوم الزمرة الحرة ومفهوم الزمرة الإبدالية الحرة، فالزمرة الحرة على أكثر من مولد لا تكون إبدالية، وقد عرّفنا في الفصل السابق الزمرة الإبدالية الحرة بوصفها زمرة إبدالية ذات أساس؛ أي، مجموعة مولدة تحقق الخصائص المذكورة في المبرهنة 1.38. هناك نظرة أخرى – من خلال الزمر الحرة – للزمر الإبدالية الحرة، سنصفها الآن.

لتكن $F[A]$ زمرة حرة على مجموعة مولدة A، سنكتب F بدلًا من $F[A]$ لهذه اللحظة، لاحظ أنّ F ليست إبدالية إذا كانت A تحوي أكثر من عنصر. لتكن C الزمرة الجزئية للمبدلات في F؛ إذن، F/C زمرة إبدالية، وليس من الصعب برهان أنّ F/C زمرة إبدالية حرّة بأساس، فإذا سمّينا aC بـ a، فيمكننا النظر إلى F/C بوصفها زمرة إبدالية حرة ذات أساس، وهذا يُظهر كيف تُبنى الزمرة الإبدالية الحرة ذات الأساس، فكل زمرة إبدالية حرة يمكن أن تبنى بهذه الطريقة تبعًا للتماثل، أي إنه إذا كانت G زمرة إبدالية حرة ذات أساس X، فكوّن الزمرة الحرة $F[X]$، وكوّن زمرة عامل من $F[X]$ مقياس الزمرة الجزئية للمبدلات، فنحصل على زمرة تماثل G.

تتحقق المبرهنات 7.39، 9.39، و10.39 للزمر الإبدالية الحرة إضافة إلى الزمر الحرة، وفي الواقع، النسخة الإبدالية من المبرهنة 10.39 قد بُرهنت لحالة المرتبة المنتهية في المبرهنة 11.38، وبالمقارنة بالمثال 11.39 للزمرة الحرة، فالحقيقة في حالة الزمر الإبدالية الحرة، أنّ مرتبة الزمرة الجزئية هي على الأكثر مرتبة كامل الزمرة، وقد أثبتت المبرهنة 11.38 هذا كذلك لحالة المرتبة المنتهية.

تمارين 39

حسابات

1. أوجد الصورة المختصرة ومعكوسها لكل من الكلمات الآتية:

أ. $a^2b^{-1}b^3a^3c^{-1}c^4b^{-2}$ ب. $a^2a^{-3}b^3a^4c^4c^2a^{-1}$

2. احسب حواصل الضرب المعطاة في الفرعين (أ) و (ب) في التمرين 1 في حالة كانت $\{a, b, c\}$ مجموعة مولدات تكون زمرة إبدالية حرة. أوجد معكوس حواصل الضرب هذه.

3. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة حرّة مرتبتها 2 إلى:

أ. $\mathbb{Z}_2$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

4. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة حرّة مرتبتها 3 وغامرة لـ:

أ. $\mathbb{Z}_4$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

5. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة إبدالية حرّة مرتبتها 2 إلى:

أ. $\mathbb{Z}_4$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

6. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة إبدالية حرّة مرتبتها 2 وغامرة لـ:

أ. $\mathbb{Z}_4$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

مفاهيم

في التمرينين 7 و 8، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

7. الكلمة المختصرة هي تلك التي لا يظهر فيها مقطعان متجاوران فيهما الحرف نفسه، وكذلك لا يظهر فيها مقطع ذو أس يساوي 0.

8. مرتبة الزمرة الحرة هي عدد العناصر في مجموعة مولدات للزمرة.

9. خذ إحدى الحالات في هذا الفصل، التي استعملت فيها عبارة "سيبدو واضحًا أن" وناقش تفاعلك مع هذه الحالة.

10. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_________ أ. كل زمرة جزئية فعلية حرّة من زمرة حرّة تكون زمرة حرّة.

_________ ب. كل زمرة جزئية فعلية من كل زمرة إبدالية حرّة تكون زمرة حرّة.

_________ ج. صورة التشاكل من زمرة حرّة يكون زمرة حرّة.

_________ د. كل زمرة إبدالية حرّة لها أساس.

_________ هـ. الزمر الإبدالية الحرّة ذات المرتبة المنتهية هي بالضبط الزمر الإبدالية منتهية التولد.

_________ و. لا تكون الزمرة الحرّة حرّة.

_________ ز. لا تكون الزمرة الإبدالية الحرّة حرّة.

_________ ح. لا تكون الزمرة الإبدالية الحرّة ذات المرتبة >1 حرّة.

_________ ط. أيّ زمرتين حرّتين متماثلتان.

_________ ي. أيّ زمرتين إبداليتين حرّتين لهما المرتبة نفسها متماثلتان.

براهين

11. لتكن G زمرة إبدالية منتهية التولد مع عنصر محايد 0. المجموعة المنتهية $\{b_1, \cdots, b_n\}$، حيث $b_i \in G$ **أساس** لـ G **(basis)** إذا كانت $\{b_1, \cdots, b_n\}$ تولد G و $\sum_{i=1}^{n} m_i b_i = 0$، إذا وفقط إذا كانت كل $m_i b_i = 0$، حيث $m_i \in \mathbb{Z}$.

أ. أثبت أنّ $\{2, 3\}$ ليست أساسًا لـ $\mathbb{Z}_4$. أوجد أساسًا لـ $\mathbb{Z}_4$.

ب. أثبت أنّ $\{1\}$ و$\{2,3\}$ أسس لـ $\mathbb{Z}_6$. (يثبت هذا أنه لزمرة إبدالية منتهية التولد مع التواء، قد يختلف عدد العناصر في الأساس، أي إنه ليس بالضرورة ثابتًا للزمرة G).

جـ. هل الأساس للزمرة الإبدالية الحرّة كما عرّفناه في الفصل 38 أساس بالمعنى الذي استخدمناه في هذا التمرين؟

د. أثبت أنه لكل زمرة إبدالية منتهية لها أساس $\{b_1, \cdots, b_n\}$، حيث إنّ رتبة b_i تقسم رتبة b_{i+1}.

في شرح الجبر هذه الأيام، تُستخدم غالبًا هذه التقنية (وخاصة من أتباع N. Bourbaki) لتقديم كيان جبري جديد، وذلك كما يأتي:

- صف الخصائص الجبرية التي يمتلكها هذا الكيان الجبري.
- برهن على أنّ أيّ كيانين جبريين يتمتعان بهذه الخصائص يكونان متماثلين، أي إنّ هذه الخصائص تشخّص هذا الكيان.
- برهن وجود كيان واحد على الأقل من هذا النوع.

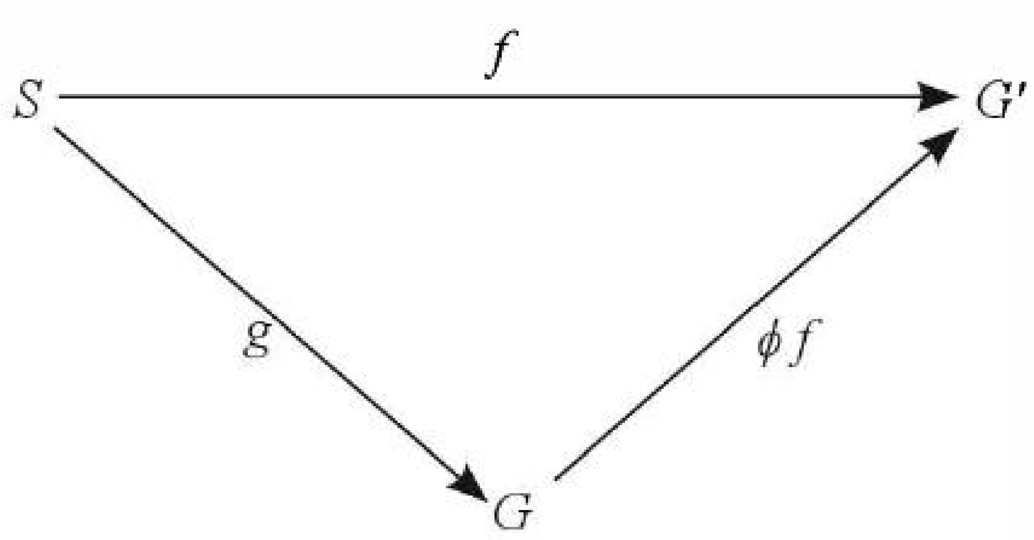
توضّح التمارين الثلاثة الآتية هذه التقنية لثلاثة كيانات جبرية، واجهنا كلًّا منها سابقًا؛ ولذلك لن نضيع هويتها، ولكن سنستخدم أسماءً وهمية لها في أول تمرينين. سيسألنا الجزء الأخير من هذين التمرينين إعطاء أسماء هذه الكيانات.

12. لتكن G زمرة. تسمى الزمرة الإبدالية G^* **زمرة بليب** من G **(blip group of G)**، إذا وجد تشاكل محدد ϕ على G غامر لـ G^*، بحيث إنّ أيّ تشاكل ψ من G إلى أيّ زمرة إبدالية G' يمكن تحليله إلى $\psi = \theta\phi$، حيث θ تشاكل من G^* إلى G' (انظر الشكل 14.39).

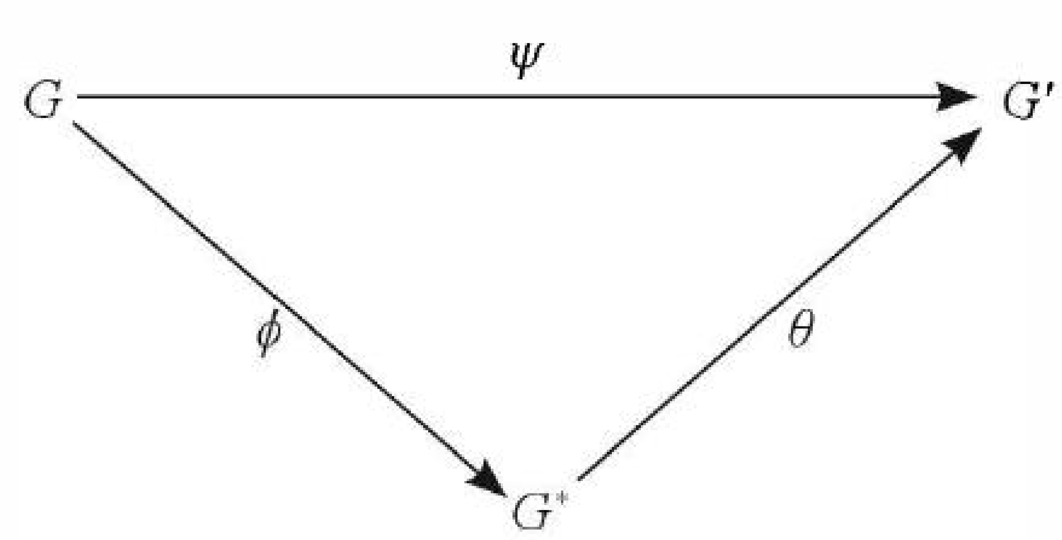
أ. أثبت أنّ أيّ زمرتي بليب لـ G متماثلتان. [مساعدة: لتكن G_1^* وG_2^* زمرتي بليب لـ G. إنّ التشاكلين المحددين $\phi_1 : G \to G_1^*$ و $\phi_2 : G \to G_2^*$ يمكن تحليلهما كلٌّ عن طريق زمرة البليب الأخرى بحسب تعريف زمرة البليب، أي إنّ $\phi_1 = \theta_1\phi_2$ و $\phi_2 = \theta_2\phi_1$ أثبت أنّ θ_1 تماثل من G_2^* غامر لـ G_1^*، من خلال إثبات أنّ $\theta_1\theta_2$ و$\theta_2\theta_1$ هما الدالتان المحايدتان].

ب. أثبت وجود زمرة بليب G^* لأيّ زمرة G.

جـ. أيّ المفاهيم التي درسناها سابقًا تقابل فكرة زمرة البليب لـ G هذه؟



الشكل 15.39



الشكل 14.39

13. لتكن S أي مجموعة. تشكل الزمرة G مع الدالة المحددة $g: S \to G$ **زمرة بلوب على** S **(blob group on S)**، فإذا كان لكل زمرة G' ودالة $f: S \to G'$، فيوجد تشاكل وحيد ϕ_f من G إلى G'، حيث إنّ $f = \phi_f\, g$ (انظر الشكل 15.39).

أ. لتكن S مجموعة محددة. أثبت أنه إذا كان كل من G_1 مع $g_1: S \to G_1$، و G_2 مع $g_2: S \to G_2$ زمرتي بلوب على S،

فإنّ G_1 و G_2 متماثلتان. [مساعدة: أثبت أنّ g_1 و g_2 دالتان أحاديتان، وأنّ g_1S و g_2S تولدان G_1 و G_2، على الترتيب، ثم تابع بطريقة مماثلة لتلك المعطاة في مساعدة التمرين 12].

ب. لتكن S مجموعة. أثبت وجود زمرة بلوب لـ S. يمكنك استعمال أيّ من مبرهنات الكتاب.

ج. أيّ المفاهيم التي درسناها سابقًا تقابل فكرة زمرة البلوب على S هذه؟

14. شخّص الزمرة الإبدالية الحرّة باستخدام خصائص بطريقة مشابهة لتلك المستخدمة في التمرين 13.

الفصل 40 تمثيلات الزمر Group Presentations

تعريف

باتباع معظم ما كتب في تمثيلات الزمر، سندع في هذا الفصل 1 ليكون العنصر المحايد في الزمرة، ففكرة تمثيل الزمرة هي تكوين الزمرة بإعطاء مجموعة من المولدات للزمرة ومعادلات أو علاقات محددة، التي نريد أن تحققها الموالدات، حيث نريد أن تكون الزمرة حرّة قدر الإمكان على المولدات، تبعًا لهذه العلاقات.

1.40 مثال افترض أنّ لـ G مولدين x و y، وهي حرّة ما عدا العلاقة $xy = yx$، التي يمكننا التعبير عنها بـ $xy\,x^{-1}\,y^{-1} = 1$. لاحظ أنّ الشرط $xy = yx$ هو بالضبط ما نحتاج إليه لجعل G إبدالية، على الرغم من أنّ $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$ هو مجرد واحد من كثير من المبدلات الممكنة في $F[\{x, y\}]$. إذن، G إبدالية حرة بمولدين، وتماثل $F[\{x, y\}]$ مقياس زمرتها الجزئية للمبدلات، والزمرة الجزئية لمبدلات $F[\{x, y\}]$ هذه هي أصغر زمرة جزئية ناظمية تحوي $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$؛ لأن أيّ زمرة جزئية ناظمية تحوي $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$ تعطي زمرة عامل إبدالية، وهكذا فهي تحوي الزمرة الجزئية للمبدلات بحسب المبرهنة 20.15. ▲

يوضح المثال السابق الحالة العامة. لتكن $F[A]$ زمرة حرّة، وافترض أننا نريد تكوين زمرة جديدة تشبه $F[A]$ قدر الإمكان، تبعًا لمعادلات محددة نريد تحقيقها، يمكن كتابة أيّ معادلة على أن يكون الطرف الأيمن منها يساوي 1؛ إذن، يمكننا كتابة المعادلات لتكون $r_i = 1$، حيث $i \in I$، و $r_i \in F[A]$، فإذا اشترطنا أنّ $r_i = 1$، فسيكون علينا أن نجد:

$$x(r_i^{\,n})\,x^{-1} = 1$$

لأيّ $x \in F[A]$ و $n \in \mathbb{Z}$، وكذلك، فإنّ حاصل ضرب عناصر تساوي 1 هو كذلك يجب أن يساوي 1؛ إذن، أيّ ضرب منتهٍ على الصورة:

$$\prod_j x_j\left(r_{i_j}{}^{n_j}\right)x_j^{-1},$$

حيث الـ r_{ij} ليست بالضرورة مختلفة، سيكون عليه أن يساوي 1 في الزمرة الجديدة، ومن السهل التحقق من أنّ مجموعة حواصل الضرب المنتهية هذه تكوّن زمرة جزئية ناظمية R في $F[A]$؛ إذن، أيّ زمرة تشبه $F[A]$ قدر الإمكان، تبعًا للشروط $r_i = 1$، تحقق كذلك $r = 1$ لكل $r \in R$؛ ولكن $F[A]/\mathrm{R}$ تشبه $F[A]$ (تذكر أننا نضرب مجموعات مشاركة باختيار الممثلين)، ما عدا أنّ R قد اضمحلت لتشكل العنصر المحايد 1. إذن، الزمرة التي نسعى وراءها (على الأقل مماثلة لـ) $F[A]/R$. يمكننا عرض هذه الزمرة، وكأنها مولدة بالمجموعة A والمجموعة $\{r_i \mid i \in I\}$، التي سنختصرها بـ $\{r_i\}$.

نبذة تاريخية

ظهرت فكرة تمثيل الزمرة في بحث آرثر كيلي عام 1859م، "حول مبرهنة الزمر المعتمدة على المعادلة الزمرية $\theta^n = 1$. الجزء الثالث".

في هذا المقال، أعطى كيلي حسابًا كاملًا للزمر الخمس من الرتبة 8، بذكر عناصر كل منها، وبإعطاء تمثيل كل منها، على سبيل المثال: كان مثاله الثالث ما أسميناه هنا الزمرة الثامنة؛ لاحظ كيلي أنّ هذه الزمرة مولدة بعنصرين α و β مع العلاقات $\alpha^4 = 1$ ، $\beta^2 = 1$، $\alpha\beta = \beta\alpha^3$، وقد برهن كذلك بصورة أكثر عمومًا بأنّ الزمرة من الرتبة mn مولدة بعنصرين α, β مع العلاقات $\alpha^m = 1$. $\beta^n = 1$ ، $\alpha\beta = \beta\alpha^s$ ، إذا وفقط إذا كان $s^n \equiv 1$ (مقياس m) (انظر التمرين 13).

عام 1878م، عاد كيلي إلى مبرهنة الزمر، ولاحظ أنّ المسألة المركزية في تلك المبرهنة، هي تحديد الزمر جميعها من رتبة n معطاة، وفي بدايات عام 1890م، نشر أوتو هولدر (Otto Holder) كثيرًا من الأبحاث في محاولة لحلّ مسألة كيلي، مستخدمًا تقنيات مماثلة لتلك التي نوقشت في الفصول 36، و 37، و 40، وقد حدّد هولدر الزمر البسيطة كلها من الرتب الأقل من 200 ، وشخّص الزمر كلها من الرتب p^3، pq^2، pqr، و p^4 حيث p ، q ، r أعداد أولية مختلفة، إضافة إلى ذلك، طوّر تقنيات لتحديد البنية الممكنة لزمرة G ، إذا عُلمت بنية زمرة جزئية ناظمية H وبنية زمرة العامل G / H، وبصورة مثيرة للانتباه، لأنّ فكرة الزمر المجرّدة كانت لا تزال إلى حدّ لا بأس به جديدة في ذلك الوقت، فإنّ هولدر بدأ أبحاثه بصورة نموذجية بتعريف الزمرة، وأكد أنّ الزمر المتماثلة هي في الجوهر واحدة والشيء نفسه.

2.40 تعريف لتكن A مجموعة، ولتكن $\{r_i\} \subseteq F[A]$. لتكن R أصغر زمرة جزئية ناظمية في $F[A]$، وتحوي الـ r_i، فيسمى التماثل ϕ من $F[A]/R$ غامرًا للزمرة G **تمثيلاً لـ** G **(presentation)**. المجموعات A و$\{r_i\}$ تعطي **تمثيل الزمرة (group presentation)**. المجموعة A هي **مجموعة المولدات للتمثيل (generators for the presentation)**، وكل r_i **علائقي (relator)**، كل $r \in R$ هو **نتيجة لـ** $\{r_i\}$ **(consequence)**. المعادلة

$r_i = 1$ هي **علاقة (Relation)**، و**التمثيل المنتهي (finite presentation)** هو ذلك الذي يكون فيه كل من A و $\{r_i\}$ مجموعة منتهية. ■

قد يبدو هذا التعريف معقدًا، ولكنه في الحقيقة ليس كذلك، ففي المثال 1.40، $\{x, y\}$ هي مجموعتنا للمولدات و $xyx^{-1}y^{-1}$ هو العلائقي الوحيد، والمعادلة $xyx^{-1}y^{-1} = 1$، أو $xy = yx$ هي علاقة. كان هذا مثالاً لتمثيل منتهٍ.

إذا كان تمثيل الزمرة له مولدات x_j وعلائق r_i، فنستخدم الترميز:

$$(x_j : r_i) \text{ أو } (x_j : r_i = 1)$$

للتعبير عن تمثيل الزمرة، يمكننا أن نشير إلى $F[\{x_j\}]/R$ بوصفها زمرة ذات تمثيل $(x_j : r_i)$.

التمثيلات المتماثلة

3.40 مثال ليكن تمثيل الزمرة بـ

$$\{r_i\} = \{a^6\} \text{ و } A = \{a\}$$

أي التمثيل

$$.(a : a^6 = 1)$$

هذه الزمرة معرفة بمولد واحد a وعلاقة $a^6 = 1$ ، تماثل $\mathbb{Z}_6$.

الآن، افترض الزمرة المعرفة بمولدين a و b، مع $a^2 = 1$، $b^3 = 1$ و $ab = ba$، أي الزمرة ذات التمثيل:

$$.(a, b : a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1})$$

الشرط $a^2 = 1$ يعطي $a^{-1} = a$. كذلك $b^3 = 1$ تعطي $b^{-1} = b^2$؛ إذن، كل عنصر في هذه الزمرة يمكن كتابته بوصفه ضربيًا لقوًى غير سالبة لـ a و b، وتمكننا العلاقة $aba^{-1}b^{-1} = 1$، أي $ab = ba$، من كتابة العوامل كلها التي تتضمن a أولاً، ثم العوامل التي تتضمن b؛ إذن، كل عنصر في الزمرة يساوي أحد $a^m b^n$ ، ولكن $a^2 = 1$ و $b^3 = 1$ تثبت وجود ستة عناصر مختلفة فقط،

$$1, b, b^2, a, ab, ab^2.$$

لذلك، فإنّ هذا التمثيل يعطي كذلك زمرة رتبتها 6 ، وهي كذلك إبدالية، وبحسب المبرهنة الأساسية 12.11، يجب أن تكون كذلك دورية وتماثل $\mathbb{Z}_6$. ▲

يوضح المثال السابق أنّ التمثيلات المختلفة يمكن أن تعطي زمرًا متماثلة، وعندما يحدث هذا، فإنّ لدينا **تمثيلات متماثلة (isomorphic presentations)**، لتحديد ما إذا كان تمثيلان متماثلان أمرًا قد يكون صعبًا جدًّا. لقد أُثبت (انظر [22] Rabin) أنّ عددًا من مثل هذه المسائل المرتبطة بهذه المبرهنة ليست بوجه عام قابلة للحل؛ أي لا توجد طريقة رتيبة وحسنة التعريف لاكتشاف حل للحالات جميعها، حيث تتضمن هذه المسائل غير المحلولة مسألة تحديد ما إذا كان تمثيلان متماثلين، ما إذا كانت الزمرة المعطاة بالتمثيل منتهية، أو حرة، إبدالية، أو تافهة، ومسألة الكلمة المشهورة لتحديد ما إذا كانت كلمة معطاة w ، هي نتيجة مجموعة علاقات $\{r_i\}$ معطاة.
ظهرت أهمية هذه المادة في مبرهنتنا 13.39، التي تضمن أنّ كل زمرة لها تمثيل.

4.40 مثال لنثبت أنّ:

$$(x, y : y^2x = y, yx^2y = x)$$

تمثيل للزمرة التافهة بعنصر واحد. نحتاج فقط إلى إثبات أنّ x و y نتائج للعلائق y^2xy^{-1} و yx^2yx^{-1}، أو أنّ $x = 1$ و $y = 1$ يمكن أن تستنتج من $y^2x = y$ و $yx^2y = x$. سنوضح كلتا التقنيتين.

بوصفها نتيجة لـ y^2xy^{-1}، نحصل على yx بناءً على المرافقة بـ y^{-1}. ومن yx نستنتج $x^{-1}\,y^{-1}$، وهكذا، فإنّ $(yx^2yx^{-1})\,(x^{-1}\,y^{-1})$ تعطي xyx^{-1}، وبمرافقة xyx^{-1} بـ x^{-1}، نحصل على y. ونحصل من y على y^{-1}، و $y^{-1}(yx)$ هي x.

وبالعمل بالعلاقات بدلاً من العلائق، من $y^2x = y$، نستنتج أنّ $yx = 1$ عند الضرب بـ y^{-1} من اليسار، ثمّ بتعويض $yx = 1$ في $yx^2\,y = x$، أي إنّ $(yx)(xy) = x$، ونحصل على $xy = x$، ثمّ بالضرب بـx^{-1} من اليسار، نحصل على $y = 1$، وبتعويض هذا في $yx = 1$، نحصل على $x = 1$.

تحتاج كلتا التقنيتين إلى العمل نفسه، ولكن بطريقة ما يبدو العمل بالعلاقات طبيعيًّا أكثر لمعظمنا. ▲

تطبيقات

ننهي هذا الفصل بتطبيقين.

مثال 5.40 لنحدد الزمر من الرتبة 10 تبعًا للتماثل، حيث نعلم من المبرهنة الأساسية 12.11 أنّ كل زمرة إبدالية من الرتبة 10 تماثل $\mathbb{Z}_{10}$. افترض أنّ G غير إبدالية من الرتبة 10 – بحسب مبرهنة سيلو، تحوي G زمرة جزئية ناظمية H من الرتبة 5، ويجب أن تكون H دورية. ليكن a مولدًا لـ H، إذا G/H من الرتبة 2 ، وبذلك تكون مماثلة لـ $\mathbb{Z}_2$، فإذا كانت $b \in G$ و $b \notin H$، فيجب أن يكون $b^2 \in H$، ولأنّ كل عنصر في H ما عدا 1 له رتبة 5، وإذا كانت b^2 لا تساوي 1، فإنّ b^2 ستكون من الرتبة 5، وبذا تكون رتبة b تساوي 10، سيعني هذا أنّ G دورية، ما يناقض الفرض بأنّ G ليست إبدالية؛ إذن، $b^2 = 1$.

أخيرًا، لأنّ H زمرة جزئية ناظمية في G، فإنّ $b\,H\,b^{-1} = H$، ولأنّ المرافقة بـ b تعطي تمثلًا ذاتيًّا على H، فإنّ $ba\,b^{-1}$ يجب أن يكون عنصرًا آخر في H من الرتبة 5، وهكذا، فإنّ $ba\,b^{-1}$ تساوي a، a^2، a^3، أو a^4، ولكن $ba\,b^{-1} = a$ ستعطي $ba = ab$، وعندها ستكون G إبدالية؛ لأن a و b تولد G؛ إذن، احتمالات التمثيلات لـ G هي:

1. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$
2. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$
3. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4b)$

لاحظ أنّ التمثيلات الثلاثة هذه يمكن أن تعطي زمرًا رتبها على الأكثر **10**؛ لأن العلاقة الأخيرة $ba = a^ib$ تمكننا من التعبير عن كل ضرب لـ a و b في G على الشكل $a^s\,b^t$؛ إذن، $a^5 = 1$ و $b^2 = 1$ تثبت أنّ المجموعة

$$S = \{a^0b^0, a^1b^0, a^2b^0, a^3b^0, a^4b^0, a^0b^1, a^1b^1, a^2b^1, a^3b^1, a^4b^1\}$$

تتضمن عناصر G كلها.

إنه ليس واضحًا بعد أن هذه العناصر في S كلها مختلفة، ما يعني أن لدينا في الحالات الثلاث كلها زمرة رتبتها 10، على سبيل المثال: تمثيل الزمرة

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

يعطي زمرة فيها – وباستخدام قانون التجميع –

$$a = b^2a = (bb)a = b(ba) = b(a^2b) = (ba)(ab)$$
$$= (a^2b)(ab) = a^2(ba)b = a^2(a^2b)b = a^4b^2 = a^4$$

إذن، في هذه الزمرة $a = a^4$، وهكذا $a^3 = 1$، ما يؤدي بالترافق مع $a^5 = 1$، أنّ $a^2 = 1$. ولكن $a^2 = 1$، وبالترافق مع $a^3 = 1$، يعني أنّ $a = 1$؛ إذن، كل عنصر في الزمرة ذات التمثيل

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

يساوي إما 1 أو b؛ أي إنّ الزمرة تماثل $\mathbb{Z}_2$. دراسة مماثلة لـ

$$(bb)a = b(ba)$$

في

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

تثبت أنّ $a = a^4$ مرة أخرى، وهذا يؤدي كذلك إلى زمرة تماثل $\mathbb{Z}_2$.

يترك هذا فقط

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4b)$$

بوصفه مرشحًا لزمرة غير إبدالية من الرتبة 10. في هذه الحالة يمكن إثبات أن عناصر S جميعها مختلفة، وبهذا فإنّ هذا التمثيل يعطي زمرة غير إبدالية G من الرتبة 10. كيف يمكن إثبات أن العناصر في S كلها تمثل عناصر مختلفة في G؟ الطريقة السهلة، وهي ملاحظة أننا نعلم أنه توجد على الأقل زمرة غير إبدالية واحدة من الرتبة 10، الزمرة الزوجية D_5، ولأنّ G هي المرشحة الوحيدة المتبقية، فيجب أن نحصل على $G \simeq D_5$.

وطريقة أخرى للمعادلة كما يأتي: لنحاول جعل S زمرة بتعريف $(a^s\ b^t)\ (a^u\ b^v)$ لتكون $a^x\ b^y$، حيث x هو الباقي من قسمة $s + u\ (4^t)$ على 5، و y هي باقي قسمة $t + v$ على 2، بمفهوم خوارزمية القسمة (المبرهنة 3.6)، وبكلمات أخرى، نستخدم العلاقة $ba = a^4b$ بوصفها دليلًا في تعريف حاصل ضرب $(a^s\ b^t)\ (a^u\ b^v)$ لعنصرين في S، حيث نرى أنّ a^0b^0 تؤدي دور العنصر المحايد، وإذا أعطينا $a^u\ b^v$، فيمكننا تحديد t و s بالتوالي بجعل:

$$t \equiv - v \quad \text{(مقياس 2)}$$

ثمّ

$$s \equiv -u(4^t) \quad \text{(مقياس 5)}$$

ما يعطي $a^s\ b^t$، المعكوس من اليسار لـ $a^u\ b^v$، وهكذا سنحصل على بنية للزمرة على S ، إذا وفقط إذا تحقق قانون التجميع. يسألنا التمرين 13 تنفيذ الحسابات المباشرة لقانون التجميع واكتشاف شرط على S لتكون زمرة مع مثل هذا التعريف للضرب.

المعيار في التمرين في هذه الحالة يوصل إلى صحّة التكافؤ.

$$4^2 \equiv 1 \quad \text{(مقياس 5).}$$

وهكذا، فإننا نحصل فعلًا على زمرة من الرتبة 10. لاحظ أنّ

$2^2 \not\equiv 1$ (مقياس 5).

و

$3^2 \not\equiv 1$ (مقياس 5).

وبهذا، فإنّ التمرين 13 يثبت كذلك أنّ:

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

و

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

لا تعطي زمرًا من الرتبة 10. ▲

6.40 مثال **لنحدد الزمر كلها من الرتبة 8 تبعًا للتماثل. نعرف الزمر الإبدالية الثلاث:**

$$\mathbb{Z}_8, \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

باستخدام المولدات والعلاقات، وسنعطي تمثيلات للزمر غير الإبدالية. لتكن G زمرة غير إبدالية من الرتبة 8، ولأنّ G ليست إبدالية، فإنها لا تحوي عناصر من الرتبة 8؛ إذن، فإنّ العناصر كلها ما عدا العنصر المحايد لها رتبة إما 2 أو 4، فإذا كان كل عنصر له رتبة 2، فإنّ لـ $a, b, \in G$، سنحصل على $(ab)^2=1$، أي إنّ $ab\, ab = 1$؛ إذن، ولأنّ $a^2=1$ و $b^2=1$ كذلك، فسنحصل على:

$$ba = a^2bab^2 = a(ab)^2b = ab,$$

ما يناقض فرضيتنا أنّ G غير إبدالية؛ إذن، يجب أن تحوي G عنصرًا من الرتبة 4. لتكن $<a>$ زمرة جزئية من G من الرتبة 4، فإذا كانت $b \notin < a >$، فإنّ المجموعتين المشاركتين $<a>$ و $b<a>$ تستهلك كل G؛ إذن، a و b مولدات لـ G و $a^4 = 1$، ولأنّ $<a>$ ناظمية في G (بحسب مبرهنة سيلو، أو لأن دليلها 2)، $G/<a>$ تماثل $\mathbb{Z}_2$ ولدينا $b^2 \in <a>$، وإذا كانت $b^2 = a$ أو $b^2 = a^3$، فإنّ رتبة b ستكون 8؛ إذن، $b^2 = 1$ أو $b^2 = a^2$.

أخيرًا، لأنّ $<a>$ ناظمية، فسيكون لدينا $bab^{-1} \in <a>$، ولأن $b<a>b^{-1}$ زمرة جزئية ترافق $<a>$ وبذلك تكون تماثل $<a>$، نرى أنّ bab^{-1} يجب أن يكون عنصرًا من الرتبة 4؛ إذن، bab^{-1} $= a$ أو $bab^{-1} = a^3$. وإذا كان bab^{-1} يساوي a، فإنّ ba ستساوي ab، وهذا سيجعل G إبدالية؛ إذن، $bab^{-1} = a^3$.

وبهذا، فإنّ $ba = a^3b$. وهكذا يصبح لدينا احتمالان لـ G، وهما:

$$G_1 : (a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

و

$$G_2 : (a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b).$$

لاحظ أنّ $a^{-1} = a^3$، وأنّ b^{-1} هي b في G_1 وهي b^3 في G_2. هذه الحقائق، مع العلاقة $ba = a^3b$، تمكننا من التعبير عن كل عنصر في G_i على الصورة a^mb^n، كما في المثالين 3.40 و 5.40، ولأنّ $a^4 = 1$ وإما $b^2 = 1$ أو $b^2 = a^2$، فاحتمالات العناصر في كل زمرة، هي:

$$1, \ a, \ a^2, \ a^3, \ b, \ ab, \ a^2b, \ a^3b.$$

إذن، G_1 و G_2 له رتبة على الأكثر 8. لأن G_1 زمرة من الرتبة 8 ، فيمكن رؤيته من التمرين 13، وبمناقشة شبيهة لتلك المستعملة في التمرين 13 تثبت أنّ G_2 لها رتبة 8 كذلك.

لأنّ $ba = a^3b \neq ab$ ، نرى أنّ G_1 و G_2 كليهما غير إبدالية؛ لأن الزمرتين غير متماثلتين، فينتج عن حقيقة أنّ الحسابات تثبت أنّ G_1 تحوي عنصرين فقط من الرتبة 4، وهما a و a^3. وعلى الجانب الآخر، في G_2 العناصر كلها عدا 1 و a^2 لها رتبة 4، حيث ندع حسابات الجداول لهاتين الزمرتين للتمرين 3. وللتوضيح، افترض أننا نودّ حساب $(a^2b)(a^3b)$، فباستخدام $ba = a^3b$ بصورة متكررة، نحصل على:

$$(a^2b)(a^3b) = a^2(ba)a^2b = a^5(ba)ab = a^8(ba)b = a^{11}b^2$$

إذن، نحصل في G_1 على:

$$a^{11}b^2 = a^{11} = a^3,$$

ولكن إذا كنا في G_2، فإننا نحصل على

$$a^{11}b^2 = a^{13} = a.$$

الزمرة G_1 **هي الزمرة الثمانية، (octic group)** وتماثل صديقتنا القديمة، الزمرة D_4 لتماثلات المربع، والزمرة G_2 **هي الزمرة المرباعية (quaternion group)**؛ إنها تماثل زمرة الضرب $\{1,-1, i,-i, j,-j, k,-k\}$ للمرباعيات. نوقشت المرباعيات في الفصل 24. ▲

تمارين 40

حسابات

1. أعطِ تمثيلًا لـ $\mathbb{Z}_4$ يتضمّن مولدًا واحدًا؛ مولدين؛ ثلاثة مولدات.

2. أعطِ تمثيلاً لـ S_3 يتضمّن ثلاثة مولدات.

3. أعطِ الجداول للزمرة الثامنة.

$$(a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

والزمرة المرباعية

$$(a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b).$$

في كلتا الحالتين، اكتب العناصر على الترتيب $1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$. لاحظ أننا لن نحتاج إلى حساب كل حاصل ضرب، نعلم أن هذين التمثيلين يعطيان زمرتين من الرتبة 8، وبمجرد أن نحسب عددًا كافيًا من حواصل الضرب، فإن البقية ستكون حتمًا أنَّ كل صف وكل عمود في الجدول يحوي العنصر مرة واحدة فقط).

4. عيّن الزمر جميعها من الرتبة 14 تبعًا للتماثل. [مساعدة: تتبع خطوات حل المثال 5.40، واستخدم التمرين 13، الفرع (ب)].

5. عيّن الزمر جميعها من الرتبة 21 تبعًا للتماثل. [مساعدة: تتبع خطوات حل المثال 5.40، واستخدم التمرين 13، الفرع (ب). قد يظهر أن هناك تمثيلين يعطيان زمرتين غير إبداليتين. أثبت أنهما متماثلتان].

مفاهيم

في التمرينين 6 و 7، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إن كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

6. النتيجة لمجموعة من العلائق، هي حاصل ضرب منتهٍ من العلائق مرفوعة لقوًى.

7. يكون تمثيلا زمرتين متماثلاً، إذا وفقط إذا وجد تقابل بين مولدات التمثيل الأول ومولدات الثاني، الذي ينتج – بعد إعادة تسمية المولدات – تقابلاً بين علائق التمثيل الأول مع تلك التي تخصّ الثاني.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. لكل زمرة تمثيل.

______ ب. لكل زمرة كثير من التمثيلات المختلفة.

______ ج. لكل زمرة تمثيلان غير متماثلين.

______ د. لكل زمرة تمثيل منتهٍ.

______ هـ. كل زمرة ذات تمثيل منتهٍ تكون ذات رتبة منتهية.

______ و. لكل زمرة دورية تمثيل بمولد واحد فقط.

______ ز. كل مرافق لعلائقي يكون نتيجة لعلائقي.

______ ح. أيّ تمثيلين بالعدد نفسه من المولدات يكونان دائمًا متماثلين.

______ ط. في تمثيل لزمرة إبدالية، مجموعة النتائج للعلائق تحوي الزمرة الجزئية لمبدلات زمرة حرة على المولات.

______ ي. في كل تمثيل لزمرة حرّة يكون الـ 1 العلائقي الوحيد.

براهين

استخدم طرق هذا الفصل والتمرين 13، الفرع (ب) في إثبات عدم وجود زمر غير إبدالية من الرتبة 15. (ارجع كذلك للمثال 10.37).

9. أثبت – مستخدمًا التمرين 13 – أنّ

$$(a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b)$$

يعطي زمرة من الرتبة 6. أثبت أنها غير إبدالية.

10. أثبت أنّ التمثيل

$$(a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b)$$

في التمرين 10 يعطي (تبعًا للتماثل) الزمرة غير الإبدالية الوحيدة من الرتبة 6، وبهذا يعطي زمرة تماثل S_3.

11. أثبتنا في المثال 6.15 أنّ A_4 لا تحوي زمرة جزئية من الرتبة 6، ويثبت التمرين السابق أنّ مثل هذه الزمرة الجزئية من A_4، ستكون مماثلة إما لـ $\mathbb{Z}_6$ أو S_3. أثبت أنّ هذا مستحيل آخذًا رتب العناصر في الحسبان.

12. لتكن:

$$S = \{a^i b^j \mid 0 \le i < m, 0 \le j < n\},$$

أي إنّ S تتألف من الضرب الشكلي $a^i b^j$ بدءًا بـ $a^0 b^0$ وانتهاءً بـ $a^{m-1} b^{n-1}$. ليكن r عددًا صحيحًا موجبًا، وعرّف الضرب على S بـ

$$(a^s b^t)(a^u b^v) = a^x b^y,$$

حيث x باقي قسمة $s + u\,(r^t)$ على m، و y باقي قسمة $t + v$ على n، باستخدام خوارزمية القسمة (المبرهنة 3.6).

أ. أثبت أنّ الشرط الضروري والكافي لتحقق قانون التجميع و لـ S لتصبح زمرة مع هذا الضرب، أن تكون $r^n \equiv 1$ (مقياس m).

ب. استنتج من الفرع (أ) أنّ تمثيل الزمرة:

$$(a, b : a^m = 1, b^n = 1, ba = a^r b)$$

يعطي زمرة من الرتبة mn، إذا وفقط إذا كان $r^n \equiv 1$ (مقياس m).

13. (انظر النبذة التاريخية في صفحة 449). أثبت أنه إذا كان $n = pq$، حيث p و q عددان أوليّان و $q > p$ و $q \equiv 1$ (مقياس p) فتوجد بالضبط زمرة غير إبدالية واحدة (تبعًا للتماثل) من الرتبة n. تذكر أنّ $q - 1$ عنصر غير صفري في $\mathbb{Z}_q$ يولد زمرة دورية $\mathbb{Z}^*_q$ مع الضرب مقياس q. [مساعدة: تشكل حلول $x^p \equiv 1$ (مقياس q) زمرة جزئية من $\mathbb{Z}^*_q$ ذات عناصر $1, r, r^2, \ldots, r^{p-1}$. في الزمرة ذات التمثيل $(a, b : a^q = 1, b^p = 1, ba = a^r b)$، نحصل على $bab^{-1} = a^r$، وبهذا يكون $b^j a b^{-j} = a^{(r^j)}$؛ إذن، ولأنّ b^j تولد $\langle b \rangle$ لـ $j = 1, \cdots, p-1$، وهذا التمثيل يماثل

$$(a, b^j : a^q = 1, (b^j)^p = 1, (b^j)a = a^{(r^j)}(b^j)),$$

إذن، التمثيلات $(a, b : a^q = 1, b^p = 1, ba = a^{(r^j)} b)$ كلها متماثلة].

الوحدة الثامنة

الزمر في الطبولوجيا [1]
Groups in Topology

[1] الوحدة الثامنة ليست متطلبًا لبقية الكتاب.

مركب المبسطات والزمر الشباهية Simplicial Complexes and Homology Groups

تحفيز

تهتم الطبولوجيا بالمجموعات التي نملك عنها فكرة كافية، وإلى أيّ حدّ يجب أن تكون نقطتان فيها قريبتين من بعضهما؛ لنتمكن من تعريف دالة متصلة، فنقول عن اثنتين من هذه المجموعات – أو الفضاءات الطبولوجية إنّ لها البنية نفسها، إذا وجدت دالة أحادية غامرة من إحداهما للأخرى، بحيث إنّ كلا الدالة ومعكوسها متصل، وببساطة، فهذا يعني أنّ أحد الفضاءين يمكن أن يوسع، أو يلوى، أو يشوّه بطريقة أخرى من غير أن يشق أو يقطع، ليبدو تمامًا مثل الآخر؛ إذن، الكرة الكبرى طبولوجيًا لها البنية نفسها لكرة أصغر، ومحيط الدائرة له بنية محيط المربع نفسها، وهكذا، حيث تسمى الفضاءات ذات البنية المتشابهة بهذا المعنى **متماثلة استمراريًا** (***homeomorphic***). نأمل أن يدرك الطالب أنّ مفهوم التماثل المستمر في الطبولوجيا بوصفه مفهوم التماثل (حيث المجموعات لها البنية الجبرية نفسها) في الجبر.

المشكلة الرئيسة في الطبولوجيا هي إيجاد شروط ضرورية وكافية ومفيدة – مختلفة عن مجرد التعريف – لفضاءين ليكونا متماثلين استمراريًا، بوجه عام، يصعب إيجاد الشروط الكافية، بينما الشروط الضرورية متوافرة وسهلة، ولكنّ بعضها مهمّة جدًا ومفيدة، والفضاء "الظريف" تُربط به أنواع متعددة من الزمر، مثل: زمرة الشباه، وزمر الشباه المقابلة، وزمر التحاول، وزمر التحاول المقابلة.

إذا كان الفضاءان متماثلين استمراريًا، فيمكن إثبات أنّ زمر أحدهما تماثل الزمر المقابلة لها المرتبطة بالآخر؛ إذن، شرط ضروري للفضاءات لتكون متماثلة استمراريًا، أن تكون زمرها متماثلة، ويمكن أن تعكس بعض هذه الزمر صفات مفيدة لهذه الفضاءات، إضافة إلى ذلك، تُنشئ الدالة المتصلة من أحد الفضاءين إلى الآخر تشاكلاً من زمر أحدهما إلى زمر الآخر، ويمكن أن تظهر تشاكلات الزمر هذه خصائص مفيدة للدوال.

إذا لم يستطع الطالب فهم الفقرات السابقة، فلا داعي للقلق، فقد كان هدف الفقرات السابقة مجرد تحفيز لما سيأتي، وهدف هذا الفصل هو وصف بعض الزمر – زمر الشباه – المرتبطة ببعض الفضاءات البسيطة – في عملنا – وهي عادة بعض المجموعات الجزئية من الفضاء الإقليدي المعروف[3].

أفكار تمهيدية

أولًا، نقدّم فكرة المبسط من الرتبة n الموجه في الفضاء الإقليدي، حيث $n = 0, 1, 2, 3$ **المبسط الصفري الموجه** (***oriented 0 – simplex***) هو مجرد النقطة P، **والمبسط الأحادي الموجه** (***oriented 1 – simplex***) هو القطعة المستقيمة الموجهة P_1P_2، التي تصل بين النقطتين P_1 وP_2، وتظهر وكأنها تتحرك من P_1 إلى P_2، أمّا **المبسط الثنائي الموجه** (***oriented 2- simplex***)، فهو المنطقة المثلثة $P_1P_2P_3$ – كما في الشكل 1.41– مع اتجاه محدّد للحركة حول المثلث بوصفه مثالًا، وهو محدّد بالسهم في الشكل 1.41 كالترتيب $P_1P_2P_3$، من الواضح أنّ الترتيب $P_1P_2P_3$ مثل الترتيب $P_2P_3P_1$ و$P_3P_1P_2$، ولكنه معاكس للترتيب $P_1P_3P_2$، $P_3P_2P_1$ و $P_2P_1P_3$.

سنتفق على أنّ:

$$P_1P_2P_3 = P_2P_3P_1 = P_3P_1P_2 = -P_1P_3P_2 = -P_3P_2P_1 = -P_2P_1P_3$$

لاحظ أنّ $P_iP_jP_k$ يساوي $P_1P_2P_3$، إذا كانت:

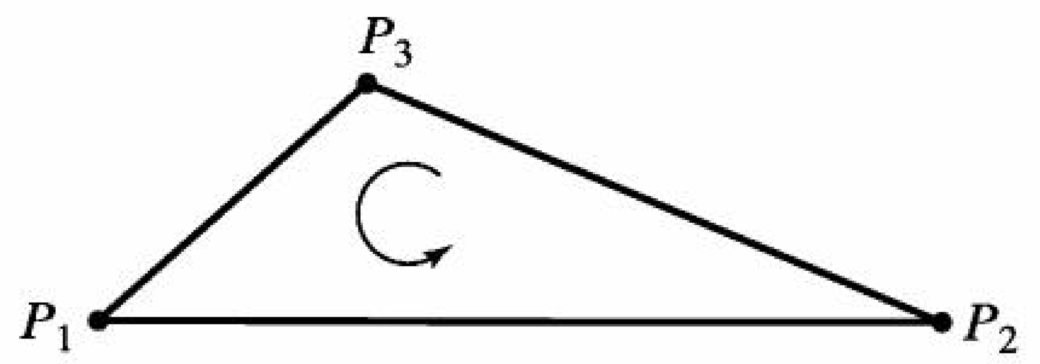
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

تبديلة زوجية، وتساوي $P_1P_2P_3$ – إذا كانت التبديلة فردية، كذلك يمكن القول عن المبسط الأحادي الموجه $P_1\,P_2$، لاحظ كذلك أنه لـ $n = 0,1,2$، المبسط من الرتبة n الموجه هو شيء له بعد n.

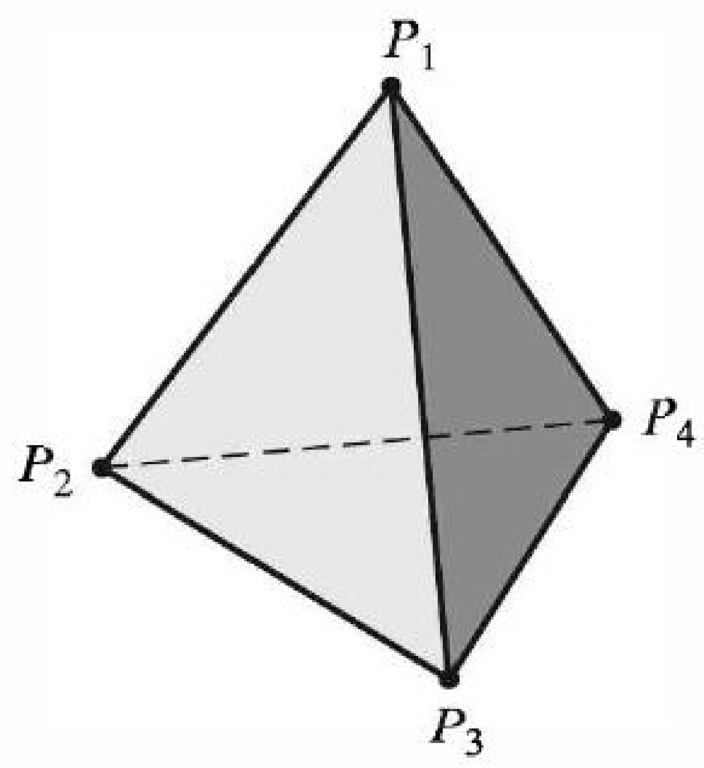
يجب أن يكون تعريف المبسط الثلاثي الموجه واضحًا الآن، حيث يُعطى **المبسط الثلاثي الموجه** (***oriented 3- simplex***) بوصفه متتالية مرتبة $P_1P_2P_3P_4$ لـ أربعة رؤوس لرباعي السطوح المجسم، كما في الشكل 2.41، حيث نتفق على أنّ $P_1P_2P_3P_4 = \pm\, P_iP_jP_rP_s$، بحسب ما إذا كانت التبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & r & s \end{pmatrix}$$

زوجية أم فردية، وتنطبق تعريفات مماثلة لـ $n > 3$، ولكن سنتوقف هنا مع الأبعاد التي يمكن أن نجسدها، فهذه المبسطات موجهة (***oriented***)، أولها **توجه** (***orientation***)، أي، نحن مهتمون بترتيب الرؤوس تمامًا، كما نحن مع النقاط الحقيقية، حيث تقع هذه الرؤوس، مبسطاتنا كلها ستكون موجهة، وسوف نسقط الصفة من الآن فصاعدًا.



الشكل 1.41



الشكل 2.41

سنعرف الآن حدود المبسط ذي البعد n لـ $n= 0,\ 1,2,3$. المصطلح حدود حدسي، نعرف **حدود المبسط الصفري** ***P*** (***boundary of a 0- simplex***) ليكون المبسط الخالي، الذي سنرمز له في هذه المرة بـ "0". الرمز هو:

$$"\partial_0\left(P\right)=0"$$

حدود المبسط 1- $\boldsymbol{P_1P_2}$ ***(boundary of a 1- simplex)*** معرّف بـ :

$$\partial_1(P_1P_2)=P_2-P_1$$

أي، الفرق الصوري بين نقطة النهاية ونقطة البداية، ومثلها **حدود المبسط الثنائي** (***boundary of a 2- simplex***) معرّف بـ:

$$.\partial_2\left(P_1P_2P_3\right)= P_2P_3- P_1P_3 + P_1P_2$$

الذي يمكن تذكره بالقول: إنه الجمع الشكلي للحدود التي نحصل عليها بإسقاط كل P_i بالتتابع من المبسط الثنائي $P_1P_2P_3$، وجعل الإشارة + إذا أسقط الحدّ الأول، − إذا أسقط الثاني، و+ إذا أسقط الثالث، وبالرجوع إلى الشكل 1.41، نرى أنّ هذا يقابل الحركة حول ما نسميه عادة الحدود في الاتجاه المحدد للسهم، لاحظ كذلك أنه يمكن تذكر المعادلة $\partial_1\left(P_1P_2\right)=P_2\ -\ P_1$ بالطريقة نفسها؛ إذن، نحن نتجه إلى تعريف **حدود المبسط الثلاثي** (***boundary of a 3- simplex***) الآتي:

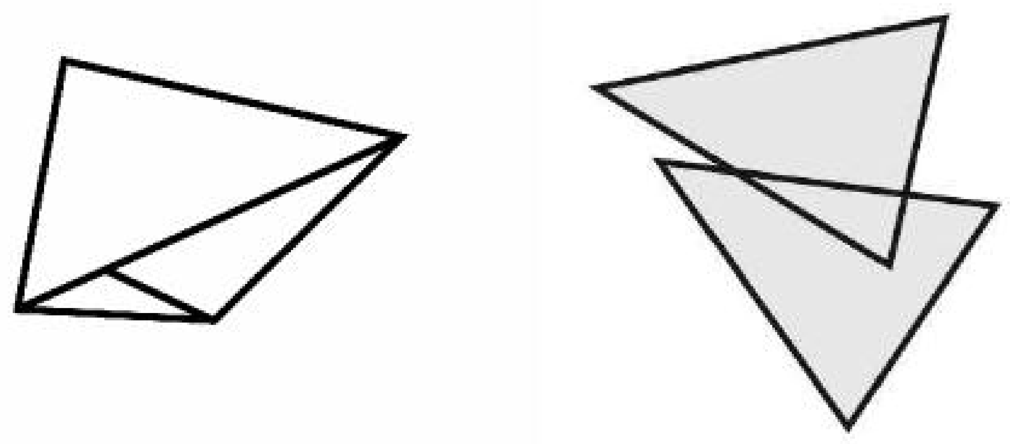
$$\partial_3\left(P_1P_2P_3P_4\right)= P_2P_3P_4- P_1P_3P_4 + P_1P_2P_4 -P_1P_2P_3$$

تتحقق تعريفات مشابهة لـ ∂_n حيث $n > 3$، وكل فرد من المُجمعات في حدود المبسط يسمى **وجهًا للمبسط** (***face of a simplex***)؛ إذن، $P_2P_3P_4$ وجه $P_1P_2P_3P_4$، ولكن $P_1P_3P_4$ ليس وجهًا، وعلى أيّ حال، فإنّ $P_1P_4P_3 = -P_1P_3P_4$ وجه لـ $P_1P_2P_3P_4$.

افترض أنّ لديك مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ مقسمة "بصورة رائعة" إلى مبسطات، على سبيل المثال سطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41، الذي يمكن تقسيمه إلى أربعة مبسطات ثنائية منسجمة مع بعضها بصورة رائعة؛ إذن، توجد لدينا في سطح رباعي السطوح، بعض المبسطات الصفرية، أو الرؤوس لرباعي السطوح، بعض المبسطات الأحادية أو حواف رباعي السطوح، بعض المبسطات الثنائية، أو المثلثات في رباعي السطوح، بوجه عام، لتقسيم فضاء ما "بصورة رائعة" إلى مبسطات، نحتاج إلى الحقائق الآتية:

1. كل نقطة في الفضاء تنتمي على الأقل إلى مبسط واحد.

2. كل نقطة في الفضاء تنتمي فقط إلى عدد منتهٍ من المبسطات.



الشكل 3.41

3. لكل مبسطين مختلفين (تبعًا للاتجاه)، إما ألا توجد بينهما نقاط مشتركة أو أحدهما (ربما ما عدا الاتجاه) وجه للآخر أو وجه لوجه في الآخر... إلخ، أو أنّ مجموعة النقاط المشتركة (ربما ما عدا الاتجاه) وجه، أو وجه لوجه... إلخ، ولكل مبسط، يستثنى الشرط (3) الصور مثل تلك المعروضة في الشكل 3.41، حيث يسمّى الفضاء المقسم إلى مبسطات تبعًا لهذه المتطلبات **مركب مبسطات** (***simplicial complex***).

السلاسل، والدورات، والحدود

لنصف بعض الزمر المرتبطة بمبسط مركب X، سنوضّح كل تعريف بحالة سطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41، **الزمرة $C_n(X)$ للسلاسل ذات الرتبة n (الموجهة) لـ*X*(*group $C_n(X)$ of (oriented) n – chains*)**، هي الزمرة الإبدالية الحرّة المولدة بالمبسطات ذات الرتبة n (الموجهة) لـ X؛ إذن، كل عنصر في $C_n(X)$ مجموع منتهٍ على الصورة $\sum_i m_i\sigma_i$، حيث σ_i مبسطات ذات رتبة n لـ X و $m_i \in \mathbb{Z}$، وننجز الجمع للسلاسل بأخذ الجمع الجبري لمعاملات كل ظهور في السلاسل لمبسط محدد.

4.41 مثال في سطح رباعي السطوح S، كل عنصر في $C_2(S)$ يكون على الصورة:

$$m_1P_2P_3P_4 + m_2P_1P_3P_4 + m_3P_1P_2P_4 + m_4P_1P_2P_3$$

حيث $m_i \in \mathbb{Z}$، وبوصفه توضيحًا للجمع، لاحظ أنّ:

$$(3P_2P_3P_4 - 5P_1P_2P_3) + (6P_2P_3P_4 - 4P_1P_3P_4)$$
$$= 9P_2P_3P_4 - 4P_1P_3P_4 - 5P_1P_2P_3$$

ويكون العنصر في $C_1(S)$ على الصورة:

$$m_1P_1P_2 + m_2P_1P_3 + m_3P_2P_4 + m_4P_2P_3 + m_5P_2P_4 + m_6P_3P_4$$

ويكون العنصر في $C_0(S)$ على الصورة:

$$m_1P_1 + m_2P_2 + m_3P_3 + m_4P_4 \qquad \blacktriangle$$

الآن، إذا كان σ مبسطًا ذا رتبة n، فإنّ $\partial_n(\sigma) \in C_{n-1}(X)$ لكل $n = 1, 2, 3$. لنعرّف $C_{-1}(X) = \{0\}$ الزمرة التافهة في عنصر واحد؛ وهكذا، سنحصل على $\partial_0(\sigma) \in C_{-1}(X)$، ولأنّ $C_n(X)$ إبدالية حرة، ولأننا نستطيع تعيين التشاكل لمثل هذه الزمرة بإعطاء قيمها على المولدات، فنرى أنّ ∂_n تعطي تشاكل حدود **(boundary homomorphism)** وحيدًا، الذي سنرمز له مرة أخرى بـ "∂_n" ويربط $C_n(X)$ بـ $C_{n-1}(X)$، حيث $n = 0, 1, 2, 3$.

مثال 5.41 لدينا:

$$\partial_n\left(\sum_i m_i\sigma_i\right) = \sum_i m_i\partial_n(\sigma_i)$$

على سبيل المثال:

$$\begin{aligned}\partial_1(3P_1P_2 - 4P_1P_3 + 5P_2P_4) &= 3\partial_1(P_1P_2) - 4\partial_1(P_1P_3) + 5\partial_1(P_2P_4)\\ &= 3(P_2 - P_1) - 4(P_3 - P_1) + 5(P_4 - P_2)\\ &= P_1 - 2P_2 - 4P_3 + 5P_4\end{aligned}$$

▲

يُذكّر الطالب مرة أخرى، أنه في أيّ وقت يكون لديه فيه تشاكل، فإنّ هناك شيئين مهمّين جدًّا، هما: النواة ومجموعة الصور، حيث تتألف نواة ∂_n من تلك السلاسل ذات الحدود 0 والبعد n، أمّا عناصر النواة فهي **الدورات ذات الرتبة n (n – cycles)**، والرمز المعتاد لنواة – أي زمرة ∂_n **الدورات ذات البعد n (group of n cycles)** – هي "$Z_n(X)$".

مثال 6.41 إذا كان $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$، فإنّ

$$\partial_1(z) = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + (P_1 - P_3) = 0,$$

إذن، z دورة أحادية، وعلى أيّ حال، إذا جعلنا $c = P_1P_2 + 2P_2P_3 + P_3P_1$،

فإنّ $\partial_1(c) = (P_2 - P_1) + 2(P_3 - P_2) + (P_1 - P_3) = -P_2 + P_3 \neq 0$

إذًا $c \notin Z_1(X)$ ▲

لاحظ أنّ $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$ في المثال 6.41 تقابل دائرة واحدة – أو دورة – حول المثلث ذي الرؤوس P_1، P_2، و P_3.

مجموعة صور ∂_n – **زمرة الحدود ذات الرتبة $(n - 1)$ (group of $(n - 1)$ – boundaries)** – تتألف بالضبط من السلاسل ذات البعد n، التي تكون حدود السلاسل ذات البعد n، ويرمز لهذه الزمرة بـ:

"$B_{n-1}(X)$".

7.41 مثال بالرجوع إلى المثال 6.41، نرى أنه إذا كان:

$$P_1P_2 + 2P_2P_3 + P_3P_1$$

سلسلة أحادية في $C_1(X)$، فإنّ $P_3 - P_1$ تكون حدودًا صفرية، لاحظ أنّ $P_3 - P_2$ تحدّ P_2P_3.
▲

لنحسب الآن $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ لمثال أكثر تعقيدًا، ففي الطبولوجيا، إذا كانت الزمرة هي الزمرة التافهة المكوّنة فقط من العنصر المحايد 0، فإننا نرمز لها في العادة بـ "0" بدلاً من "$\{0\}$". سنتبع هذه العادة فيما يأتي.

8.41 مثال لنحسب لـ $n = 0, 1, 2$ الزمر $Z_n(S)$ و $B_n(S)$ لسطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41.

أولاً – للحالات الأسهل – لأنَّ المبسط ذا البعد الأكبر في المسطح هو المبسط الثنائي، فإننا نحصل على $C_3(S) = 0$؛ إذن،

$$B_2(S) = \partial_3[C_3(S)] = 0$$

وكذلك، لأنّ $C_{-1}(S) = 0$ بحسب تعريفنا، فنرى أنّ:

$$Z_0(S) = C_0(S)$$

إذن، $Z_0(S)$ الإبدالية الحرّة لها أربعة مولدات، P_1، و P_2، و P_3، و P_4، ومن السهل ملاحظة أنّ صورة الزمرة بالتشاكل مولدة بصور المولدات في الزمرة الأصلية، ولأنَّ $C_1(S)$ مولدة بـ P_1P_2، و P_1P_3، و P_1P_4، و P_2P_3، و P_2P_4، و P_3P_4، فنرى أنّ $B_0(S)$ مولدة بـ:

$$P_2 - P_1,\ P_3 - P_1,\ P_4 - P_1,\ P_3 - P_2,\ P_4 - P_2,\ P_4 - P_3$$

وعلى أيّ حال، فإنّ $B_0(S)$ ليست إبدالية حرّة على هذه المولدات، على سبيل المثال:

$P_3 - P_2 = (P_3 - P_1) - (P_2 - P_1)$، ومن السهل ملاحظة أنّ $B_0(S)$ إبدالية حرّة على $P_2 - P_1$، $P_3 - P_1$، و $P_4 - P_1$.

لِنَسْعَ – الآن – خلف الزمرة الأصعب $Z_1(S)$. العنصر c في $C_1(S)$ هو الجمع الشكلي للمضاعفات الصحيحة للحوافّ P_iP_j، من الواضح أنّ $\partial_1(c) = 0$ إذا وفقط إذا كان كل رأس تبدأ به ما مجموعها (بحساب التكرار) r من الحوافّ في c، فهو كذلك نقطة النهاية لـ r من الحوافّ بالضبط؛ إذن:

$$z_1 = P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_2,$$
$$z_2 = P_1P_4 + P_4P_3 + P_3P_1,$$
$$z_3 = P_1P_2 + P_2P_4 + P_4P_1,$$
$$z_4 = P_1P_3 + P_3P_2 + P_2P_1$$

كلها دورات أحادية، وهذه هي بالضبط حدود المبسطات الثنائية المفردة، نزعم أنّ ألـ z_i تتولد $Z_1(S)$. ليكن $z \in Z_1(S)$، واختر رأسًا محدّدًا، وليكن P_1؛ لنعمل على الحوافّ التي تكون P_1 نقطة نهاية لها، فهذه الحواف هي: P_1P_2، و P_1P_3، و P_1P_4.

ليكن m_j معامل P_1P_j في z؛ إذن:

$$z + m_2 z_4 - m_4 z_2$$

هو دورة كذلك، ولكن لا تحوي الحوافّ P_1P_2 أو P_1P_4؛ إذن، الحافّة الوحيدة التي يكون فيها P_1 رأسًا في الدورة $z + m_2 z_4 - m_4 z_2$ هي ربما P_1P_3، ولكن هذه الحافة لا يمكن أن تظهر بمعامل لا يساوي صفرًا؛ لأنها في هذه الحالة ستشارك في مضروب غير صفري للرأس P_1 للحدود، ما يناقض حقيقة أنّ حدود الدورة تساوي صفرًا. إذن $z + m_2 z_4 - m_4 z_2$ تتألف من حوافّ المبسط الثنائي $P_2P_3P_4$، ولأنه في أيّ دورة أحادية يظهر كل من P_2، و P_3 و P_4 عددًا متساويًا من المرات بوصفها نقاط بداية ونهاية للحواف في الدورة – عادًّا التكرار – ، فنرى أنّ:

$$z + m_2 z_4 - m_4 z_2 = r z_1$$

حيث r عدد صحيح؛ إذن، تُولد $Z_1(S)$ بألـ z_i – في الحقيقة بأيّ ثلاثة من ألـ z_i – لأنَّ ألـ z_i هي الحدود المختلفة لـ المبسطات الثنائية – كما لاحظنا – فإننا نرى أنّ:

$$Z_1(S) = B_1(S)$$

على الطالب أن يرى ماذا تعني هذه الحسابات هندسيًّا باستخدام الشكل 2.41.

أخيرًا، نصف $Z_2(S)$، حيث يتولد – الآن – $C_2(S)$ بالمبسطات $P_2P_3P_4$، و $P_3P_1P_4$، و $P_1P_2P_4$، و $P_2P_1P_3$، فإذا كان لـ $P_2P_3P_4$ معامل r_1 ولـ $P_3P_1P_4$ معامل r_2 في دورة ثنائية، فإنّ للحافّة المشتركة P_3P_4 معاملًا $r_1 - r_2$ في حدودها.

إذن، يجب أن يكون $r_1 = r_2$، وبمناقشة مشابهة، نرى أنه في أيّ دورة تكون كل من المبسطات الثنائية الأربعة لها المعاملات نفسها؛ إذن، يتولد $Z_2(S)$ بـ :

$$P_2P_3P_4 + P_3P_1P_4 + P_1P_2P_4 + P_2P_1P_3$$

بمعنى أنّ $Z_2(S)$ دوري غير منته، مرة أخرى، على الطالب أن يترجم هذه الحسابات هندسيًّا باستخدام الشكل 2.41، لاحظ أنّ اتجاه كل مجمّع يربط بالذهاب حول المثلث في اتجاه عقارب الساعة، عندما ينظر لها من خارج رباعي السطوح. ▲

$\partial^2 = 0$ والزمر الشباهية

نصل الآن إلى واحدة من أكثر المعادلات أهمية في الرياضيات، سننصّ عليها فقط في حالة $n = 1, 2, 3$، ولكنها متحققة لكل $n > 0$.

9.41 مبرهنة لتكن X مبسطة مركبة، ولتكن $C_n(X)$ السلسلة ذات الرتبة n لـ X، حيث $n = 0, 1, 2, 3$؛ إذن، يربط تركيب التشاكل $\partial_{n-1}\partial_n$ من $C_n(X)$ إلى $C_{n-2}(X)$ كل شيء مع 0، حيث $n = 1, 2, 3$ بمعنى أنه لكل $c \in C_n(X)$، $\partial_{n-1}(\partial_n(c)) = 0$. نستخدم الرمز "$\partial_{n-1}\partial_n = 0$"، أو باختصار أكثر "$\partial^2 = 0$".

البرهان لأنَّ التشاكل يتحدد تمامًا بقيمه على المولدات، فمن الكافي أن نتحقق أنه لكل مبسط σ ذي رتبة n، يكون $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = 0$، فإذا كانت $n = 1$، فالنتيجة واضحة؛ لأن ∂_0 تربط كل شيء بـ 0. عندما $n = 2$،

$$\begin{aligned}\partial_1\left(\partial_2(P_1P_2P_3)\right) &= \partial_1(P_2P_3 - P_1P_3 + P_1P_2)\\ &= (P_3 - P_2) - (P_3 - P_1) + (P_2 - P_1)\\ &= 0\end{aligned}$$

ستكون حالة $n = 3$ تمرينًا ممتازًا للطالب في تعريف مشغّل الحدود (انظر التمرين 2). ♦

10.41 نتيجة لـ $n = 0, 1, 2, 3$، $B_n(X)$ زمرة جزئية من $Z_n(X)$.

البرهان لـ $n = 0, 1, 2$، يكون $B_n(X) = \partial_{n+1}\left[C_{n+1}(X)\right]$؛ ولذلك، إذا كان $b \in B_n(X)$

فيجب أن نحصل على $b = \partial_{n+1}(c)$، حيث $c \in C_{n+1}(X)$؛ إذن:

$$\partial_n(b) = \partial_n(\partial_{n+1}(c)) = 0,$$

وهكذا، فإنّ $b \in Z_n(X)$.

إذا كانت $n = 3$، ولأننا غير مهتمين بالمبسطات ذات البعد الأكبر من 3، فإنّ $B_3(X) = 0$. ♦

11.41 تعريف تسمى زمرة العامل $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ **الزمرة الشباهية ذات البعد n لـ X** (**n – dimensional homology group of X**). ■

12.41 مثال لنحسب $H_n(S)$ لـ $n = 0, 1, 2, 3$، حيث S هو سطح رباعي السطوح في الشكل 2.41.

لقد أوجدنا $Z_n(S)$ و $B_n(S)$ في المثال 8.41، الآن، $C_3(S) = 0$، وهكذا، فإنّ كلًّا من $Z_3(S)$ و $B_3(S)$ يساوي 0، وهذا يؤدي إلى أنّ

$$H_3(S) = 0$$

وكذلك، فإنّ $Z_2(S)$ دورية غير منتهية، وقد رأينا أنّ $B_2(S)=0$؛ إذن، $H_2(S)$ دورية غير منتهية، أي إنّ

$$H_2(S)\simeq\mathbb{Z}$$

رأينا أن $Z_1(S)=B_1(S)$، وهذا يؤدي إلى زمرة العامل $Z_1(S)/B_1(S)$ وهي الزمرة التافهة من عنصر واحد، أي إنّ:

$$H_1(S)=0$$

أخيرًا، كانت $Z_0(S)$ إبدالية حرّة على P_1، وP_2، وP_3 وP_4، بينما تولدت $B_0(S)$ من

$$P_4\text{-}P_3 \text{ و } P_2\text{-}P_1 \text{ و}, P_3\text{-}P_1 \text{ و}, P_4\text{-}P_1 \text{ و}, P_3\text{-}P_2 \text{ و}, P_4\text{-}P_2$$

ونزعم أنّ كل مجموعة مشاركة في $Z_0(S)/B_0(S)$، تحوي فقط عنصرًا واحدًا على الصورة P_1.

ليكن $z\in Z_0(S)$، وافترض أنّ معامل P_2 في z هو s_2، ومعامل P_3 هو s_3، ومعامل P_4 هو s_4؛ إذن:

$$z-\left[s_2(P_2-P_1)+s_3(P_3-P_1)+s_4(P_4-P_1)\right]=rP_1$$

حيث r عدد صحيح، وهكذا، فإنّ $z\in\left[rP_1+B_0(S)\right]$، أي إنّ كل مجموعة مشاركة تحوي عنصرًا على صورة rP_1، وإذا احتوت المجموعة المشاركة كذلك على $r'P_1$، فإنّ $r'P_1\in\left[rP_1+B_0(S)\right]$، وهذا يؤدي إلى أنّ $(r'-r)P_1$ تنتمي لـ $B_0(S)$، ومن الواضح أنّ المضروب الوحيد لـ P_1 بحيث يكون حدودًا، هو الصفر؛ وإذن، $r=r'$ والمجموعة المشاركة تحوي فقط عنصرًا وحيدًا على صورة rP_1؛ إذن، يمكننا اختيار rP_1 بوصفها ممثلات للمجموعات المشاركة في حسابات $H_0(S)$؛ إذن، $H_0(S)$ دورية غير منتهية – أي إنّ

$$H_0(S)\simeq\mathbb{Z}. \qquad \blacktriangle$$

قد تبدو هذه التعريفات والحسابات معقدة للطالب، فالأفكار طبيعية جدًّا، ولكننا نعترف بأنها مربكة بعض الشيء في الكتابة، وعلى أيّ حال، فإنّ المناقشة المستخدمة في هذه الحسابات نموذجية في مبرهنة الشباه، بمعنى أنك إذا فهمتها، فإنك ستفهم حساباتنا الأخرى كلها، إضافة إلى ذلك، يمكننا أن نجعلها هندسية، تظهر في صورة الفضاء.

سيكرس الفصل المقبل لمزيد من الحسابات للزمر الشباهية لبعض الفضاءات البسيطة المهمّة.

■ تمارين 41

تمارين مقترحة

1. افترض أنّ $c = 2P_1P_3P_4 - 4P_3P_4P_6 + 3P_3P_2P_4 + P_1P_6P_4$ سلسلة ثنائية في مبسطة مركبة معينة X.

أ. احسب $\partial_2(c)$ ب. هل c دورة ثنائية؟ جـ. هل $\partial_2(c)$ دورة أحادية؟

2. احسب $\partial_2(\partial_3(P_1P_2P_3P_4))$، وأثبت أنها 0، مكملاً إثبات المبرهنة 9.41.

3. صف $C_i(P)$، و $Z_i(P)$، و $B_i(P)$، و $H_i(P)$ للفضاء المكوّن فقط من المبسط الصفري P. (في الحقيقة هذه مسألة سهلة).

4. صف $C_i(X)$، و $Z_i(X)$، و $B_i(X)$، و $H_i(X)$ للفضاء X المكوّن من المبسطتين الصفريتين المختلفتين P و P'. (ملاحظة: القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين ليست جزءًا من الفضاء).

5. صف $C_i(X)$، و $Z_i(X)$، و $B_i(X)$، و $H_i(X)$ للفضاء X المكوّن من المبسطة الأحادية P_1P_2.

6. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل حدود تكون دورة.

________ ب. كل دورة تكون حدودًا.

________ جـ. $C_n(X)$ زمرة إبدالية حرّة دائمًا.

________ د. $B_n(X)$ زمرة إبدالية حرّة دائمًا.

________ هـ. $Z_n(X)$ زمرة إبدالية حرّة دائمًا.

________ و. $H_n(x)$ إبدالية دائمًا.

________ ز. المبسط الثنائي هو حدود المبسط الثلاثي.

________ ح. السلسلة الأحادية هي حدود المبسط الثنائي.

________ ط. السلسلة الثنائية هي حدود الدورة الثلاثية.

________ ي. إذا كان $Z_n(X) = B_n(X)$، فإنّ $H_n(X)$ هي الزمرة التافهة بعنصر واحد.

المزيد من التمارين

7. عرّف المصطلحات الآتية لتعمم بصورة طبيعية تعريفات الكتاب المعطاة للأبعاد 0، و1، و2، و3.

أ. المبسط ذو الرتبة n الموجه.

ب. حدود المبسط ذي الرتبة n الموجه.

جـ. وجه في مبسط ذي الرتبة n موجه.

8. بالاستمرار في فكرة التمرين 7، ما الطريقة السهلة التي يمكن بها الإجابة عن سؤال عن تعريف

$C_n(X)$، $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ ، $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ لمركب المبسطات X، الذي ربما حوى بعض المبسطات ذات بعد أكبر من 3؟

9. باتباع الأفكار في التمرينين 7 و 8، برهن على أن $\partial^2 = 0$ بوجه عام، أي إنّ $\partial_{n-1}(\partial_n(c)) = 0$ لكل $c \in C_n(X)$، حيث يمكن أن تكون n أكبر من 3.

10. ليكن X مركب مبسطات. لمبسط σ ذي رتبة n (موجه) لـ X، **الحدود المقابلة () ^{n} لـ (coboundary)** هي السلسلة ذات الرتبة $(n+1)$، $\sum \tau$ ، بحيث إنّ الجمع مأخوذ على المبسطات τ كلها ذوات الرتبة $(n + 1)$، التي يكون σ وجهًا لها. بمعنى أنها المبسطات τ التي تظهر في المجموع، وهي بالضبط تلك التي تكون σ أحد مجاميع $\partial_{n+1}(\tau)$ الاتجاه مهم هنا. إذن، P_2 وجه لـ P_1P_2، ولكن P_1 ليس كذلك. على أيّ حال، P_1 وجه لـ P_2P_1. ليكن X مركب مبسطات يتكوّن من المجسم رباعي السطوح في الشكل 2.41.

أ. احسب $\delta^{(0)}(P_1)$ و $\delta^{(0)}(P_4)$.

ب. احسب $\delta^{(1)}(P_3P_2)$.

جـ. احسب $\delta^{(2)}(P_3P_2P_4)$.

11. باتباع فكرة التمرين 10، ليكن X مركب مبسطات، ولتكن الزمرة $C^{(n)}(X)$ المكوّنة من **السلاسل ذات الرتبة n المقابلة (n – cochains)** مثل الزمرة $C_n(X)$.

أ. عرّف $\delta^{(n)} : C^{(n)}(X) \to C^{(n+1)}(X)$ بطريقة موازية لتلك التي عرّفنا بها

$$\partial_n: C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

ب. أثبت أنّ $\delta^2 = 0$، أي إنّ $\delta^{(n+1)}(\delta^{(n)}(c)) = 0$ لكل $c \in C^{(n)}(X)$.

12. باتباع الأفكار في التمرينين 10 و 11، عرّف الزمرة $Z^{(n)}(X)$ المكوّنة من الدورات ذات الرتبة n المقابلة لـ X، الزمرة $B^{(n)}(X)$ المكوّنة من الحدود ذات الرتبة n المقابلة لـ X، وأثبت أنّ: $B^{(n)}(X) \leq Z^{(n)}(X)$.

13. باتباع الأفكار في التمارين 10، و11، و12، عرّف الزمرة الشباهية المقابلة ذات البعد n ، $H^{(n)}(X)$ لـ X. احسب $H^{(n)}(S)$ **لسطح رباعي** السطوح S في الشكل 2.41.

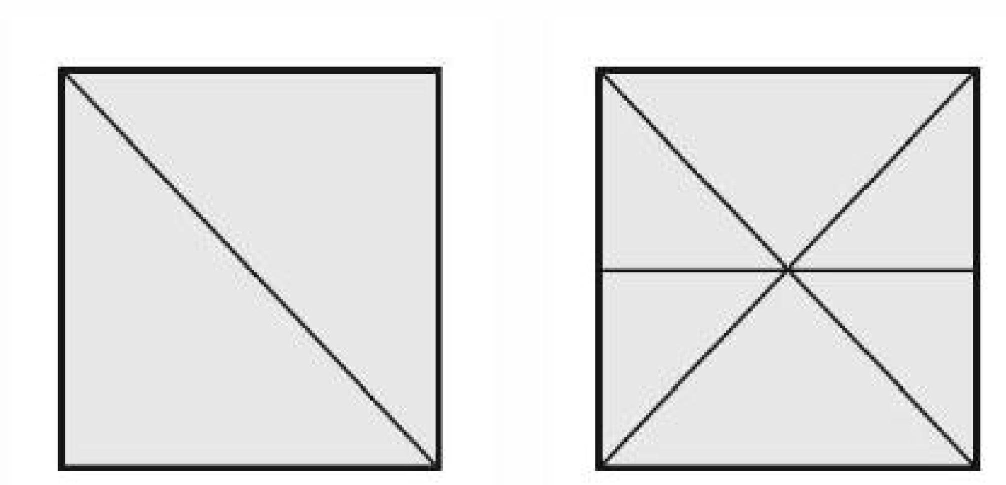
حساب الزمر الشباهية Computations of Homology Groups

المثالثة

افترض أنك تود حساب الزمر الشباهية لسطح كرة، فأول ما يحتمل أن تقوله – إذا كنت منتبهًا – إنّ سطح الكرة ليس مركب مبسطات؛ لأن هذا السطح منحنٍ والمثلث سطح مستوٍ، تذكّر أنّ الفضاءين يكونان متماثلين طبولوجيًّا إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بالثّني، بالفتل وهكذا، تخيّل أنّ للمبسط الثلاثي، رباعي السطوح، سطحًا مطاطيًّا، وأنه مملوء بالهواء، فإذا كان السطح المطاطي مرنًا، مثل مطاط البالون، فسيحوّل نفسه فورًا إلى كرة، وستظهر الوجوه الأربعة لرباعي السطوح "كمثلثات" رسمت على سطح الكرة، وهذا يوضح ما نعنيه بمثالثة الفضاء، فمصطلح المثالثة لا يشير بالضرورة إلى التقسيم لمبسطات ثنائية فقط، بل أيضًا يستخدم في التقسيم إلى مبسطات من الرتبة n لأيّ $n \geq 0$، فإذا قُسّم الفضاء إلى أجزاء، بحيث إنه بالقرب من كل نقطة يمكن للفضاء أن يشوّه، ليبدو مثل جزء من الفضاء الإقليدي ^{n}، والأجزاء التي قُسّم إليها الفضاء تظهر بعد هذا التشوّه بوصفها جزءًا من مركب مبسطات، فإنّ التقسيم الأصلي للفضاء هو **مثالثة للفضاء (triangulation of the space)**. تعرّف الزمر الشباهية للفضاء رسميًّا تمامًا، كما في الفصل السابق.

الخصائص الثابتة

هناك اثنتان من الخصائص الثابتة المهمّة جدًّا للزمر الشباهية، تحتاج براهينها إلى آليات كثيرة جدًّا، ولكن من السهل علينا شرحها بصورة تقريبية. أولًا، تعرّف الزمر الشباهية لفضاء بدلالة المثالثة، ولكن في الحقيقة هي زمر متساوية (أي متماثلة) بغض النظر كيف تمت مثالثة الفضاء، على سبيل المثال: يمكن مثالثة المنطقة المربعة بطرق عدة، تعرض اثنتان منها في الشكل 1.42. الزمر الشباهية هي نفسها بغض النظر عن أيّ مثالثة استخدمت في حسابها. هذا ليس واضحًا!



الشكل 1.42

للصفة الثابتة الثانية، إذا كان فضاء مثالثة يماثل باستمرار فضاء آخر (على سبيل المثال، يمكن أن يحول للآخر من غير تمزيق أو قطع)، فإنّ زمرتي الشباه للفضاءين متساويتان (أي متماثلتين) لكل بعد n، هذا ليس واضحًا مرة أخرى، سنستخدم هاتين الحقيقتين من غير برهان.

2.42 مثال الزمر الشباهية لسطح كرة تساوي تلك التي تخصّ سطحًا رباعي السطوح في المثال 12.41؛ لأنّ كلا الفضاءين متماثلان استمراريًّا. ▲

الكرات والخلايا نوعان مهمّان من الفضاءات في الطبولوجيا، لنقدّمهما ونقدم الرموز المعتادة، فالكرة ذات البعد **n** S^n **(n – sphere)**، هي مجموعة النقاط كلها على بعد وحدة واحدة من نقطة الأصل في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^{n+1}$ ذي البعد $(n+1)$ ،إذن، الكرة الثنائية S^2 هي ما يدعى عادة سطح الكرة في $\mathbb{R}^3$ ، S^1 هي حدود دائرة، وS^0 هي نقطتان، وبالطبع، اختيار 1 للبعد عن نقطة الأصل ليس مهمًّا، الكرة الثنائية ذات نصف القطر 10 تماثل استمراريًّا تلك ذات نصف القطر 1 ، وتماثل استمراريًّا سطح مجسم القطع الناقص للسبب نفسه، أمّا **الخلية ذات البعد n** **(n – cell or n – ball)** E^n وهي مجموعة النقاط كلها في $\mathbb{R}^n$ على بعد 1 عن نقطة الأصل؛ إذن،E^3 هي ما ننظر إليه عادة بوصفها كرة مصمتة، E^2 منطقة دائرية، و E^1 قطعة مستقيمة.

3.42 مثال الملاحظات في الأعلى والحسابات في المثال 2.41 تثبت أنّ كلتا $H_2(S^2)$ و $H_0(S^2)$ تماثل $\mathbb{Z}$ ، و $H_1(S^2)=0$. ▲

الفضاءات المتصلة والمتقلصة

هناك تفسير لطيف جدًّا لـ $H_0(X)$ لفضاء مثالثة X. يكون الفضاء متصلًا إذا أمكن ربط أيّ نقطتين بطريق (مفهوم لن نعرّفه) يقع تمامًا في الفضاء، فإذا كان الفضاء غير متصل، فيمكن تقسيمه إلى أجزاء، كل منها متصل، ولكن لا يمكن ربط أيّ اثنين منها بطريق في الفضاء، حيث تسمى هذه الأجزاء **مركبات متصلة (connected components of the space)**.

4.42 مبرهنة إذا كان الفضاء X مثالثيًّا إلى عدد منته من المبسطات، فإنّ $H_0(X)$ يماثل $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}$ ، ورقم بيتي **m** (Betti number) لعدد العوامل $\mathbb{Z}$ هو عدد المركبات في X

البرهان الآن، $C_0(X)$ زمرة إبدالية حرّة مولدة بعدد منتهٍ من الرؤوس P_i في مثالثة X، وكذلك $B_0(X)$ مولدة بتعابير على صورة:

$$P_{i2}-P_{i1},$$

حيث $P_{i1}P_{i2}$ حافّة في المثالثة.

نثبّت P_{i1} . أي رأس P_{ir} في المركبة نفسها المتصلة في X لـ P_{i1} يمكن ربطها مع P_{i1} بسلسلة منتهية.

$$P_{i_1}P_{i_2},P_{i_2}P_{i_3},\ldots,P_{i_{r-1}}P_{i_r}$$

من الحواف؛ إذن:

$$P_{i_r}=P_{i_1}+(P_{i_2}-P_{i_1})+(P_{i_3}-P_{i_2})+\cdots+(P_{i_r}-P_{i_{r-1}}),$$

مثبتًا أنّ $P_{ir}\in\left[P_{i1}+B_0(X)\right]$. من الواضح أنه إذا كانت P_{i_s} ليست في المركبة نفسها المتصلة مع P_{i_1} ، فإن $P_{is}\notin\left[P_{i1}+B_0(X)\right]$؛ لأنه لا توجد حافة تصل المركبتين. وهكذا، إذا اخترنا رأسًا واحدًا من كل مركبة متصلة، فإنّ كل مجموعة مشاركة لـ $H_0(X)$ تحوي بالضبط ممثلاً واحدًا، الذي يكون مضاعفًا صحيحًا لأحد الرؤوس المختارة. تمّ إثبات المبرهنة. ♦

5.42 مثال لدينا مباشرة

$$H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$$

حيث $n > 0$؛ لأن S^n متصلة عندما $n > 0$، وعلى أيّ حال:

$$H_0(S^0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(انظر الفصل 41، تمرين 4). وكذلك

$$H_0(E^n) \simeq \mathbb{Z}$$

حيث $n \geq 1$. ▲

يكون الفضاء **متقلصًا (Contractible)** إذا أمكن ضغطه إلى نقطة من غير تمزيق أو قطع، ولكن تبقى دائمًا في الحيز الذي تشغله بالأصل. سنذكر فقط نصّ المبرهنة الآتية:

6.42 مبرهنة إذا كان X فضاء متقلصًا ومثالثة إلى عدد منتهٍ من المبسطات، فإنّ $H_n(X) = 0$ لكل $n \geq 1$.

7.42 مثال من الحقائق المعروفة أنّ S^2 ليست متقلصة، وليس من السهل إثبات هذه الحقيقة، على أيّ حال، ربما ينوي الطالب أن يأخذها بوصفها حقيقة واضحة، أنه لا يمكن ضغط "سطح الكرة" لتصبح نقطة دون تمزيقها، مبقيًا إياها دائمًا في الفضاء الأصلي S^2 الذي تشغله، إذ إنه ليس من العدل ضغطها جميعها إلى "مركز الكرة". لقد رأينا أن $H_2(S^2) \neq 0$ ولكنها تماثل $\mathbb{Z}$.

افترض – على أيّ حال – أننا أخذنا $H_2(E^3)$، حيث يمكننا أن نعُدّ E^3 مجسمًا رباعي السطوح في الشكل 2.41؛ لأنه متماثل استمراريًا مع E^3. السطح S لرباعي السطوح هذا متماثل استمراريًا مع S^2، والمبسطات هنا لـ E^3 هي نفسها لـ S (أو S^2)، التي اختبرناها في المثالين 8.41 و 12.41، ما عدا المبسط الثلاثي S الذي ظهر الآن. تذكر أنّ مولد $Z_2(S)$، وعليه، $Z_2(E^3)$ كان بالضبط حدود S جميعها بالنظر إليها في E^3، إنها $\partial_3(\sigma)$، عنصر في $B_2(E^3)$، وهكذا، فإنّ: $Z_2(E^3) = B_2(E^3)$ و $H_2(E^3) = 0$.

لأنه من الواضح أنّ E^3 متقلص، فإنّ هذا متوافق مع المبرهنة 6.42. ▲

بوجه عام، E^n متقلص لكل $n \geq 1$، وهكذا وباستخدام المبرهنة 6.42:

$$H_i(E^n) = 0$$

لكل $i > 0$.

مزيد من الحسابات

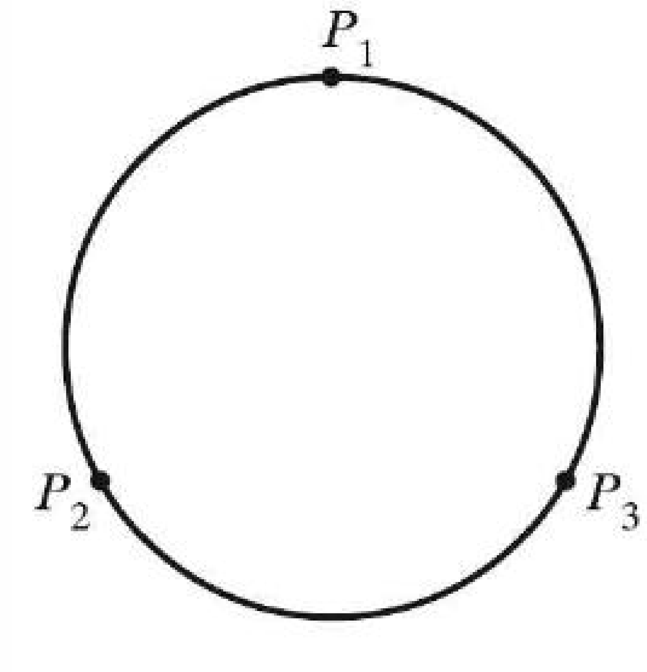
رأينا تفسيرًا جميلًا لـ $H_0(X)$ في المبرهنة 4.42، وكما وضّحت الأمثلة السابقة، فإنّ الدورة الأحادية في فضاء مثالثي تتولد بمنحنيات مغلقة في الفضاء المشكل من الحوافّ في المثالثة، ويمكن التفكير في الدورات الثنائية على أنها مولدة من الكرات الثنائية، أو أيّ سطوح ثنائية البعد مغلقة في الفضاء. تشكيل زمرة العامل:

$$H_1(X) = Z_1(X) / B_1(X)$$

تقريبًا يؤدي إلى عدّ المنحنيات المغلقة التي تظهر في الفضاء، ولم تكن هناك ببساطة؛ لأنها تظهر بوصفها حدودًا لقطعة ثنائية البعد (أي مجموعة المبسطات الثنائية كلها) في الفضاء، وبالمثل، تشكيل $H_2(X) = Z_2(X) / B_2(X)$ يؤدي تقريبًا لعدّ السطوح ثنائية البعد المغلقة في الفضاء، التي لا يمكنها أن "تملأ في المجسم" ضمن الفضاء، بمعنى أنها ليست حدودًا لمجموعة بعض المبسطات الثلاثية؛ إذن، لـ $H_1(S^2)$، كل منحنى مغلق مرسوم على سطح كرة ثنائية يحدّ قطعة ثنائية البعد في الكرة، وإذن، $H_1(S^2) = 0$، وعلى أي حال، السطح ثنائي البعد المغلق المحتمل الوحيد، S^2 نفسها، لا يمكن أن "تملأ المجسم" ضمن كامل الفضاء S^2 نفسه، وهكذا، فإنّ $H_2(S^2)$ إبدالية حرّة بمولد واحد.

8.42 مثال تبعًا للمناقشة في الأعلى، يمكن أن يتوقع المرء أنّ $H_1(S^1)$ إبدالية حرّة بمولد واحد، أي تماثل $\mathbb{Z}$؛ لأن الدائرة نفسها ليست حدًّا لجزء ثنائي البعد من S^1، حيث ترى أنه لا يوجد جزء ثنائي البعد في S^1. سنحسب، ونرى ما إذا كان هذا صحيحًا حقًّا.

مثالثة S^1 معطاة في الشكل 9.42. الآن $C_1(S^1)$ مولد بـ P_1P_2, P_2P_3 و P_3P_1، فإذا كانت السلسلة الأحادية دورة، فإنّ حدودها صفر، وهكذا، فيجب أن تحوي P_1P_2.



الشكل 9.42

و P_2P_3 العدد نفسه من المرات، وإلّا فإنّ حدودها ستحوي مضاعفًا غير صفري لـ P_2. مناقشة مشابهة تتحقق لأيّ حافتين؛ إذن، $Z_1(S^1)$ تولّد بـ $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1$، ولأنَّ $B_1(S^1)=\partial_2\left[C_2(S^1)\right]=0$، فلا توجد مبسطات ثنائية، ونرى أنّ $H_1(S^1)$ إبدالية حرّة بمولد واحد. أي إنّ:

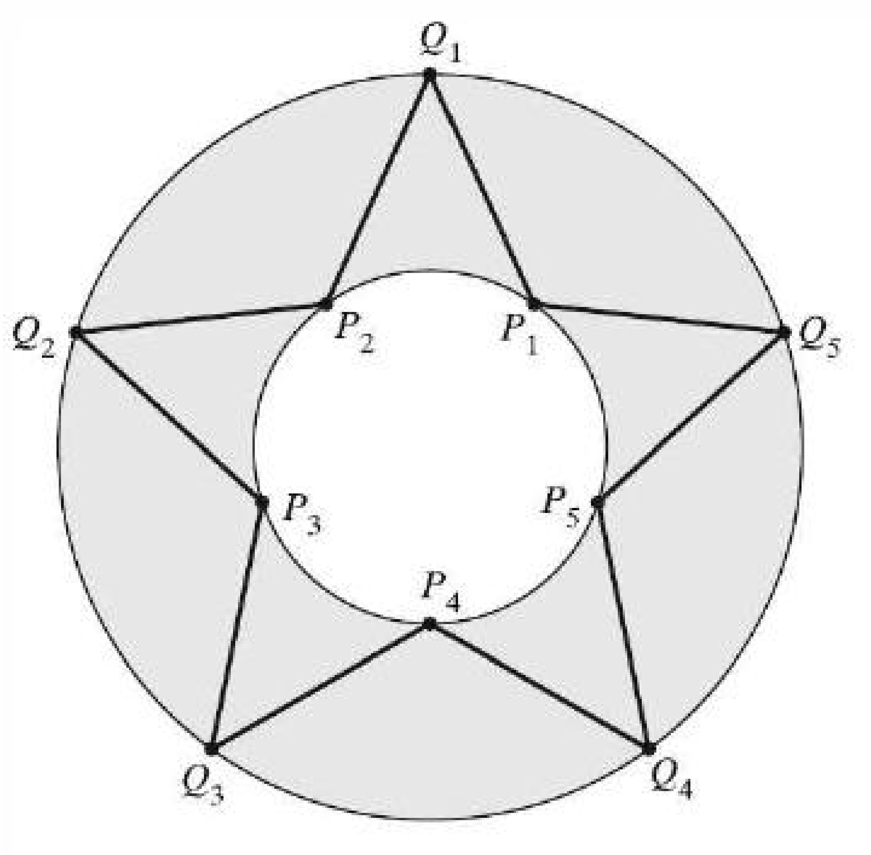
$$H_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$$ ▲

يمكن برهان أنه لـ $n>0$، $H_n(S^n)$ و $H_0(S^n)$ تماثل $\mathbb{Z}$، بينما $H_i(S^n)=0$ لـ $0<i<n$.

للتوافق مع مصطلحات الطبولوجيا، سنسمي العنصر في $H_n(X)$ – الذي هو – مجموعة مشاركة لـ $B_n(X)$ في $Z_n(X)$ "**فصلًا شباهيًا**" **(homology class)**. والدورات في الفصل الشباهي نفسه **شباهيات (homologous)**.

مثال 10.42 لنحسب الزمر الشباهية لمنطقة طوقية مستوية X بين دائرتين لهما المركز نفسه. تظهر المثالثة في الشكل 11.42، وبالطبع؛ لأنّ X متصلة، فإننا نستنتج أنّ:

$$H_0(X)\simeq\mathbb{Z}$$



الشكل 11.42

إذا كانت z أيّ دورة أحادية، وإذا كان r معامل P_1P_2 في z، فإنّ $z-r\partial_2(P_1P_2Q_1)$ دورة من غير P_1P_2 شباهي لـ z، وبالاستمرار في هذه المناقشة، نرى أنه توجد دورة أحادية شباهية لـ z ولا تحوي حوافّ على الدائرة الداخلية للطوق، وباستخدام المثلثات "الخارجية"، نستطيع أن نضبط أكثر بمضاعفات $\partial_2(Q_iP_iQ_j)$، ونصل إلى z' التي لا تحوي حوافّ Q_iP_i. ولكن إذا كانت Q_5P_1 تظهر في z' بمعامل لا يساوي صفرًا، فإنّ P_1 ستظهر بمعامل لا يساوي صفرًا في $\partial_1(z')$، مناقضًا حقيقة أنّ z' دورة، وبالمثل، فلا حافّة Q_iP_{i+1} يمكن أن تظهر حيث $i=1,2,3,4$ إذن، z شباهي لدورة مكوّنة من حوافّ فقط في الدائرة الخارجية، وبمناقشة مألوفة، مثل هذه الدورة يجب أن تكون على الصورة:

$$n(Q_1Q_2+Q_2Q_3+Q_3Q_4+Q_4Q_5+Q_5Q_1)$$

وعندئذٍ، فمن الواضح أن $H_1(X)\simeq\mathbb{Z}$

أظهرنا أننا نستطيع "دفع" أيّ دورة أحادية إلى الدائرة الخارجية، وبالطبع، كان بإمكاننا أن ندفعها إلى الدائرة الداخلية على حدّ المساواة.

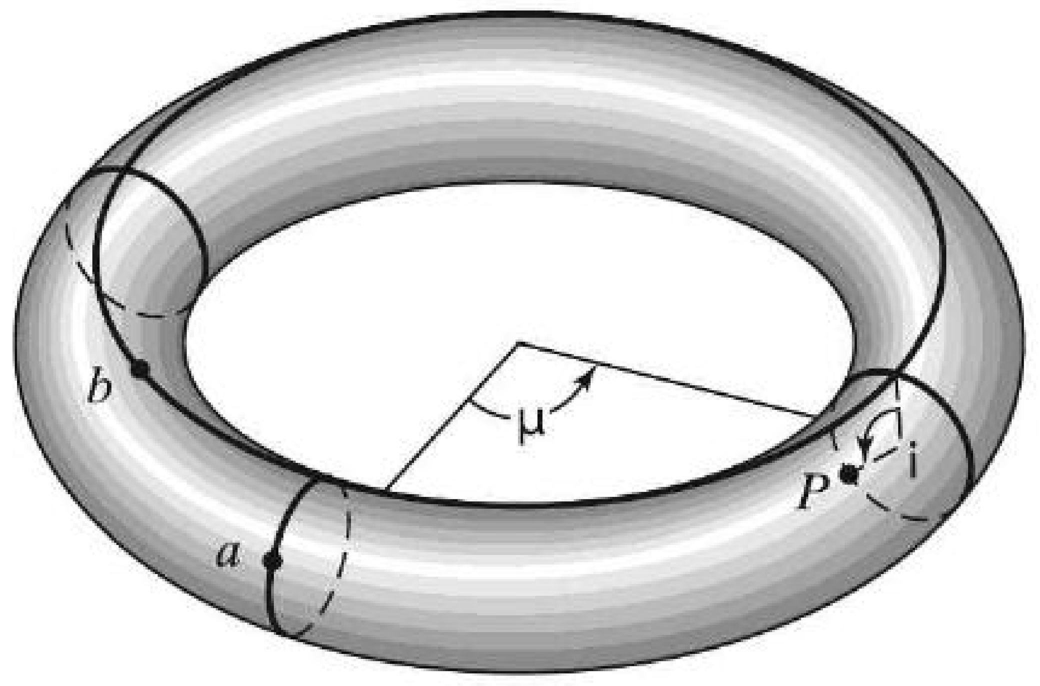
لـ $H_2(X)$، لاحظ أنّ $Z_2(X)=0$ ؛ لأن كل مبسط ثنائي يحوي في حدوده حافة في كلتا الدائرتين الداخلية والخارجية للطوق، التي لا تظهر في أيّ مبسط ثنائي، وحدود أيّ سلسلة ثنائية غير صفرية يجب أن تحوي بعض المضاعفات غير الصفرية لهذه الحوافّ.

إذن $H_2(X)=0$ ▲

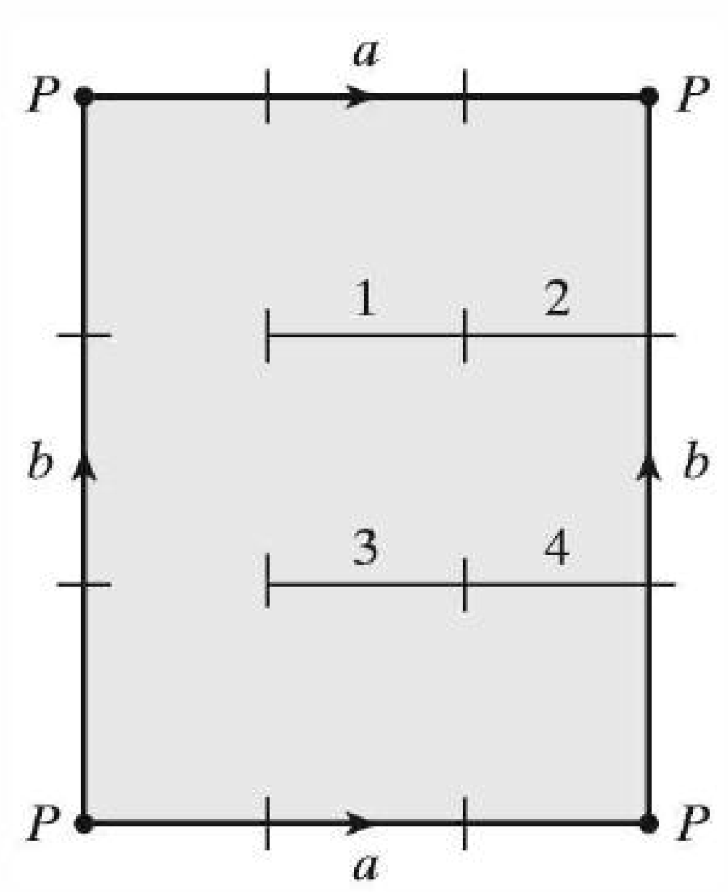
12.42 مثال سنحسب الزمر الشباهية لسطح طارة X، التي تبدو مثل سطح الكعكة المحلاة، كما في الشكل 13.42، ولتخيل المثالثة في الطارة، تصوّر أنك قطعتها عند الدائرة المعلمة a، ثمّ اقطع كامل الدائرة المعلمة b، ثمّ مهّدها كما في الشكل 14.42، وبعد ذلك ارسم المثلثات، ولاستعادة الطارة من الشكل 14.42، صل الحافة اليسرى b مع الحافة اليمنى b، بحيث تسير الأسهم في الاتجاه نفسه، هذا يعطي أسطوانة مع الدائرة a عند كل نهاية، ثمّ اطو الأسطوانة، وصل الدائرتين a، ومرّة ثانية محافظًا على سير الأسهم في الاتجاه نفسه حول الدائرتين.

لأن الطارة متصلة ، فإن $H_0(X)\simeq\mathbb{Z}$

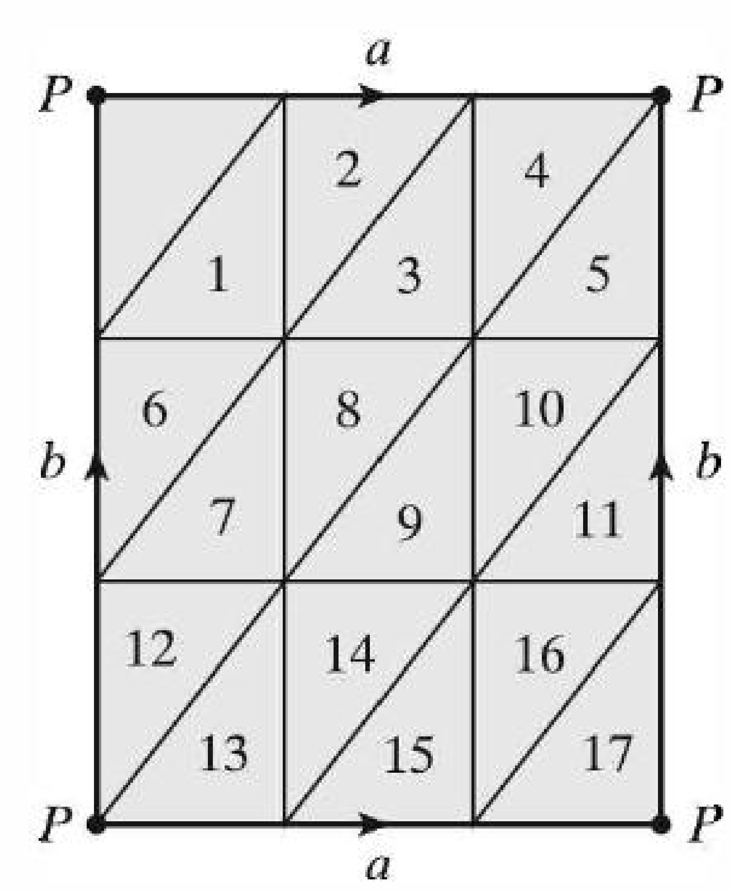
في $H_1(X)$، لتكن z دورة أحادية، فبتغيير z بمضاعف حدود المثلث رقم 1 في الشكل 14.42، تستطيع أن تحصل على دورة شباهية لا تحوي الجانب / من المثلث 1، ثمّ بتغيير الدورة الأحادية الجديدة بمضاعف مناسب لحدود المثلث 2، يمكنك أيضًا أن تزيل الجانب ا من 2، وبالاستمرار يمكننا عندها



الشكل 13.42



الشكل 15.42



الشكل 14.42

إزالة / من 3، ا من 4، / من 5، ـ من 6، / من 7، ا من 8، ا من 9، ا من 10، / من 11، ـ من 12، / من 13، ا من 14، / من 15، ا من 16، و / من 17. الدورة الناتجة – شباهية لـ z – يمكنها فقط أن تحوي الحوافّ الظاهرة في الشكل 15.42، ولكن لا يمكن لمثل هذه الدورة أن تحوي – بمعامل لا يساوي صفرًا – أيًّا من الحوافّ التي رقّمناها في الشكل 15.42، أو لن يكون لها حدود 0؛ إذن، z شباهية لدورة أحادية لها حوافّ فقط على الدائرة a أو الدائرة b (ارجع إلى الشكل 13.42).

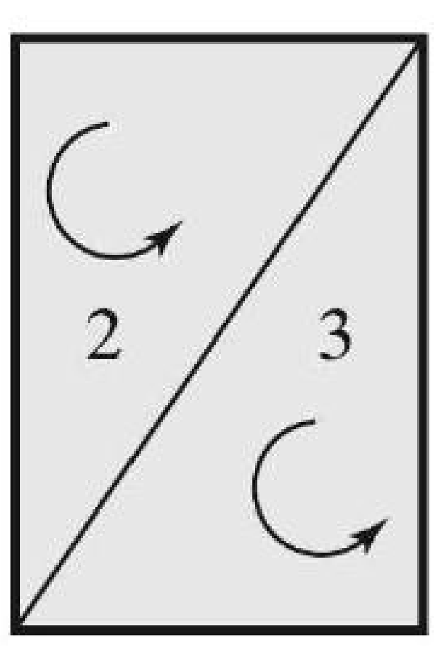
من المأمول بمناقشة مشابهة، أنّ كلّ حافة على الدائرة a يجب أن تُظهر عددًا متساويًا من المرّات، وكذلك الحال صحيح بالنسبة إلى الحواف على الدائرة b؛ وعلى أيّ حال، الحافة على الدائرة b ليس من الضروري إظهارها عددًا مساويًا من المرات لتلك الحواف التي تظهر على a. إضافة إلى ذلك، إذا كان لسلسة ثنائية فقط حدود تحتوي a و b، فإنّ المثلثات كلها الموجهة عكس عقارب الساعة يجب أن تظهر بالمعاملات نفسها، بحيث تشطب الحوافّ الداخلية، وحيث إنّ حدود مثل هذه السلسلة الثنائية تساوي 0؛ إذن، كل فصل شباهي (مجموعة مشاركة) يحوي فقط عنصرًا واحدًا.

$$ra+sb,$$

حيث r و s أعداد صحيحة؛ إذن، $H_1(X)$ إبدالية حرّة بمولدين ممثلين بالدائرتين a و b؛ ولذلك:

$$H_1(X)\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

أخيرًا، لـ $H_2(X)$، يجب أن تحوي الدورة الثنائية المثلث 2 في الشكل 14.42، في اتجاه معاكس لعقارب الساعة، وبالعدد نفسه من المرات التي تحوي فيها المثلث 3 – كذلك في اتجاه عكس عقارب الساعة – لكي لا تكون الحافّة المشتركة / لهذين المثلثين حدودًا، فهذه الاتجاهات موضحة في الشكل 16.42، ويتحقق مثل هذا لأيّ مثلثين متجاورين، وكذلك أيّ مثلث في اتجاه عكس عقارب الساعة يجب أن يظهر بالعدد نفسه من المرّات في دورة ثنائية، ومن الواضح أنّ أيّ مضاعف للجمع الشكلي للمبسطات الثنائية كلها – في اتجاه عكس عقارب الساعة – يكون دورة ثنائية؛ إذن، $Z_2(X)$ دورية غير منتهية، مماثلة لـ $\mathbb{Z}$. وكذلك $B_2(X)=0$، ولا توجد هناك مبسطات ثلاثية، وهكذا $H_2(X)\simeq\mathbb{Z}$ ▲



الشكل **16.42**

■ تمارين 42

في هذه التمارين، لا تحتاج إلى كتابة تفاصيل حساباتك ومناقشاتك.

حسابات

1. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين أحاديتين متماسّتين، أي الشكل الثامن.

2. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين ثنائيتين متماسّتين.

3. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية مع حلقة طوقية (كما في الشكل 11.42) التي لا تمسّ الكرة الثنائية.

4. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية مع حلقة طوقية دائرتها الداخلية هي الدائرة العظمى للكرة الثنائية.

5. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من دائرة تلامس كرة ثنائية بنقطة واحدة.

6. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية ذات مقبض (انظر الشكل 17.42).

7. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

__________ أ. مركبات المبسطات المتماثلة استمراريًا لها زمر شباهية متماثلة.

__________ ب. إذا كان لمركبي مبسطتين زمر شباهية متماثلة، فإنّ الفضاءين متماثلان استمراريًا.

__________ جـ. S^n تماثل E^n استمراريًا.

__________ د. $H_n(X)$ تافهة لـ $n > 0$ ، إذا كان X فضاءً متصلًا مع مثالثة منتهية.

__________ هـ. $H_n(X)$ تافهة لـ $n > 0$ ، إذا كان X فضاءً متقلصًا مع مثالثة منتهية.

__________ و. $H_n(S^n) = 0$ لـ $n > 0$.

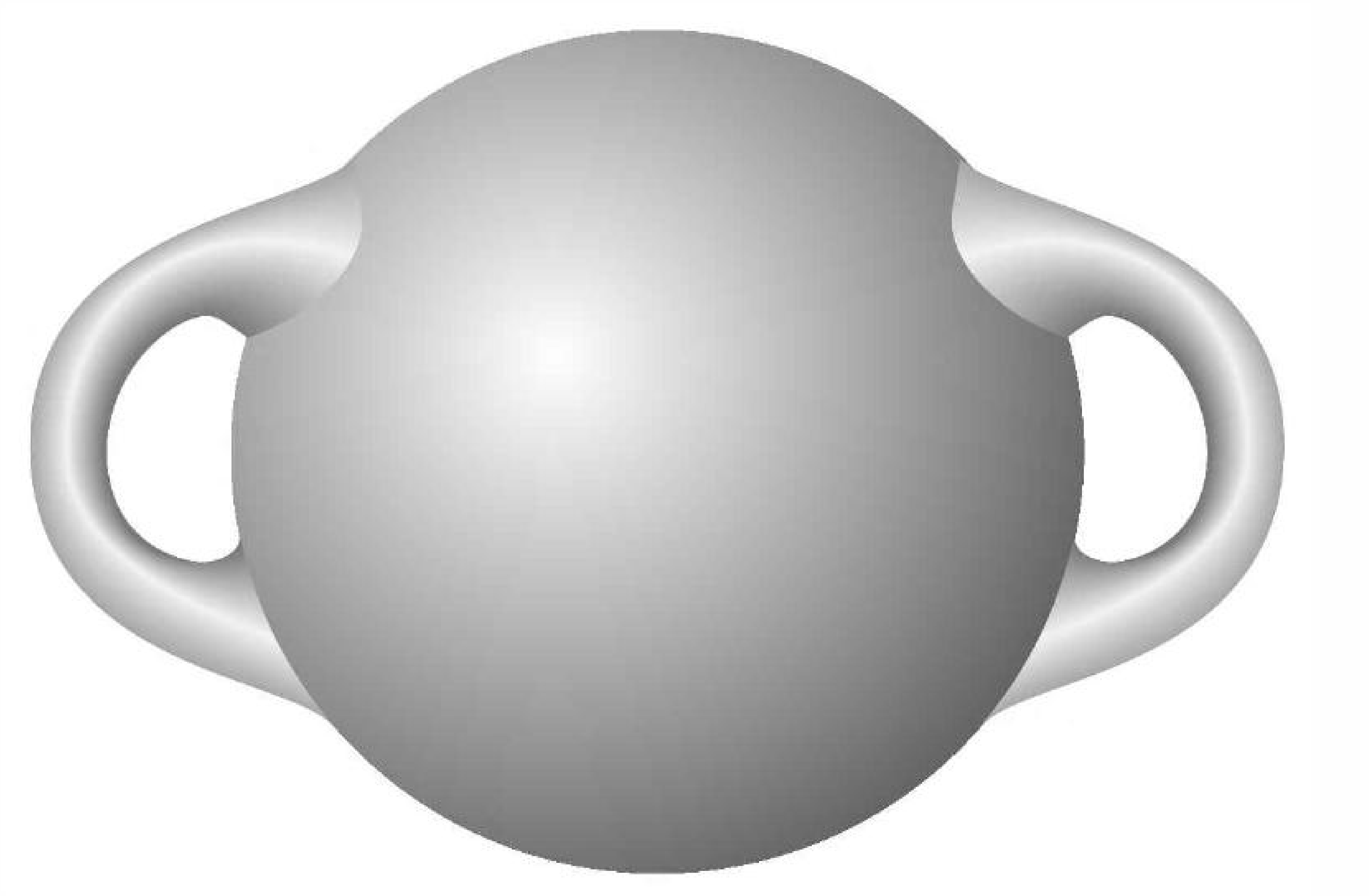
__________ ز. $H_n(E^n) = 0$ لـ $n > 0$.

__________ ح. الطارة تماثل S^2 استمراريًا.

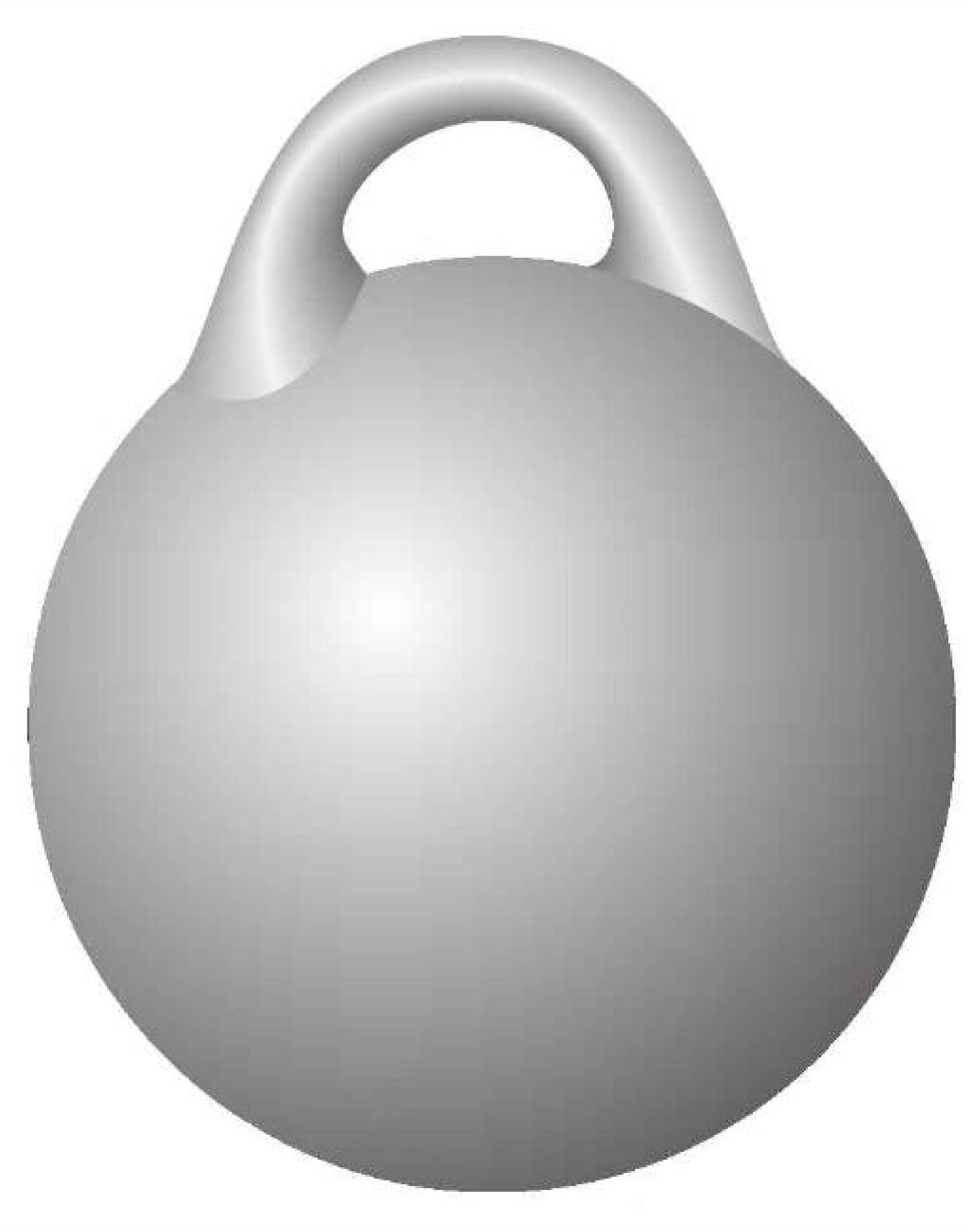
__________ ط. الطارة تماثل E^2 استمراريًا.

__________ ي. الطارة تماثل استمراريًا كرة عليها مقبض (انظر الشكل 17.42).

8. احسب الزمر الشباهية لفضاء مكوّن من سطحي طارتين بلا نقاط مشتركة.



الشكل **18.42**



الشكل **17.42**

9. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من سطحي طورتين مكدّستين، مكدّسة كما قد يُكدّس أنبوبان داخليان.

10. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من طارة مماسّة لكرة ثنائية عند نقاط الدائرة العظمى جميعها للكرة الثنائية، أي بالون يرتدي أنبوبًا داخليًّا.

11. احسب الزمر الشباهية للسطح المكوّن من كرة ثنائية بمقبضين (انظر الشكل 18.42).

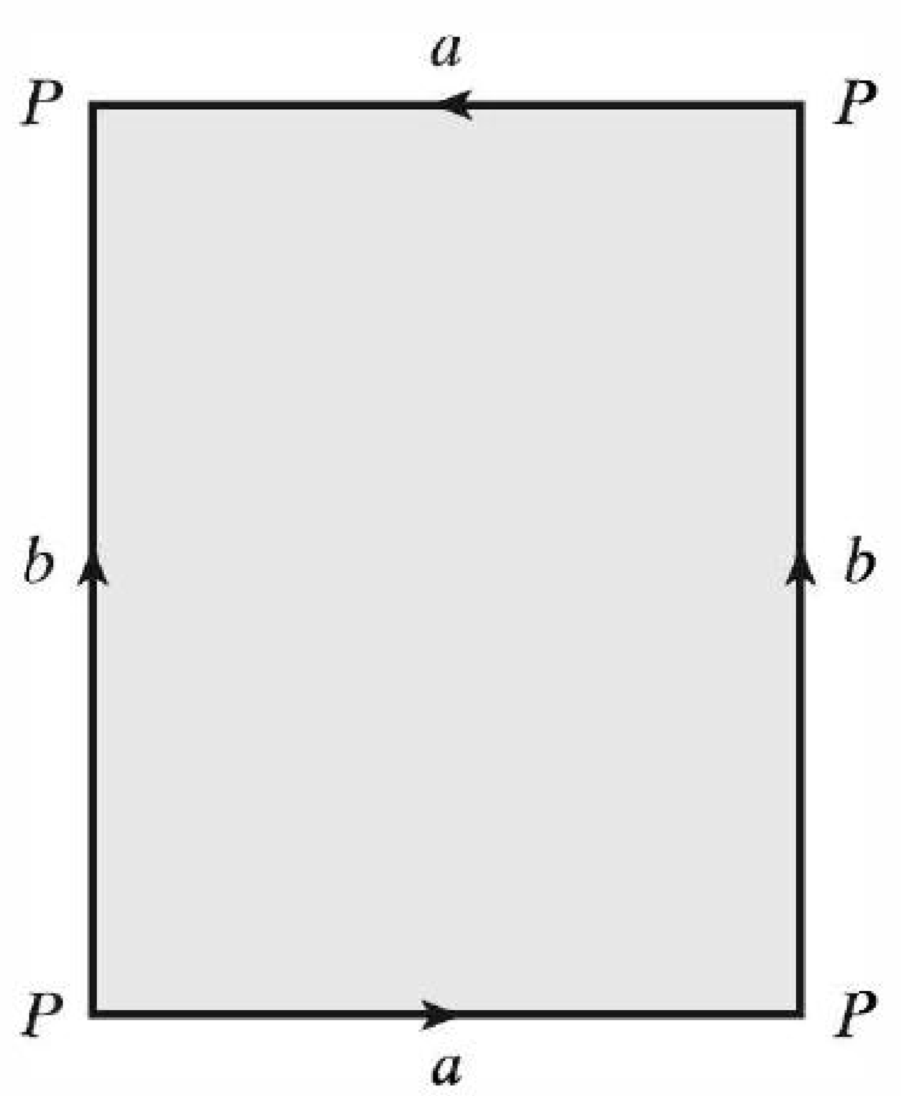
12. احسب الزمر الشباهية للسطح المكوّن من كرة ثنائية مع n من المقابض (تعميم للتمرينين 6 و 11).

المزيد من الحسابات والتطبيقات على علم الشباه
More Homology Computations and Applications

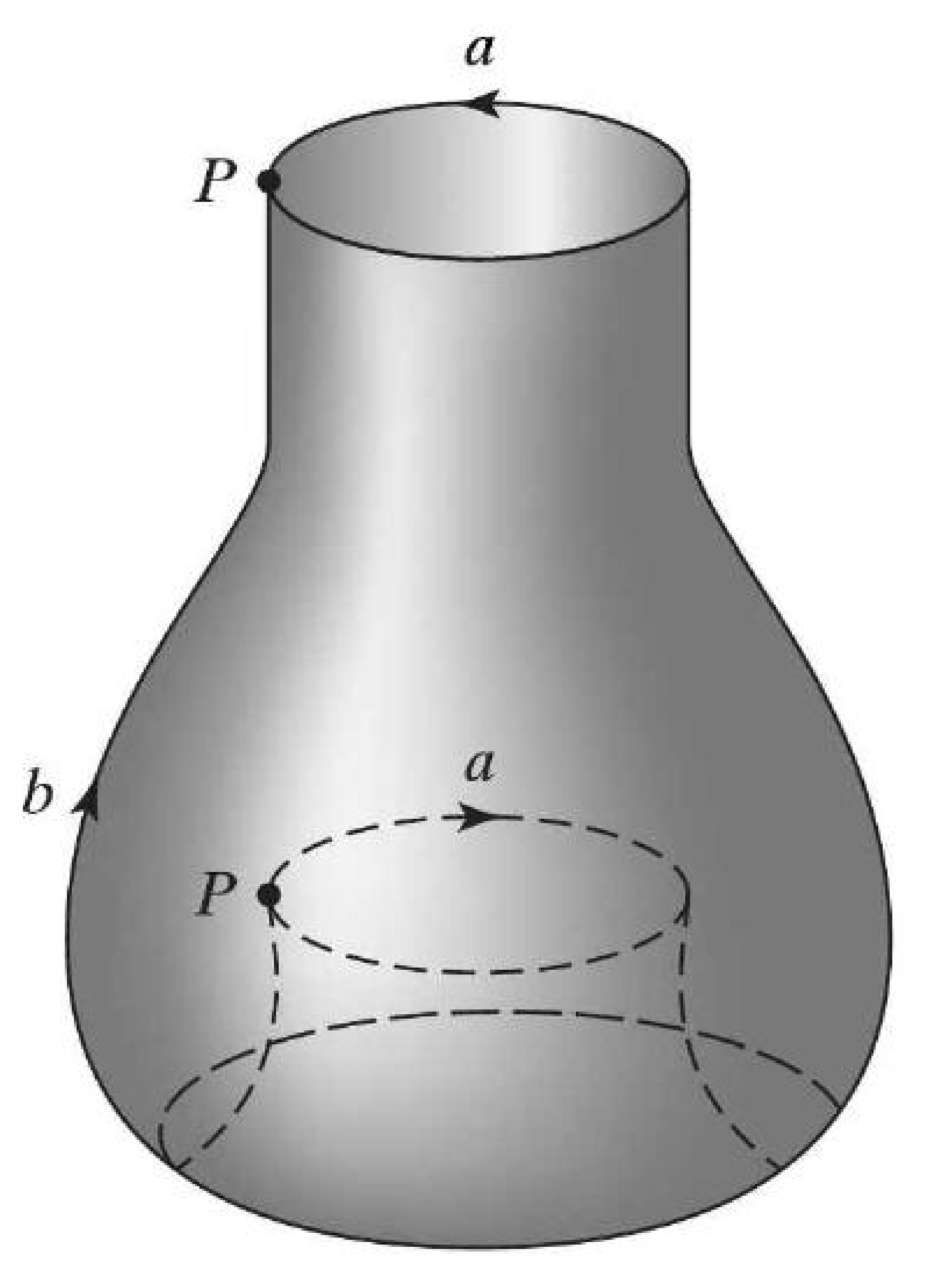
السطوح أحادية الجانب

الزمر الشباهية التي أوجدناها حتى الآن كلها كانت إبدالية حرّة، بحيث لم تكن هناك عناصر غير صفرية ذات رتب منتهية، ويمكن برهان أنّها الحالة دائمًا للزمر الشباهية لسطوح مغلقة (أي سطح مثل S^2، التي لا حدود لها)، التي يكون لها جانبان، ومثالنا الآتي سيكون لسطح مغلق أحادي الجانب، قارورة كلاين (*Klein bottle*)، وسيكون لزمرة الشباه ذات البعد 1 زمرة جزئية ملتوية غير تافهة تعكس الفتل في السطح.

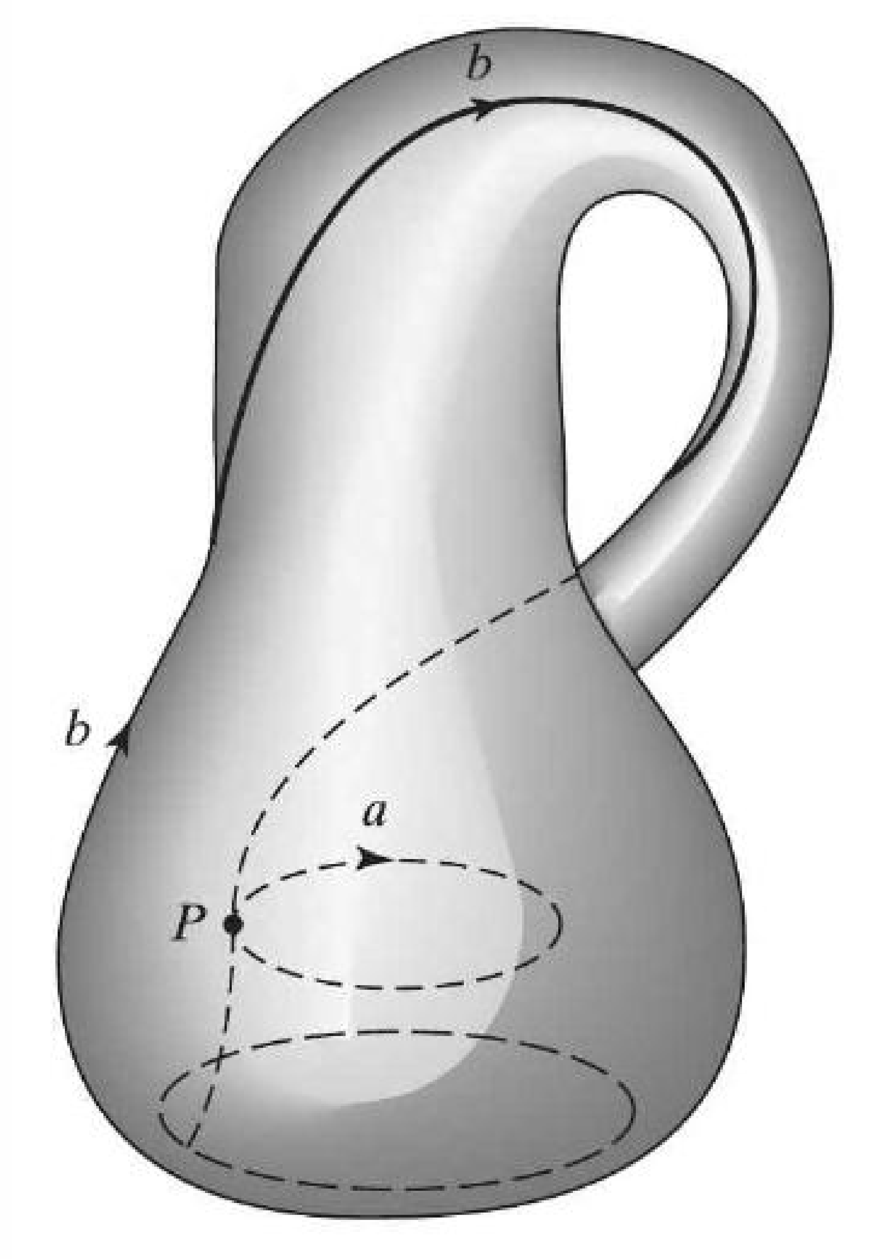
1.43 مثال لنحسب زمر الشباه لقارورة كلاين X، حيث يصور الشكل 2.43 قارورة كلاين مقطعة إلى أجزاء، تمامًا كما صوّر الشكل 13.42 الطارة مقطعة إلى أجزاء، والفرق الوحيد أنّ الأسهم في أعلى وأسفل الحافة a للمستطيل في اتجاهات متعاكسة هذه المرة، ولاستعادة قارورة كلاين من الشكل 2.43 مرة أخرى، اثنِ المستطيل الواصل بين الحافّتين المعلمتين بـ b، بحيث تتطابق اتجاهات الأسهم، ما يعطي أسطوانة تظهر مشوّهة بدفع الجزء الأسفل منها قليلًا لأعلى داخل الأسطوانة، كما في الشكل 3.43، فمثل هذا التشوّه مشروع في الطبولوجيا، ويجب – الآن – وصل الدائرتين a بحيث تدور الأسهم في الاتجاه نفسه. لا يمكن فعل هذا في $\mathbb{R}^3$. يجب أن تتخيل أنك في $\mathbb{R}^4$، بحيث يمكنك ثني عنق القارورة من حول و"خلال" الجانب من غير التقاطع مع الجانب، كما هو ظاهر في الشكل 4.43، ومع القليل من التفكير، بإمكانك أن ترى أنّ السطح الناتج له في الحقيقة جانب واحد، بمعنى أنك لو بدأت من أيّ مكان، ثمّ أصبحت تطلي "جانبًا واحدًا" فستنتهي بطلاء كل شيء. لا يوجد مفهوم الداخل في قارورة كلاين.



الشكل 2.43



الشكل 3.43



الشكل 4.43

نستطيع حساب الزمر الشباهية لقارورة كلاين تمامًا كما حسبنا الزمر الشباهية للطارة في المثال 12.42، بتقسيم الشكل 2.43 إلى مثلثات بالضبط كما فعلنا بالطارة.

بالطبع،

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

لأن X متصلة. وكما أوجدنا للطارة، إذا قمنا بمثالثة قارورة كلاين بتقسيم الشكل 2.43 إلى مثلثات، تكون كل دورة أحادية شباهية لدورة على الصورة:

$$ra+sb$$

حيث r و s أعداد صحيحة، فإذا كانت لسلسلة ثنائية حدود تحوي a و b فقط، فمرة أخرى، المثلثات كلها الموجهة عكس عقارب الساعة يجب أن تظهر بالمعاملات نفسها، بحيث إنّ الحوافّ الداخلية ستلغي بعضها، وقد كانت حدود مثل هذه السلسلة الثنائية في حالة الطارة تساوي 0، ولكنها هنا $k(2a)$، حيث k عدد مرات ظهور كل مثلث؛ إذن، $H_1(X)$ زمرة إبدالية مولدة بالفصلين الشباهيين لـ a و b والعلاقتين $a+b=b+a$ و $2a=0$؛ لذلك:

$$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$$

زمرة مع معامل ملتو 2 وعدد بيتي 1. مناقشتنا السابقة بخصوص السلاسل الثنائية تبرهن على عدم وجود دورات ثنائية هذه المرة، وهكذا، فإنّ

$$H_2(X) = 0 \qquad \blacktriangle$$

ليس بالضرورة ظهور المعامل الملتوي في بعض الزمر الشباهية لسطح أحادي الجانب ذي حدود. ولإكمال الموضوع، سنعطي هذا المثال التقليدي لشريط موبيوس (*Möbius strip*).

5.43 مثال ليكن X شريط موبيوس، الذي يمكن تكوينه بأخذ مستطيل ورقي وربط النهايتين المعلمتين بـ a بنصف ثنية، بحيث تنطبق الأسهم كما هو موضح بالشكل 6.43. لاحظ أنّ شريط موبيوس سطح له حدود، وأنّ حدوده مجرّد منحنًى مغلق (متماثل استمراريًّا مع الدائرة) مكوّن من l و l'، من الواضح أنّ شريط موبيوس – تمامًا مثل قارورة كلاين – له فقط وجه واحد، بمعنى أنه لو طلب منك تلوين وجه واحد فقط منه، فستنتهي بتلوين كامل السطح، بالتأكيد؛ لأن X متصلة

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

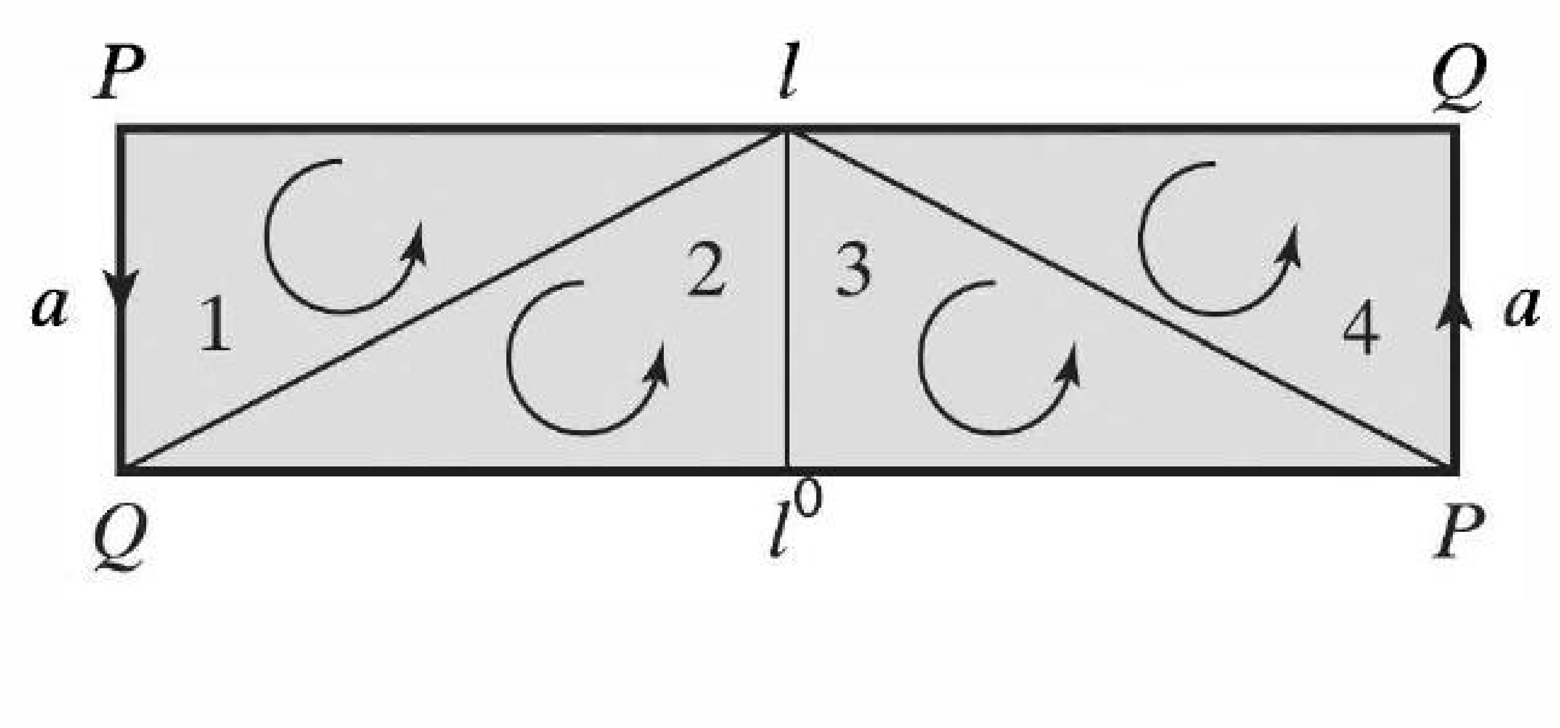
لتكن z أيّ دورة أحادية، وبالطرح بصورة متتالية لمضاعفات مناسبة للمثلثات 2، و 3، و 4 في الشكل 6.43، يمكننا حذف حوافّ / من المثلث 2، ا من المثلث 3، و \ من المثلث 4؛ إذن، z شباهية. لدورة z' التي تكون حوافّها فقط على l و l' و a، وكما في السابق يجب أن يظهر كلا الحدّين على l' العدد نفسه من المرات؛ ولكن، إذا كانت c سلسلة ثنائية مكوّنة من الجمع الشكلي للمثلثات الموجهة كما هو ظاهر في الشكل 6.43، فإننا نرى أنّ $\partial_2(c)$ تتألف من الحوافّ على l و l' إضافة إلى a 2، ولأنَّ كلتا الحافّتين على l'، فيجب أن تظهر في z' بالعدد نفسه من المرات، وبطرح مضاعف مناسب لـ $\partial_2(c)$ نرى أنّ z شباهية لدورة حوافّها تقع فقط على l و a، وبمناقشة شبيهة، فإنّ هذه الحوافّ كلها الموجهة بصورة ملائمة، يجب أن تظهر بعدد المرات نفسه في هذه الدورة الجديدة، وهكذا، فإنّ الفصل الشباهي الذي يحوي الجمع الشكلي لها يولد $H_1(X)$؛ إذن:

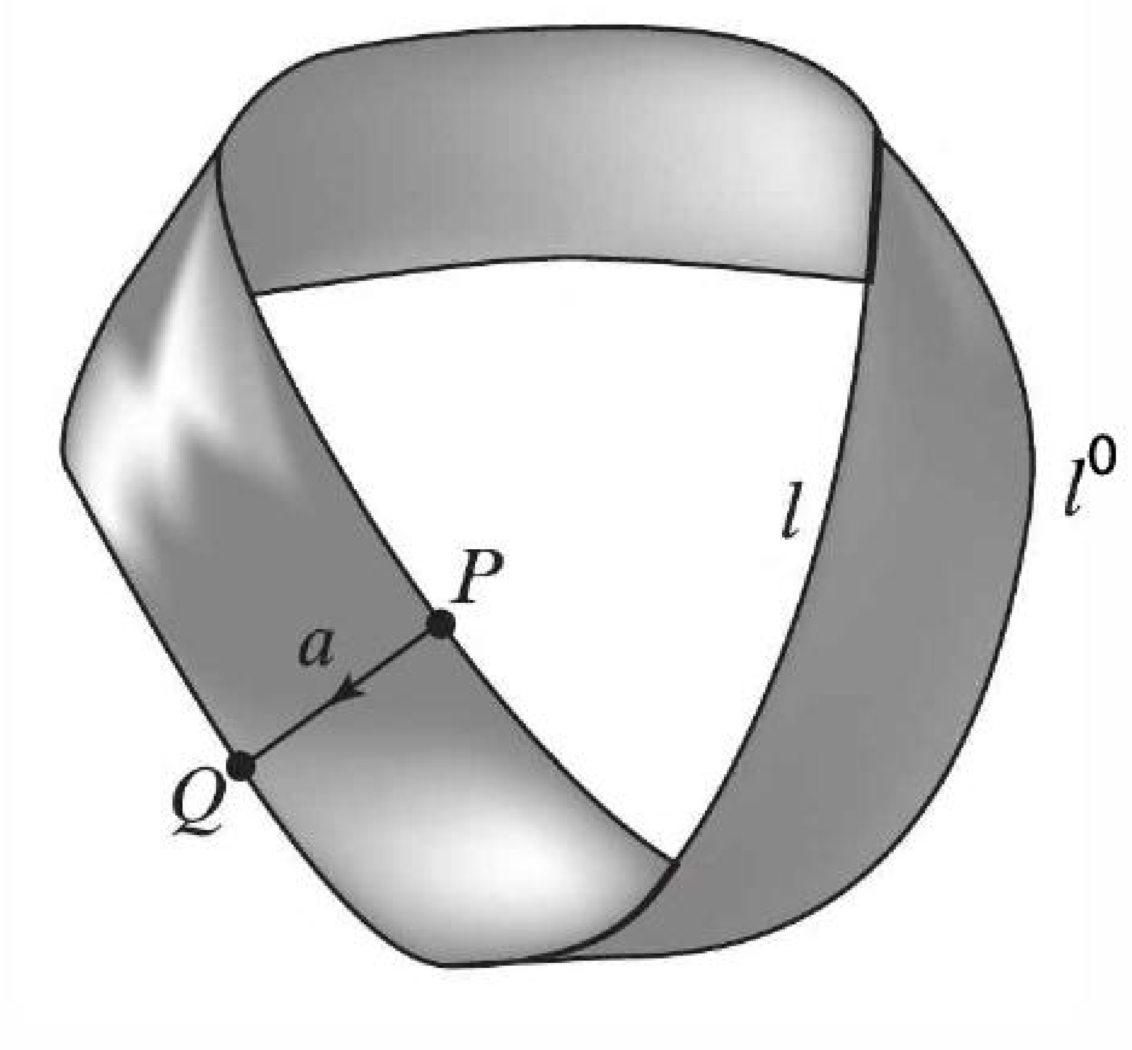
$$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$$

تبدأ هذه الدورة المولدة عند Q، وتذهب حول الشريط، ثمّ تقطعه عند P من خلال a، ثمّ تصل إلى نقطة بدايتها.

فإذا كانت z'' دورة ثنائية، فيجب أن تحوي المثلثات 1، و 2، و 3، و 4 في الشكل 6.43 بعددٍ متساوٍ r من المرات وفي الاتجاه المعين؛ ولكن، عندها تصبح $\partial_2(z'')$ تساوي $0 \neq r(2a + l + l')$ و $Z_2(X) = 0$؛ إذن،

$$H_2(X) = 0$$ ▲





الشكل 6.43

مميّز أويلر

لنتحول من حساب الزمر الشباهية إلى القليل من الحقائق والتطبيقات الممتعة. ليكن X مركب مبسطات منتهيًا (أو فضاءً مثالثيًّا) مكوّنًا من مبسطات ثلاثية البعد أو أقل. ليكن n_0 العدد الكلي للرؤوس في المثالثة، وn_1 عدد الحوافّ، وn_2 عدد المبسطات الثنائية، وn_3 عدد المبسطات الثلاثية، فيمكن إظهار العدد

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i n_i$$

بصورة متساوية بغض النظر عن طريقة مثالثة الفضاء X، حيث يسمى هذا العدد **مميّز أويلر (Euler characteristic)** $\chi(X)$ للفضاء. سننصّ فقط على المبرهنة المدهشة الآتية:

7.43 مبرهنة ليكن X مركب مبسطات منتهيًا (أو فضاءً مثالثيًّا) بُعده ≤ 3. وليكن $\chi(X)$ مميز أويلر للفضاء X، وليكن β_j عددًا بيتيًّا لـ $H_i(X)$، فإنّ:

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j$$

تتحقق هذه المبرهنة كذلك لفضاء X بُعْدُه أكبر من 3، بتعميم واضح لتعريف مميّز أويلر لبعد أكبر من 3.

8.43 مثال افترض أن المجسم رباعي السطوح E^3 في الشكل 2.41، هنا $n_0 = 4$، $n_1 = 6$، $n_2 = 4$، و $n_3 = 1$، وهكذا فإنّ:

$$\chi(E^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$$

تذكر أننا رأينا أنّ $H_3(E^3) = H_2(E^3) = H_1(E^3) = 0$ و $H_0(E^3) \simeq \mathbb{Z}$.

إذن، $\beta_3 = \beta_2 = \beta_1 = 0$ و $\beta_1 = 1$، وهكذا

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j = 1 = \chi(E^3)$$

للسطح S^2 في رباعي السطوح في الشكل 2.41، لدينا $n_0 = 4$، $n_1 = 6$، $n_2 = 4$، و $n_3 = 0$، وإذن:

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$

وكذلك، $H_3(S^2) = H_1(S^2) = 0$، وكلا $H_2(S^2)$ و $H_0(S^2)$ يماثل $\mathbb{Z}$؛ إذن، $\beta_3 = \beta_1 = 0$ و $\beta_2 = \beta_0 = 1$، وهكذا

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j = 2 = \chi(S^2)$$

أخيرًا، لـ S^1 في الشكل 9.42، $n_0 = 3$، $n_1 = 3$، و $n_2 = n_3 = 0$، وإذن:

$$\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$$

هنا، كلا $H_1(S^1)$ و $H_0(S^1)$ يماثل $\mathbb{Z}$، و $H_3(S^1) = H_2(S^1) = 0$؛ إذن، $\beta_0 = \beta_1 = 1$

و $\beta_2 = \beta_3 = 0$، ما يعطي:

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j = 0 = \chi(S^1)$$ ▲

دوالّ الفضاءات

تصنع الدالة المتصلة f التي تربط الفضاء X بالفضاء Y تشاكلاً f_{*n} تربط $H_n(X)$ مع $H_n(Y)$ لـ $n \geq 0$، حيث يحتاج برهان وجود هذا التشاكل إلى آليات أكثر ممّا نودّ تطويره هنا، ولكن لنحاول وصف كيفية حساب هذه التشاكلات لبعض الحالات الخاصة، إذ يمثل الآتي حقيقة:

إذا كانت $z \in Z_n(X)$، وإذا كانت $f(z)$ – مفترضة بوصفها نتيجة لاختيار z، ووضعها في Y بصورة واضحة – يتعيّن أن تكون دورة من الرتبة n في Y، فإنّ

$$f_{*n}(z + B_n(X)) = f(z) + B_n(Y)$$

بمعنى أنه إذا كانت z تمثّل فصلًا شباهيًا في $H_n(X)$، و $f(z)$ دورة ذات رتبة n في Y، فإنّ $f(z)$ تمثّل صورة الفصل الشباهي تحت f_{*n} للفصل الشباهي الذي يحوي z.

لنوضّح هذا، ونحاول أن نرى فقط ما نعنيه هنا بـ $f(z)$.

9.43 مثال افترض دائرة الوحدة

$$S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

في $\mathbb{R}^2$، لأيّ نقطة في S^1 إحداثيات $(\cos\theta, \sin\theta)$، كما شاهدنا في الشكل 10.43.
لتكن $f : S^1 \to S^1$ معطاة بـ:

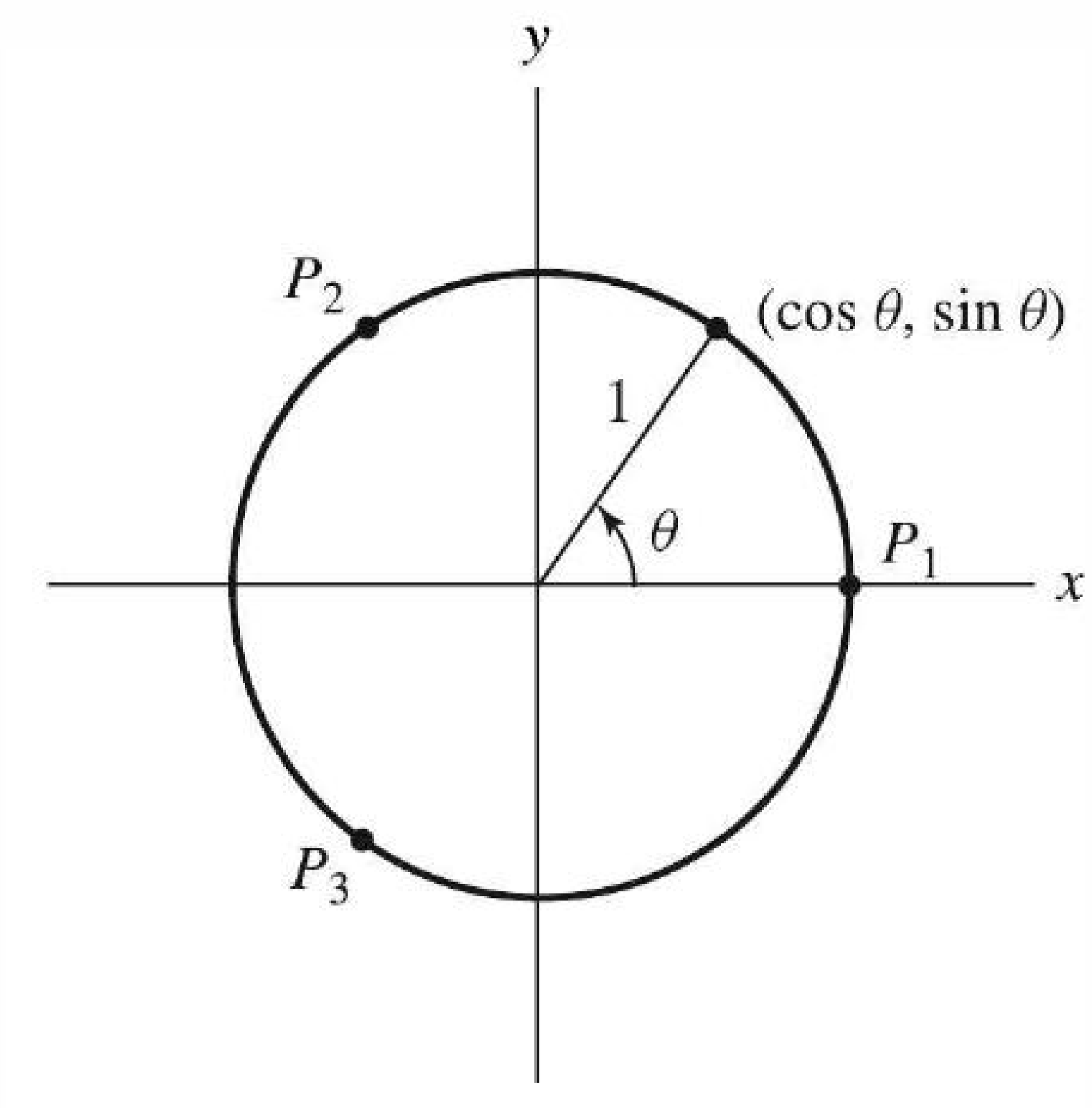
$$f((\cos\theta, \sin\theta)) = (\cos 3\theta, \sin 3\theta).$$

من الواضح أنّ الدالة f متصلة، يجب – الآن – أن تولّد f

$$f_{*1} : H_1(S^1) \to H_1(S^1)$$

هنا، $H_1(X^1)$ تماثل $\mathbb{Z}$، وتولد بالفصل الشباهي $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$، كما رأينا في المثال 8.42، والآن، إذا كانت P_1، و P_2، و P_3 موزّعة على أبعاد متساوية حول الدائرة، فإنّ f تربط كلًا من الأقواس P_1P_2، و P_2P_3، و P_3P_1 مع محيط الدائرة كله، أي إنّ

$$f(P_1P_2) = f(P_2P_3) = f(P_3P_1) = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1.$$



الشكل 10.43

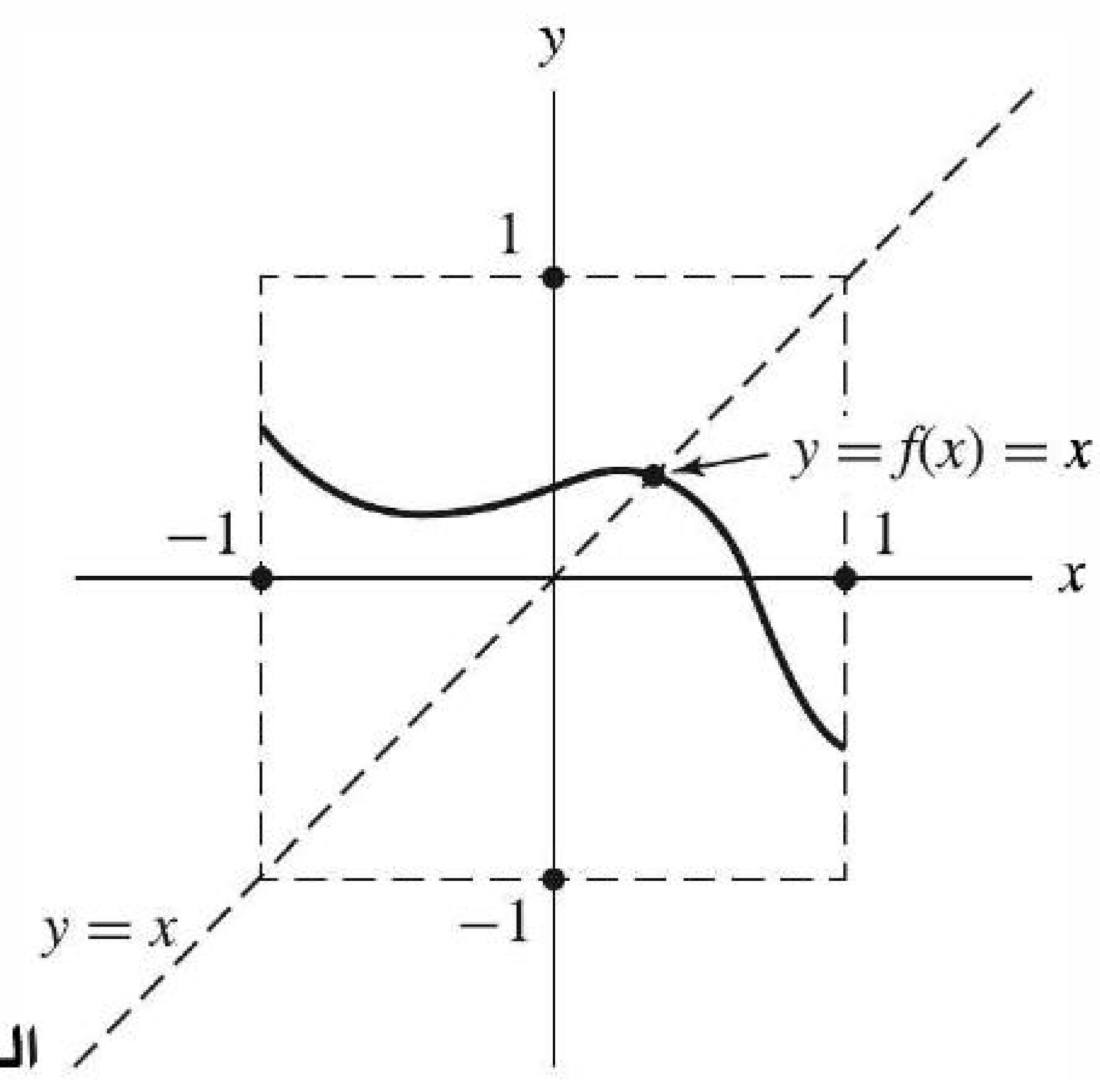
إذن:

$$\begin{aligned} f_{*1}(z + B_1(S^1)) &= 3(P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1) + B_1(S^1) \\ &= 3z + B_1(S^1) \end{aligned}$$

أي إنّ f_{*1} تربط مولد $H_1(S^1)$ بثلاثة أمثاله، وهذا يعكس بوضوح حقيقة أنّ f تلفّ S^1 حول نفسها ثلاث مرات. ▲

يوضح المثال 9.43 زعمنا السابق بأنّ تشاكلات الزمر الشباهية المرتبطة بدالة متصلة f، يمكن أن تعكس صفات مهمّة للدالة.

أخيرًا، سنستخدم هذه المفاهيم في الاستدلال على برهان مبرهنة برور للنقطة الثابتة المشهورة (*Brouwer Fixed – Point Theorem*)، حيث تنصّ هذه المبرهنة على أنّ: للدالة المتصلة f من E^n إلى نفسها نقطة ثابتة، أي إنه يوجد $x \in E^n$، بحيث إنّ $f(x) = x$، لنرى ماذا يعني هذا لـ E^2، منطقة دائرية. تصوّر أنّ لديك صفحة رقيقة من المطاط شُدّت على طاولة لتكوّن قرصًا دائريًّا، علّم الحدود الخارجية لدائرة المطاط على الطاولة بقلم الرصاص، ثم شدّ، واضغط، واثنِ، وافتل، واطوِ المطاط بأيّ صورة من غير تمزيقه، ولكن اتركه دائمًا داخل الدائرة التي رسمتها بالرصاص على الطاولة، عندما تنتهي من ذلك، فإنّ نقطة على المطاط ستبقى تمامًا النقطة نفسها على الطاولة التي بدأت بها.

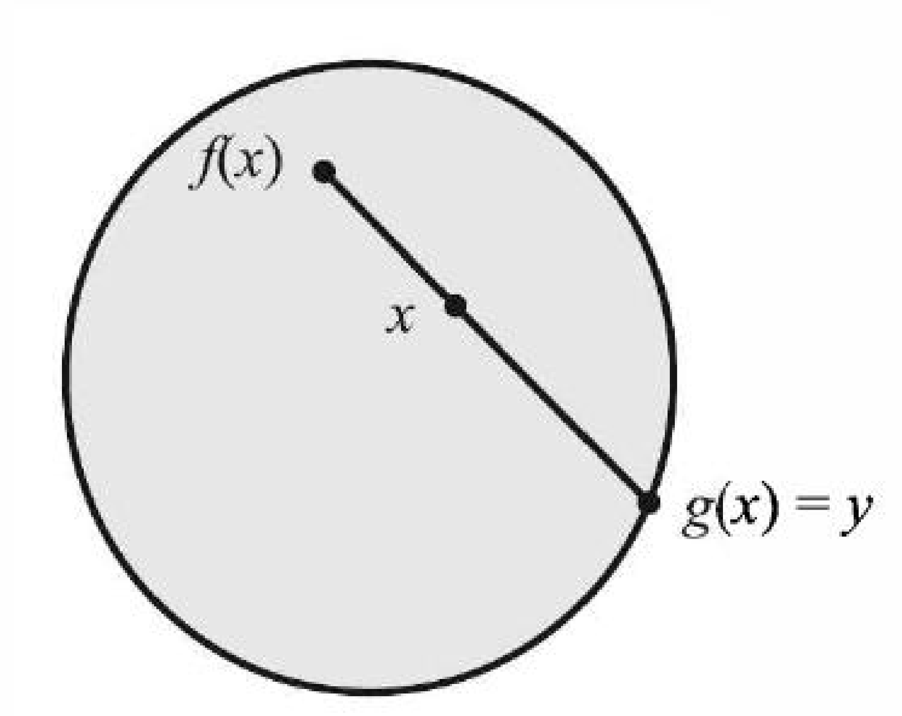


الشكل 11.43

البرهان الذي سنوجزه مناسب لأيّ $n > 1$. في حالة $n = 1$، بالنظر إلى رسمة الدالة $f : E^1 \to E^1$، نجد أنّ المبرهنة تنصّ ببساطة على أنه لأيّ ممرّ متصل يصل الجانبين الأيمن والأيسر للمربع، يجب أن يقطع القطر في مكان ما، كما هو موضح في الشكل 11.43، وعلى الطالب أن يتخيل بناء برهاننا مع E^3 وحدودها S^2 و E^2 وحدودها S^1، حيث يحتوي البرهان شكلًا يوضّح البناء في حالة E^2.

12.43 مبرهنة (مبرهنة برور للنقطة الثابتة) للدالة المتصلة f من E^n إلى نفسها نقطة ثابتة، حيث $n \geq 1$.

البرهان عُدّت حالة $n = 1$ في الأعلى. لتكن f دالة من E^n إلى E^n ، حيث $n > 1$، وسنفترض أنّ f من غير نقاط ثابتة ونتوصل إلى تناقض.



الشكل 13.43

إذا كان $f(x) \neq x$ لكل $x \in E^n$، فبإمكاننا أن نعُدّ القطعة المستقيمة من $f(x)$ إلى x ، لنمدّ هذه القطعة المستقيمة في الاتجاه من $f(x)$ إلى x حتى تصل إلى S^{n-1} حدود E^n عند النقطة y، هذا يعرّف لنا دالة $g : E^n \to S^{n-1}$ ، حيث $g(x) = y$ ، كما هو موضح في الشكل 13.43، لاحظ أنه إذا كانت y على الحدود، فإنّ $g(y) = y$، الآن، ولأنَّ f متصلة، فإن g متصلة كذلك بصورة واضحة وجميلة. (الدالة المتصلة **(continuous function)** هي – تقريبًا – دالة تربط النقاط القريبة كفاية من بعضها بنقاط قريبة من بعضها، فإذا كانت x_1 و x_2 قريبتين كفاية من بعضهما، فإنّ $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قريبتان كفاية من بعضهما كذلك، بحيث إنّ القطعة المستقيمة التي تصل $f(x_1)$ و x_1 قريبة من القطعة المستقيمة التي تصل $f(x_2)$، و x_2 وهكذا، فإن $y_2 = g(x_2)$ قريبة من $y_1 = g(x_1)$؛ إذن، g متصلة، وتربط E^n بـ S^{n-1}، وهكذا، فهي تولد تشاكلا

$$g_{*(n-1)} : H_{n-1}(E^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

قلنا: إنّ $H_{n-1}(E^n) = 0$ ، حيث $n > 1$؛ لأن E^n متقلصة، وتحققنا من ذلك لـ $n = 2$ و $n = 3$، ولأنَّ $g_{*(n-1)}$ تشاكل، فيجب أن نحصل على $g_{*(n-1)}(0)=0$، ولكنّ الدورة من الرتبة $(n - 1)$ التي تمثّل الفصل الشباهي 0 في $H_{n-1}(E^n)$ هو كامل المركب S^{n-1} مع الاتجاه الصحيح للمبسطات، و $g(S^{n-1}) = S^{n-1}$ ؛ لأن $g(y) = y$ لكل $y \in S^{n-1}$ ؛ إذن:

$$g_{*(n-1)}(0) = S^{n-1} + B_{n-1}(S^{n-1}).$$

الذي هو مولد $\neq 0$ لـ $H_{n-1}(S^{n-1})$ ، تناقض. ♦

وجدنا البرهان السابق جميلًا جدًّا، ونأمل أن تجده كذلك.

■ تمارين 43

تمارين مقترحة

.1 تحقق بالحسابات المباشرة أنّ كلتا المثالثتين للمنطقة المربعة X في الشكل 1.42 تعطي القيمة نفسها لمميز أويلر $\chi(X)$.

.2 وضّح المبرهنة 7.43 – كما فعلنا في المثال 8.43 – لكل من الفضاءات الآتية:

أ. المنطقة الحلقية في المثال 10.42.

ب. الطارة في المثال 12.42.

جـ. قارورة كلاين في المثال 1.43.

.3 هل لكل دالة متصلة من منطقة مربعة إلى نفسها نقطة ثابتة؟ لماذا نعم؟ أو لماذا لا؟ هل لكل دالة متصلة من فضاء مكوّن من خليّتين ثنائيتين غير متقاطعتين إلى نفسه نقطة ثابتة؟ لماذا نعم؟ أو لماذا لا؟

.4 احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين ثنائيتين تمسّان قارورة كلاين بنقطة واحدة.

.5 احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من قارورتي كلاين وبلا نقاط مشتركة.

.6 ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

__________ أ. كلّ زمرة شباهية لفضاء متقلص زمرة تافهة بعنصر واحدة.

__________ ب. كلّ دالة متصلة من مركب مبسطات X إلى مركب مبسطات Y، يولد تشاكلاً من $H_n(X)$ إلى $H_n(Y)$.

__________ جـ. الزمر الشباهية كلّها إبدالية.

__________ د. الزمر الشباهية كلّها إبدالية حرّة.

__________ هـ. الزمر الشباهية ذات البعد 0 كلّها إبدالية حرّة.

__________ و. إذا كان للفضاء X مبسطات من الرتبة n، وليس لأيّ منها بعد أكبر من n و $H_n(X) \neq 0$ فإنّ $H_n(X)$ إبدالية حرّة.

__________ ز. حدود سلسلة ذات رتبة n، سلسلة ذات رتبة $(n-1)$.

__________ ح. حدود سلسلة ذات رتبة n، دورة ذات رتبة $(n-1)$.

__________ ط. الحدود ذات الرتبة n تشكل زمرة جزئية من الدورات ذات البعد n.

__________ ي. تكون الزمرة الشباهية ذات البعد n لمركب مبسطات دائمًا زمرة جزئية من السلاسل ذات الرتبة n.

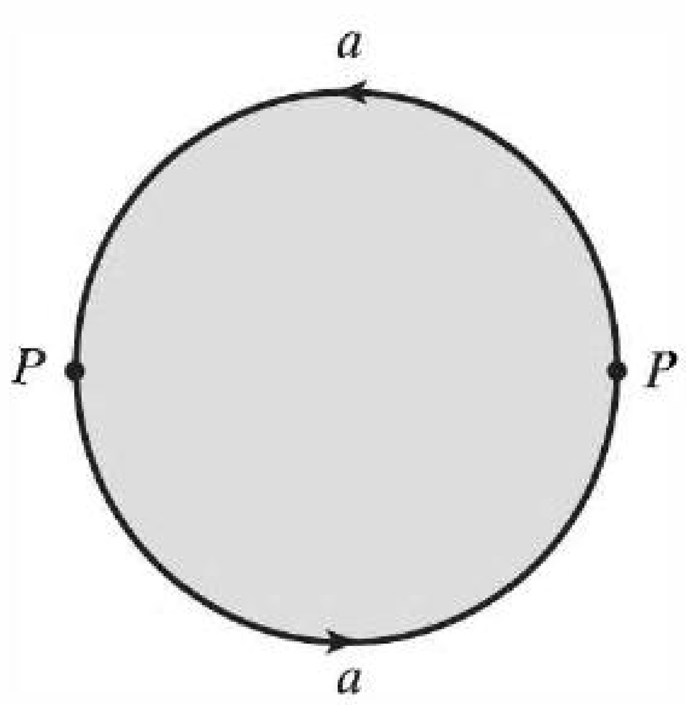
المزيد من التمارين

7. أوجد مميز أويلر لكرة ثنائية لها n من المقابض. (انظر الفصل 42، تمرين 12).

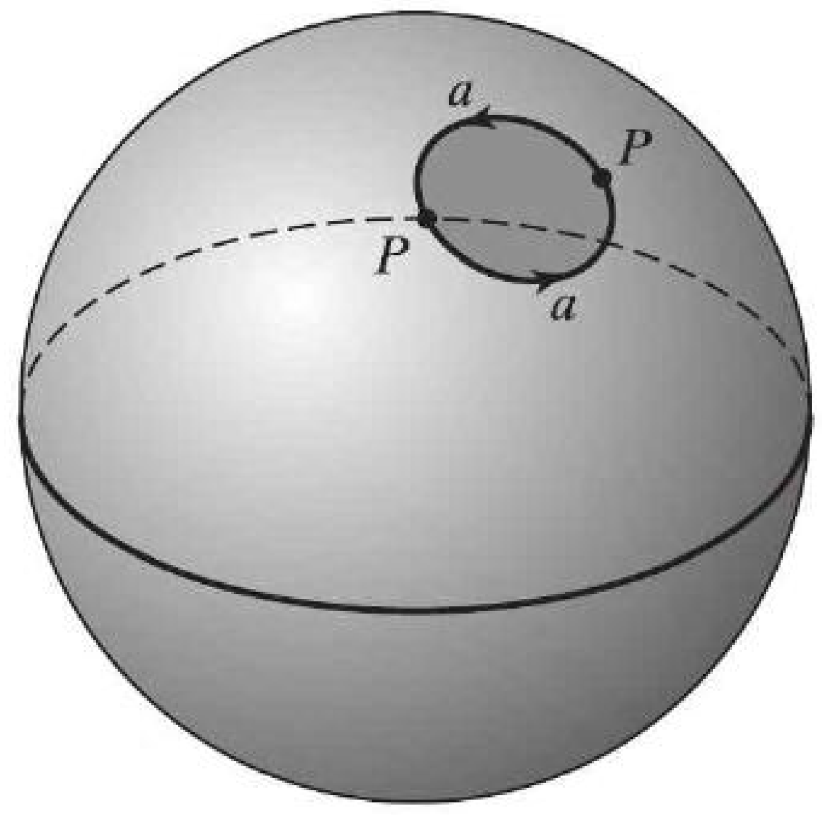
8. يمكننا صنع مستوًى إسقاطي حقيقي طبولوجيًّا X، باستخدام الشكل 14.43 بربط أنصاف الدوائر a، بحيث تجمع النقاط المتقابلة حول القطر معًا، وتتطابق اتجاهات الأسهم، ولا يمكن عمل هذا في الفضاء الإقليدي الثلاثي $\mathbb{R}^3$؛ لذا، يجب على المرء الذهاب إلى $\mathbb{R}^4$، ونقوم بمثالثة هذا الفضاء X بدءًا بالنموذج المعروض في الشكل 14.43، وحساب زمره الشباهية.

9. يمكن تشكيل القرص الدائري المعروض في الشكل 14.43 طبولوجيًّا ليظهر بوصفه كرة ثنائية لها ثقب، كما هو معروض في الشكل 15.43. نكوّن مستوًى إسقاطيًّا حقيقيًّا من هذه الصورة بخياطة الثقب، بحيث تُخاط نقاط حافّة الثقب المتقابلة حول القطر معًا، لا يمكن عمل هذا في $\mathbb{R}^3$.

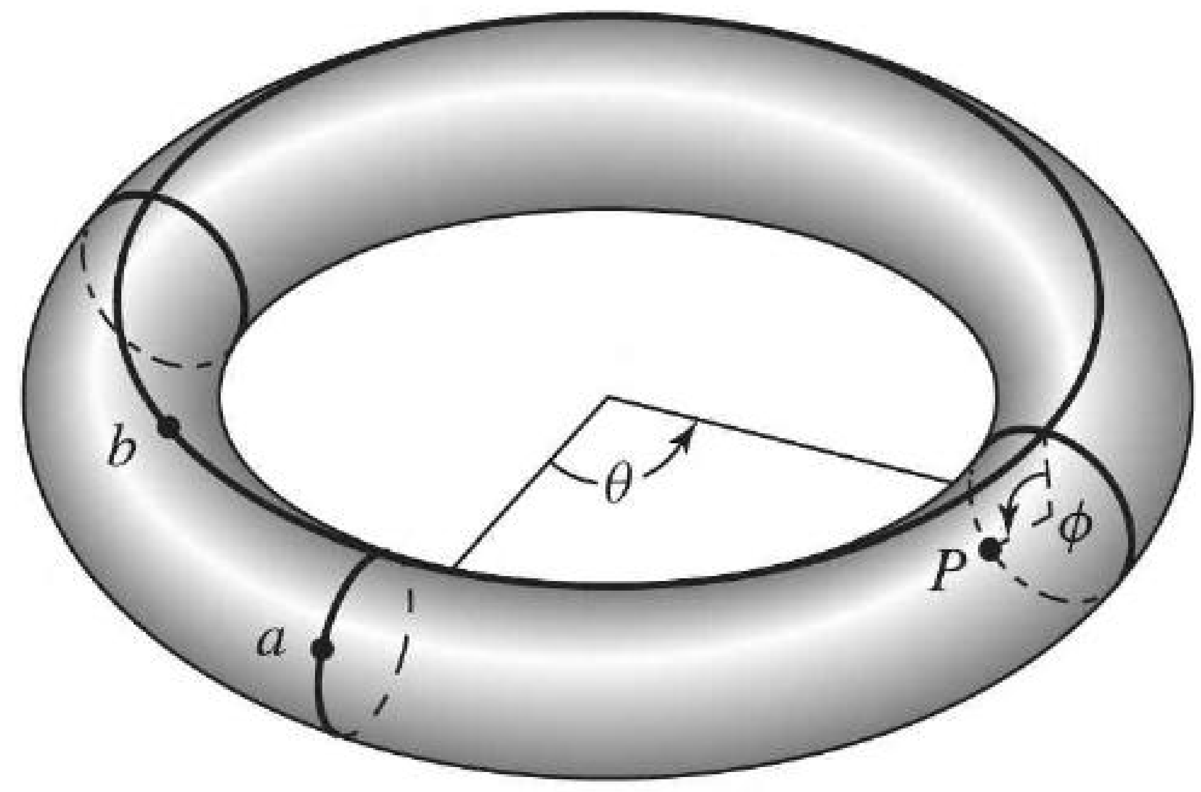
بتعميم هذه الفكرة، تعطي الكرة الثنائية ذات ألـ q ثقبًا، التي تُخاط بنقاط حوافّ الثقوب المتقابلة حول القطر مع بعضها بوصفها كرة ثنائية ذات q من القبعات المتقاطعة. أوجد الزمر الشباهية لكرة ثنائية ذات q من القبعات المتقاطعة. (لرؤية المثالثة، اعرض الفضاء مثل القرص في الشكل 14.43، ولكن مع $q-1$ من الثقوب اللازم خياطتها، كما وصف في الأعلى. ثمّ قم بمثالثة القرص مع هذه الثقوب).



الشكل 14.43



الشكل 15.43



الشكل 16.43

ملاحظة: يمكن إثبات أنّ كل سطح مغلق لطيف بما فيه الكفاية – منطو ثنائي مغلق (*closed 2-manifold*) – متماثل استمراريًّا مع كرة ثنائية بعدد $h \geq 0$ من المقابض إذا كان السطح ثنائي الجوانب، ومتماثلًا استمراريًّا مع كرة ثنائية مع $q > 0$ من القبعات المتقاطعة إذا كان أحادي الجانب، والعدد h أو q – كما قد تكون الحالة – يسمّى **جنس السطح (genus of the surface)**.

10. يمكن وصف كل نقطعة P على طارة منتظمة X عن طريق زاويتين θ و ϕ، كما هو مبين في الشكل 16.43، أي إنه بإمكاننا ربط الإحداثيين $(\theta,\ \phi)$ بـ P. صف الدالة المتولدة f_{*n} من $H_n(X)$ إلى $H_n(X)$ لـ $n = 0, 1, 2$، لكل من الدوال f المعرّفة على الطارة X إلى نفسها المعطاة في الأسفل، بإيجاد صور مولدات $H_n(X)$ الموصوفة في المثال 12.42. ترجم تشاكلات الزمر هذه هندسيًّا، كما فعلنا في المثال 9.43.

أ. $f : X \to X$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (2\theta,\phi)$

ب. $f : X \to X$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (\theta,2\phi)$

جـ. $f : X \to X$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (2\theta,2\phi)$

11. بالرجوع إلى التمرين 10، يمكن ربط الطارة X بصورة غامرة بدائرتها b (التي تماثل استمراريًّا S^1) بتشكيلة من الدوال. لكل من هذه الدوال $f : X \to b$ المعطاة في الأسفل، صف التشاكل $f_{*n} : H_n(X) \to H_n(b)$ حيث $n = 0, 1, 2$، بوصف صور مولدات $H_n(X)$ كما في التمرين 10.

أ. $f : X \to b$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (\theta,0)$

ب. $f : X \to b$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (2\theta,0)$

12. كرّر التمرين 11، ولكن بإظهار الدالة f بوصفها دالة من الطارة X إلى نفسها، مولدة الدوال

$$f_{*n} : H_n(X) \to H_n(X)$$

13. افترض الدالة f على قارورة كلاين في الشكل 2.43، المعطاة بربط النقطة Q على المستطيل في الشكل 2.43 بصورة غامرة بالنقطة على b المقابلة لها مباشرة (الأقرب لها). لاحظ أنّ b كرة أحادية طبولوجيًّا. احسب الدوال المتولدة $f_{*n} : H_n(X) \to H_n(b)$ حيث $n = 0, 1, 2$، بوصف صور مولدات $H_n(X)$.

الجبر الشباهي Homological Algebra

سلسلة المركبات والدوالّ

كانت الطبولوجيا الجبرية مسؤولة عن الاندفاع في اتجاه جديد في الجبر، حيث ترى، أنه لو كان لديك مركب مبسطات X، فإنك تحصل على سلسلة من الزمر $C_k(X)$ ودوال ∂_k بصورة طبيعية، كما هو مبين في المخطط

$$C_n(X)\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}(X)\xrightarrow{\partial_{n-1}}\dots\xrightarrow{\partial_2}C_1(X)\xrightarrow{\partial_1}C_0(X)\xrightarrow{\partial_0}0$$

حيث $\partial_{k-1}\partial_k=0$، ثمّ يمكنك تجريد الجزء الجبري البحت في هذا الموقف، وتعدّ أيّ متتالية من الزمر الإبدالية A_k والتشاكلات $\partial_k:A_k\to A_{k-1}$، بحيث إنّ $\partial_{k-1}\partial_k=0$ لكل $k\geq 1$، ولكي لا تحتاج دائمًا إلى $k\geq 1$ في $\partial_{k-1}\partial_k=0$، فمن المناسب أن تعُدّ متواليات "ثنائية اللانهاية" من الزمر A_k لكل $k\in\mathbb{Z}$، وقد جرت العادة في التطبيقات أن تكون $A_k=0$ لكل $k<0$ و $k>n$. دراسة مثل هذه المتتاليات والدوال لمثل هذه المتتاليات هو موضوع الجبر الشباهي.

1.44 تعريف السلسلة المركبة (**Chain Complex**) $\langle A,\partial\rangle$ متتالية ثنائية اللانهاية

$$A=\{\dots,A_2,A_1,A_0,A_{-1},A_{-2},\dots\}$$

من الزمر الإبدالية A_k، مع مجموعة $\partial=\{\partial_k\mid k\in\mathbb{Z}\}$ من التشاكلات، بحيث إنّ $\partial_k:A_k\to A_{k-1}$ و $\partial_{k-1}\partial_k=0$. ■

بوصفه تشابهًا ملائمًا لترميزنا في مبرهنة الزمر، سنكون مهملين، وندع "A" ترمز للسلسلة المركبة $\langle A,\partial\rangle$ نستطيع الآن التقليد بوضع جبري كامل لبنائنا وتعريفاتنا في الفصل 41.

2.44 مبرهنة إذا كانت A سلسلة مركبة، فإنّ الصورة تحت تأثير ∂_k زمرة جزئية من نواة ∂_{k-1}.

البرهان افترض

$$A_k\xrightarrow{\partial_k}A_{k-1}\xrightarrow{\partial_{k-1}}A_{k-2}$$

الآن، $\partial_{k-1}\partial_k=0$؛ لأن A سلسلة مركبة، بمعنى أنّ $\partial_{k-1}\left[\partial_k\left[A_k\right]\right]=0$، وهذا يخبرنا مباشرة بأنّ $\partial_k\left[A_k\right]$ محتواة في نواة ∂_{k-1}، وهو ما نودّ برهانه. ♦

3.44 تعريف إذا كانت A سلسلة مركبة، فإنّ النواة $Z_k(A)$ لـ ∂_k **هي زمرة الدورات ذات الرتبة k** (***group of k-cycles***)، والصورة $B_k(A)=\partial_{k+1}\left[A_{k+1}\right]$ **هي زمرة الحدود ذات الرتبة k** (***group of k-boundaries***)، وزمرة العامل $H_k(A)=Z_k(A)/B_k(A)$ **هي زمرة الشباه ألـ k لـ A** (***k th homology group of A***). ■

ذكرنا في الفصل السابق أنه لمركبتي مبسطات X و Y، تولد الدالة المتصلة من X إلى Y تشاكلاً من $\mathrm{H}_k(X)$ إلى $H_k(Y)$، حيث تنتج هذه الدالة للزمر الشباهية كالآتي:

لمثالثات مناسبة لـ X و Y، تولد الدالة f تشاكلاً f_k من $C_k(X)$ إلى $C_k(Y)$، التي تتمتع بخاصية مهمّة، وهي أنها تتبدل مع ∂_k، أي إنّ

$$\partial_k f_k = f_{k-1}\partial_k$$

لنعد إلى حالة الجبر المجرد، ونرى كيف يولد هذا دالة على الزمر الشباهية.

4.44 مبرهنة (التمهيدية الأساسية): لتكن A و A' مع المجموعتين ∂ و ∂' من التشاكلات سلسلتين مركبتين، وافترض وجود مجموعة f من التشاكلات $f_k : A_k \to A'_k$، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial'_{k+2}} & A'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & A'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & A'_{k-1} & \xrightarrow{\partial'_{k-1}} & \cdots
\end{array}$$

افترض– زيادة على ذلك– أنّ كل مربع منها تبديلي، بمعنى أنّ:

$$f_{k-1}\partial_k = \partial'_k f_k$$

لكل k، فإنّ f_k تولد تشاكلًا طبيعيًّا $f_{*k} : H_k(A) \to H_k(A')$

البرهان لتكن $z \in Z_k(A)$، الآن:

$$\partial'_k(f_k(z)) = f_{k-1}(\partial_k(z)) = f_{k-1}(0) = 0$$

وهكذا، فإنّ $f_k(z) \in Z_k(A')$، لنحاول تعريف $f_{*k} : H_k(A) \to H_k(A')$ بـِ

$$f_{*k}(z + B_k(A)) = f_k(z) + B_k(A') \qquad (1)$$

يجب علينا أولًا إثبات أنّ f_{*k} حسنة التعريف، أي إنها مستقلة عن خيارنا لممثل $z + B_k(A)$، افترض أنّ، $z_1 \in (z + B_k(A))$، وهكذا $(z_1 - z) \in B_k(A)$، يوجد $c \in A_{k+1}$ يجب أن $z_1 - z = \partial_{k+1}(c)$. ولكن حينها

$$f_k(z_1) - f_k(z) = f_k(z_1 - z) = f_k(\partial_{k+1}(c)) = \partial'_{k+1}(f_{k+1}(c))$$

وهذا الحدّ الأخير هو عنصر في $\partial'_{k+1}\left[A'_{k'+1}\right] = B_k(A')$؛ إذن،

$$f_k(z_1) \in (f_k(z) + B_k(A'))$$

إذن، الممثلان للمجموعة نفسها المشاركة في $H_k(A)=Z_k(A)/B_k(A)$ يرتبطان بممثلين لمجموعة مشاركة واحدة في $H_k(A')=Z_k(A')/B_k(A')$، وهذا يثبت أنّ $f_{*k}:H_k(A)\to H_k(A')$ حسنة التعريف كما في المعادلة (1).

الآن، نحسب: f_{*k} بأخذ f_k على ممثلات المجموعات المشاركة، ونعرّف عملية الزمرة على زمرة العامل بتطبيق عملية الزمرة للزمرة الأصلية على ممثلات المجموعات المشاركة، وينتج مباشرة عن حقيقة أنّ تأثير f_k في $Z_k(A)$ هو تشاكل من $Z_k(A)$ إلى $Z_k(A')$، أنّ f_{*k} تشاكل من $H_k(A)$ إلى $H_k(A')$. ♦

إذا كانت مجموعات الدوالّ f، و ∂، و ∂' تحقق خاصية – المعطاة في المبرهنة 4.44 – أنّ المربعات تبديلية، فإنّ f تتبدل مع ∂ (**commutes with**).

بعد تعريف آخر، سنعطي ما يبدو تافهًا، ولكنه توضيح مهم جدًّا لمبرهنة 4.44.

5.44 تعريف السلسلة المركبة $\langle A',\partial'\rangle$ **هي مركب جزئي من السلسلة المركبة** $\langle A,\partial\rangle$ (**subcomplex of a chain complex**)، إذا كان لكل k زمرة جزئية من A_k A'_k، و $\partial'_k(c)=\partial_k(c)$ لكل $c\in A'_k$، أي إن ∂'_k و ∂_k لهما التأثير نفسه في عناصر الزمرة الجزئية A'_k من A_k. ■

6.44 مثال لتكن A سلسلة مركبة، ولتكن A' مركبة جزئية من A لتكن i مجموعة دوال الإدخال كلها $i_k:A'_k\to A_k$ المعطاة بـ $i_k(c)=c$ لكل $c\in A'_k$. من الواضح أنّ i تتبدل مع ∂؛ إذن، تتولد لدينا تشاكلات $i_k:A'_k\to A_k$، ومن الطبيعي أن يظن المرء أنّ i_{*k} يجب أن تكون دالة تماثل من $H_k(A)$ إلى $H_k(A')$.

ولكن هذا ليس بالضرورة صحيحًا، على سبيل المثال: افترض الكرة الثنائية S^2 بوصفها مركبًا جزئيًّا من الخلية الثلاثية E^3 يعطي هذا $i_2:C_2(S^2)\to C_2(E^3)$، ما يولد

$$i_{*2}:H_2(S^2)\to H_2(E^3)$$

إلّا أننا رأينا أنّ $H_2(S^2)\simeq\mathbb{Z}$، بينما $H_2(E^3)=0$؛ إذن، فمن الممكن ألا تكون i_{*2} دالة تم اثل. ▲

علم الشباه النسبي

افترض أنّ A' مركب جزئي من السلسلة المركبة A الوضع الطبولوجي الذي جاء منه هذا هو عدّ المركب الجزئي للمبسطات Y (بالمعنى الواضح) من مركب المبسطات X، عندها، يمكننا ببساطة أن نعُدّ $C_k(Y)$ بوصفها زمرة جزئية من $C_k(X)$، تمامًا مثل الحالة في الجبر أن لدينا A_k' زمرة جزئية من A_k، ومن الواضح أنّ لدينا

$$\partial_k\left[C_k(Y)\right] \leq C_{k-1}(Y)$$

لنتعامل الآن مع حالة الجبر، ونتذكر أنه بإمكاننا تطبيقه على حالة الطبولوجيا في أيّ وقت.

إذا كان A' مركبًا جزئيًّا من السلسلة المركبة A، فيمكننا تكوين المجموعة A/A' من زمر العامل A_K/A'_K، حيث ندّعى أنّ A/A' تعطي مرة أخرى سلسلة مركبة بطريقة طبيعية، ويجب علينا أن نصنع مجموعة $\overline{\partial}$ من التشاكلات

$$\overline{\partial}_k : (A_k/A'_k) \to (A_{k-1}/A'_{k-1})$$

بحيث إنّ $\overline{\partial}_{k-1}\overline{\partial}_k = 0$. محاولة تعريف $\overline{\partial}_k$ واضحة، أي عرّف

$$\overline{\partial}_k(c + A_k') = \partial_k(c) + A_{k-1}'$$

لكل $c \in A_k$. يجب علينا إثبات ثلاثة أمور، هي: أنّ $\overline{\partial}_k$ حسنة التعريف، وأنها تشاكل، وأن $\overline{\partial}_{k-1}\overline{\partial}_k = 0$

أولاً، لإثبات أنّ $\overline{\partial}_k$ حسنة التعريف، ليكن c_1 كذلك ينتمي إلى $c + A_k'$؛ إذن، $(c_1 - c) \in A_k'$، وهكذا، فإنّ: $\partial_k(c_1 - c) \in A_{k-1}'$؛ إذن:

$$\partial_k(c_1) \in (\partial_k(c) + A_{k-1}')$$

كذلك. يثبت هذا أنّ $\overline{\partial}_k$ حسنة التعريف.

تثبت المعادلة

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_k((c_1 + A_k') + (c_2 + A_k')) &= \overline{\partial}_k((c_1 + c_2) + A_k') \\
&= \partial_k(c_1 + c_2) + A_{k-1}' \\
&= (\partial_k(c_1) + \partial_k(c_2)) + A_{k-1}' \\
&= \overline{\partial}_k(c_1 + A_k') + \overline{\partial}_k(c_2 + A_k')
\end{aligned}$$

أنّ $\overline{\partial}_k$ تشاكل.

أخيرًا،

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_{k-1}(\overline{\partial}_k(c + A_k')) &= \overline{\partial}_{k-1}(\partial_k(c) + A_{k-1}') \\
&= \partial_{k-1}(\partial_k(c)) + A_{k-2}' = 0 + A_{k-2}'
\end{aligned}$$

وإذن، $\overline{\partial}_{k-1}\overline{\partial}_k = 0$.

المناقشة السابقة نموذج للحسابات الاعتيادية للعاملين بالجبر الشباهي، إضافة إلى أنّ جمع الأعداد الصحيحة وضربها اعتيادي لك، وقد قدمناها بتفصيل كبير، على المرء أن يكون حذرًا بعض الشيء في متابعة البعد، أي متابعة الدليل السفلي، وفي الحقيقة، لا يكتب المحترفون في الجبر الشباهي عادة هذه الأدلة، ولكنهم يعرفون تمامًا مع أيّ زمرة يعملون، لقد أعطينا الأدلة السفلية كلها لتبقى متابعًا أيّ الزمر بالضبط قيد الحساب، لنلخّص العمل السابق بمبرهنة.

7.44 مبرهنة إذا كان A' مركبًا جزئيًّا من السلسلة المركبة A، فإنّ المجموعة A/A' من زمر العامل A_k/A_k' مع المجموعة $\bar{\partial}$ من التشاكلات، بحيث تعرّف $\bar{\partial}_k$ بـ

$$\bar{\partial}_k(c+A_k')=\partial_k(c)+A_{k-1}'$$

لكل $c\in A_k$، تشكل سلسلة مركبة.

لأنَّ A/A' سلسلة مركبة، فبإمكاننا صنع زمر شباهية $H_k(A/A')$.

8.44 تعريف زمرة الشباه $H_k(A/A')$ **هي الزمرة ألـ k الشباهية النسبية لـ A مقياس A'.**

(k th relative homology group of A modulo A') ■

في حالة الطبولوجيا، حيث Y مركب جزئي من مركب المبسطات X، سنستعمل المصطلحات العادية في الطبولوجيا، ونرمز للزمرة ألـ k الشباهية النسبية المتولدة من المركب الجزئي $C(Y)$ من السلسلة المركبة $C(X)$ بـ " $H_k(X,Y)$ ". سلاسل Y" كلها ستوضع لتساوي 0"، وهذا يقابل هندسيًّا تقلص Y إلى نقطة.

9.44 مثال ليكن X مركب مبسطات مكوّنًا من حوافّ (مستثنيًا الداخل) للمثلث في الشكل 10.44، وليكن Y مركبًا جزئيًّا مكوّنًا من الحافّة P_2P_3. لقد رأينا أنّ $H_1(X)\simeq H_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$، حيث إنّ تقلص P_2P_3 إلى نقطة يؤدي إلى إنهيار حافة المثلث، كما هو مشاهد في الشكل 11.44، لا يزال الناتج يساوي S^1 طبولوجيًا؛ إذن، نتوقع مرة أخرى أنّ نحصل على $H_1(X,Y)\simeq\mathbb{Z}$.

مولدات $C_1(X)$ هي P_1P_2، و P_2P_3 و P_3P_1، ولأنَّ $P_2P_3\in C_1(Y)$، فنرى أنّ مولدات $C_1(X)/C_1(Y)$ هي $P_1P_2+C_1(Y)$ و $P_3P_1+C_1(Y)$.

لإيجاد $Z_1(X,Y)$، نحسب:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_1(nP_1P_2+mP_3P_1+C_1(Y))&=\partial_1(nP_1P_2)+\partial_1(mP_3P_1)+C_0(Y)\\&=n(P_2-P_1)+m(P_1-P_3)+C_0(Y)\\&=(m-n)P_1+C_0(Y)\end{aligned}$$

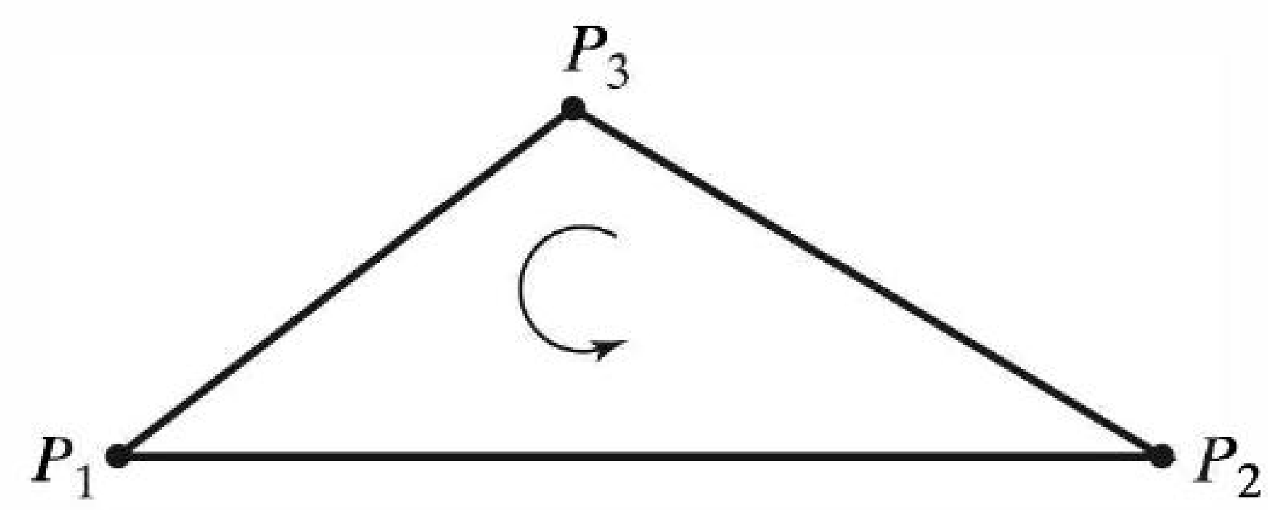
لأن $P_2,P_3\in C_0(Y)$؛ إذن، يجب أن تكون $m=n$ لدورة، وهكذا، فإنّ مولد $Z_1(X,Y)$ هو

$(P_1P_2+P_3P_1)+C_1(Y)$، ولأنّ $B_1(X,Y)=0$ ، فنرى بالتأكيد أنّ $H_1(X,Y)\simeq\mathbb{Z}$

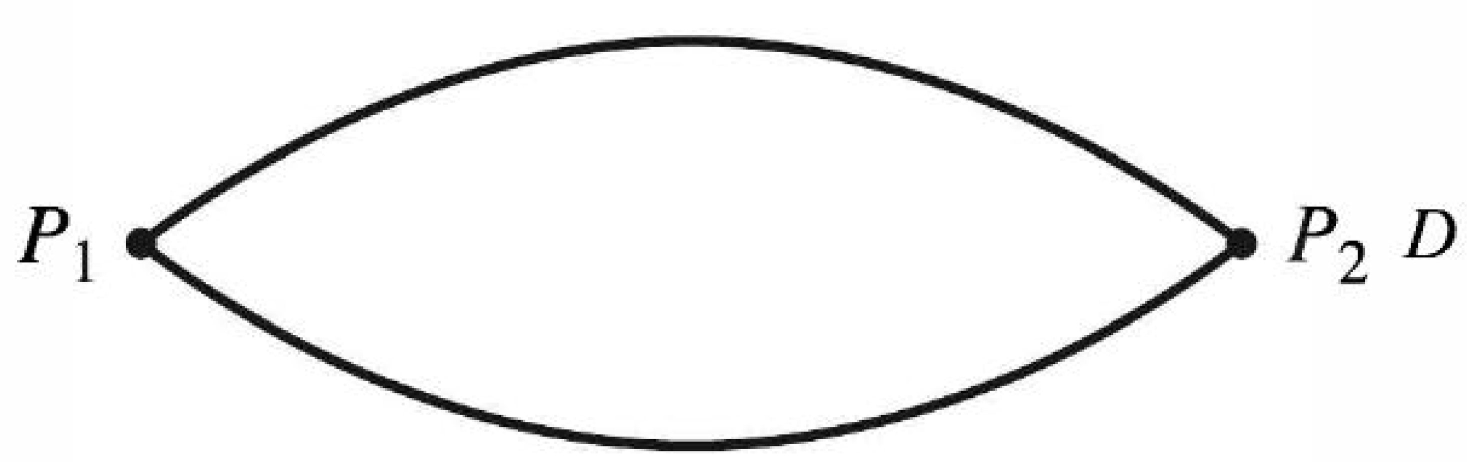
لأنّ $P_1+C_0(Y)$ تولد $Z_0(X,Y)$

و $\bar{\partial}_1(P_2P_1+C_1(Y))=(P_1-P_2)+C_0(Y)=P_1+C_0(Y)$

نرى أنّ $H_0(X,Y)=0$. هذا مميز للزمر الشباهية النسبية ذات البعد 0 لمركب مبسطات متصل ▲

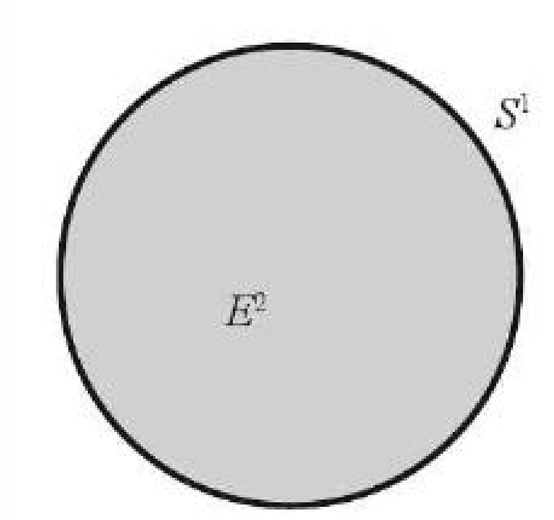


الشكل **10.44**



الشكل **11.44**

12.44 مثال لنعُدّ S^1 بوصفها مركبًا جزئيًا (حدود) من E^2 ، ونحسب $H_2(E^2,S^1)$. تذكر أنّ E^2 قرص دائري، وبهذا يمكن أن نعُدّ S^1 حدوده (انظر الشكل 13.44). يمكنك تبيين تقلص S^1 إلى نقطة بتثبيت خيط مطاط على حوافّ قطعة دائرية من القماش، ثم تسحب الخيط، بحيث تتجمّع حوافّ الدائرة في نقطة واحدة. يكون الفضاء الناتج كيسًا مغلقًا أو S^2؛ إذن بينما $H_2(E^2)=0$؛ لأن E^2 فضاء متقلص، فنتوقع أن



الشكل **13.44**

$$H_2(E^2,S^1)\simeq\mathbb{Z}$$

لغايات الحساب، يمكننا أن نعُدّ E^2 طبولوجيًا كالمنطقة المثلثة في الشكل 10.44 و S^1 كحافّة للمثلث؛ إذن، يتولد $C_2(E^2,S^1)$ بـ $P_1P_2P_3+C_2(S^1)$،

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_2(P_1P_2P_3+C_2(S^1)) &= \partial_2(P_1P_2P_3)+C_1(S^1) \\ &= (P_2P_3-P_1P_3+P_1P_2)+C_1(S^1)\end{aligned}$$ و

ولكن $(P_2P_3-P_1P_3+P_1P_2)\in C_1(S^1)$ ، ما يؤدي إلى أنّ

$$\bar{\partial}_2(P_1P_2P_3+C_2(S^1))=0$$

إذن، $P_1P_2P_3+C_2(S^1)$ عنصر في $Z_2(E^2,S^1)$ ، ولأنّ

$$B_2(E^2,S^1)=0$$

فنرى أنّ

$$H_2(E^2,S^1)\simeq\mathbb{Z}$$

كما توقعنا ▲

المتتالية الشباهية المضبوطة لزوج

سنصف الآن المتتالية الشباهية المضبوطة لزوج، ونعطي تطبيقًا.

لن نعمل تفاصيل الحسابات جميعها، فالحسابات عادية ومباشرة، وسنعطي التعريفات اللازمة كلها، وسنترك للطالب إكمال التفاصيل في التمارين.

14.44 تمهيدية ليكن A' مركبًا جزئيًا من السلسلة المركبة A. لتكن j مجموعة التشاكلات الطبيعية

$j_k : A_k \to (A_k / A_k^{'})$، فإنّ

$$j_{k-1}\partial_k = \overline{\partial}_k j_k ,$$

بمعنى أنّ j يتبدل مع ∂.

البرهان سندع هذه الحسابات السهلة للتمارين. (انظر التمرين 12). ♦

15.44 مبرهنة تولد الدالة j_k في التمهيدية 14.44 تشاكلًا طبيعيًا

$$j_{*k} : H_k(A) \to H_k(A / A')$$

البرهان ينتج هذا مباشرة من التمهيدية 14.44 والمبرهنة 4.44. ♦

ليكن A' مركبًا جزئيًا من السلسلة المركبة A. لتكن $h \in H_k(A / A')$، فإنّ $h = z + B_k(A / A')$، حيث $z \in Z_k(A / A')$، وتبعًا لذلك، $z = c + A_k^{'}$، حيث $c \in A_k$. (لاحظ أننا وصلنا إلى c من h بخيارين متتابعين للممثلات). الآن $\overline{\partial}_k(z) = 0$، وهذا يؤدي إلى أنّ $\partial_k(c) \in A_{k-1}^{'}$، هذا وبالترافق مع $\partial_{k-1}\partial_k = 0$، يعطينا $\partial_k(c) \in Z_{k-1}(A')$.

عرّف

$$\partial_{*k} : H_k(A / A') \to H_{k-1}(A')$$

بـ

$$\partial_{*k}(h) = \partial_k(c) + B_{k-1}(A')$$

يبدو هذا التعريف لـ ∂_{*k} معقدًا جدًا. فكّر فيه كما يأتي: ابدأ بعنصر من $H_k(A / A')$، مثل هذا العنصر يمثل – الآن – بدورة نسبية من الرتبة k مقياس A'؛ وبالقول: إنها دورة نسبية من الرتبة k مقياس A' يكافئ قولنا: إن حدودها في $A_{k-1}^{'}$، لأن حدودها في $A_{k-1}^{'}$ وهي حدود شيء ما في A_k، فهذه الحدود يجب أن تكون دورة من الرتبة (k-1) في $A_{k-1}^{'}$؛ إذن، بدءًا بـ $h \in H_k(A / A')$، نصل إلى دورة من الرتبة (k-1) تمثل فصلًا شباهيًا في $H_{k-1}(A')$.

16.44 تمهيدية الدالة $\partial_{*k} : H_k(A/A') \to H_{k-1}(A')$ – التي عرّفناها توًّا– حسنة التعريف، وهي تشاكل من $H_k(A/A')$ إلى $H_{k-1}(A')$.

البرهان سنترك هذا البرهان للتمارين (انظر التمرين 13). ♦

لتكن i_{*k} الدالة في المثال 6.44. يمكننا الآن بناء المخطط الآتي:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{*k+1}} H_k(A') \xrightarrow{i_{*k}} H_k(A) \xrightarrow{j_{*k}} H_k(A/A')$$
$$\xrightarrow{\partial_{*k}} H_{k-1}(A') \xrightarrow{i_{*k-1}} H_{k-1}(A) \xrightarrow{j_{*k-1}} H_{k-1}(A/A') \xrightarrow{\partial_{*k-1}} \cdots \qquad (1)$$

17.44 تمهيدية تشكل الزمرة في المخطط (1) مع الدوال المعطاة سلسلة مركبة.

البرهان نحتاج فقط إلى التحقق من أنّ أيّ متتالية من دالّتين متتاليتين تعطي دائمًا 0. نترك هذا للتمارين (انظر التمرين 14). ♦

لأنَّ المخطط (1) يعطي سلسلة مركبة، فبإمكاننا (برعب!) أن نسأل عن الزمر الشباهية لهذه السلسلة المركبة، فقد كنا نهدف إلى هذا السؤال، والإجابة عنه في الحقيقة سهلة جدًّا، إذ إنّ الزمر الشباهية لهذه السلسلة المركبة كلها تساوي 0، وقد تظن أنّ مثل هذه السلسلة المركبة غير مهمّة. ولكن وعلى خلاف المتوقع، فإنّ لمثل هذه السلسلة المركبة اسم خاص.

18.44 تعريف تسمى متتالية الزمر A_k والتشاكلات ∂_k المكوّنة لسلسلة مركبة **متتالية مضبوطة** (***exact sequence***)، إذا كانت الزمر الشباهية للسلسلة المركبة كلها تساوي 0، أي إنه لكل k صورة ∂_k تساوي نواة ∂_{k-1}. ■

المتتاليات المضبوطة مهمّة جدًّا في الطبولوجيا، وسنعطي بعض الخصائص الأولية لها في التمارين.

19.44 مبرهنة تشكل الزمر والدوالّ في السلسلة المركبة في المخطط (1) متتالية مضبوطة.

البرهان سنترك هذا البرهان للتمارين. (انظر التمرين 15). ♦

20.44 تعريف المتتالية المضبوطة في المخطط (1)، هي **متتالية شباهية مضبوطة للزوج** (A, A'). ((A, A') **(exact homology sequence of the pair)**. ■

21.44 مثال لنعطي تطبيقًا للمبرهنة 9.44 في الطبولوجيا، فقد ذكرنا من غير برهان أنّ:

$H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ و $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$، ولكن $H_k(S^n) = 0$، حيث $k \neq 0, n$. وكذلك ذكرنا من غير برهان أنّ:

$H_k(S^E) = 0$، حيث $k \neq 0$؛ لأن E^n متقلصة. لنفترض صحّة النتيجة بالنسبة إلى E^n، ونستنتج منها النتيجة لـ S^n.

يمكننا أن نعُدّ S^n بوصفها مركبًا جزئيًّا من مركب المبسطات E^{n+1}، على سبيل المثال: تكافئ طبولوجيًّا المبسط من الرتبة $(n+1)$، وتكافئ S^n طبولوجيًّا حدودها، لنصنع

متتالية شباهية مضبوطة من الزوج (E^{n+1}, S^n)، لدينا:

$$\underbrace{H_{n+1}(S^n)}_{=0} \xrightarrow{i_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1}, S^n)}_{\simeq \mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_{*n+1}}$$

$$\underbrace{H_n(S^n)}_{=?} \xrightarrow{i_{*n}} \underbrace{H_n(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n}} \underbrace{H_n(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*n}} \dots \xrightarrow{j_{*k+1}}$$

$$\underbrace{H_{k+1}(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*k+1}} \underbrace{H_k(S^n)}_{=?} \xrightarrow{i_{*k}} \underbrace{H_k(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*k}} \dots \tag{2}$$

حيث $1 \le k < n$، وحقيقة أنّ E^{n+1} متقلصة تعطي $H_k(E^{n+1}) = 0$، حيث $k \ge 1$. أشرنا إلى هذا في المخطط (2). باعتبار E^{n+1} مبسطًا من الرتبة $(n+1)$ و S^n بوصفها حدودًا لها، فإننا نرى أنّ $C_k(E^{n+1}) \le C_k(S^n)$، حيث $k \le n$ ؛ ولذلك، $H_k(E^{n+1}, S^n) = 0$ ، حيث $k \le n$ ، وقد أشرنا كذلك إلى هذا في المخطط (2). تمامًا كما في المثال 12.44، يرى المرء أنّ $H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) \simeq \mathbb{Z}$، مولدة بالفصل الشباهي الذي يحوي بوصفه ممثلًا

$$P_1 P_2 \dots P_{n+2} + C_{n+1}(S^n)$$

لـ $1 \le k < n$، تخبرنا المتتالية المضبوطة في الصف الأخير في المخطط (2) أنّ $H_k(S^n) = 0$؛ لأننا نرى من

أن $H_k(E^{n+1}) = 0$

$$H_k(S^n) = (\text{نواة } i_{*h})$$

ولكن من $H_{k+1}(E^{n+1}, S^n) = 0$ ، نرى أنّ (صورة ∂_{*K+1})=0 ومن أنّ المتتالية مضبوطة – (نواة i_{*k}) = (صورة ∂_{*K+1})– نحصل على $H_k(S^n) = 0$، لكل $1 \le k < n$.

سلسلة التبريرات الآتية تؤدي إلى أنّ $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ بالرجوع إلى المخطط (2) في الأعلى.

1. لأن $H_{n+1}(E^{n+1}) = 0$ ، نحصل على (صورة j_{*n+1}) = 0.

2. إذن، ومن الضبط نحصل على (نواة ∂_{*n+1}) = (صورة j_{*n+1}) = 0، أي إنّ ∂_{*n+1} دالة تماثل.

3. لذلك، (صورة ∂_{*n+1}) $\simeq \mathbb{Z}$.

4. لأنّ $H_n(E^{n+1}) = 0$، نحصل على(نواة i_{*k}) = $H_n(S^n)$.

5. ومن أنّ المتتالية مضبوطة، (نواة i_{*n}) = (صورة∂_{*n+1}) ، وهكذا $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. إذن، نرى أنّ $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ و $H_k(S^n) = 0$ ، حيث $1 \le k < n$.

لأنَّ S^n متصلة، $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$، يمكن استنتاج هذه الحقيقة كذلك من المتتالية المضبوطة

$$\underbrace{H_1(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*1}} H_0(S^n) \xrightarrow{i_{*0}} \underbrace{H_0(E^{n+1})}_{\simeq \mathbb{Z}} \xrightarrow{j_{*0}} \underbrace{H_0(E^{n+1}, S^n)}_{=0}$$

▲

■ تمارين 44

تمارين مقترحة

1. لتكن A و B زمرتين مع الجمع، وافترض أنّ المتتالية:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$$

مضبوطة. فأثبت أنّ $A \simeq B$.

2. لتكن A، B، C زمرًا مع الجمع، وافترض أنّ المتتالية:

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$$

مضبوطة. فأثبت أنّ:

أ. j دالة غامرة من B إلى C.

ب. i تماثل من A إلى B.

جـ. C تماثل $B/i[A]$.

3. لتكن A، وB، وC، وD زمرًا، ولتكن

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} D$$

متتالية مضبوطة. فأثبت أنّ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة.

أ. i غامرة لـ B.

ب. j تربط بصورة غامرة B كلها بـ 0.

جـ. k دالة أحادية.

4. أثبت أنه إذا كان

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} F$$

متتالية مضبوطة من زمر الجمع، فإنّ العبارات الآتية متكافئة:

أ. تربط كل من h و j كل شيء بـ 0 بصورة غامرة.

ب. i تماثل من C غامرة لـ D.

جـ. g غامرة لـ B و k أحادية.

لمزيد من التمارين

5. المبرهنتان 4.44 و7.44 مرتبطتان جدًّا بالتمرين 39 في الفصل14 أظهر هذا الارتباط.

6. بحسابات مشابهة للمثالين 9.44و 14.44 في الكتاب، أوجد الزمر الشباهية النسبية $H_n(X, a)$ للطارة X والمركب الجزئي a– كما هو مبين في الشكلين 13.42 و 14.42. (لأنه بإمكاننا أن نعُدّ هذه الزمر الشباهية بوصفها زمرًا شباهية للفضاء الناتج عن X بتقليص a إلى نقطة، يتعيّن أن تكون هي الزمر الشباهية للطارة المتلاشية).

7. لمركب المبسطات X والمركبة الجزئية a في التمرين 6، كوّن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, a) ، وأثبت بحسابات مباشرة أنّ هذه المتتالية مضبوطة.

8. كرّر التمرين 6 ، حيث X قارورة كلاين في الشكل 2.43 والشكل 3.43 . (يتعيّن أن يعطي هذا الزمر الشباهية لقارورة كلاين المتلاشية).

9. لمركب المبسطات X والمركب الجزئي a في التمرين 8، كوّن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, a)، وأثبت بحسابات مباشرة أنّ هذه المتتالية مضبوطة.

10. أوجد الزمر الشباهية النسبية $H_n(X, Y)$، حيث X المنطقة الحلقية في الشكل 11.42 و Y المركب الجزئي المكوّن من دائرتي الحدود.

11. لمركب المبسطات X والمركب الجزئي Y في التمرين 10، كوّن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, Y)، وأثبت بحسابات مباشرة أنّ هذه المتتالية مضبوطة.

12. أثبت التمهيدية 14.44

13. أثبت التمهيدية 16.44

14. أثبت التمهيدية 17.44

15. أثبت المبرهنة 19.44 باستخدام الخطوات الآتية:

أ. أثبت أنّ (صورة i_{*k}) $\supseteq$ (نواة j_{*k}).

ب. أثبت أنّ (نواة j_{*k}) $\supseteq$ (صورة i_{*k}).

جـ. أثبت أنّ (صورة j_{*k}) $\supseteq$ (نواة ∂_{*k}).

د. أثبت أنّ (نواة ∂_{*k}) $\supseteq$ (صورة j_{*k}).

هـ. أثبت أنّ (صورة ∂_{*k}) $\supseteq$ (نواة i_{*k-1}).

و. أثبت أنّ (نواة i_{*k-1}) $\supseteq$ (صورة ∂_{*k}).

16. لتكن $\langle A, \partial\rangle$ و $\langle A', \partial'\rangle$ سلسلتي مركبات، ولتكن f وg مجموعتي تشاكلات $f_k : A_k \to A'_k$ و $g_k : A_k \to A'_k$ ، بحيث إنّ كلا f و g تتبدل مع ∂. **التحاول الجبري (algebraic homotopy)** بين f و g هي المجموعة D من التشاكلات $D_k : A_k \to A'_{k+1}$ بحيث إنه لكل $c \in A_k$ ، نحصل على:

$$f_k(c) - g_k(c) = \partial'_{k+1}(D_k(c)) + D_{k-1}(\partial_k(c))$$

(يمكن اختصار هذا الشرط بـ $f - g = \partial D + D\partial$). أثبت أنه إذا وجد تحاول جبري بين f و g، أي إذا كانت f و g متحاولة **(homotopic)**، فإنّ f_{*k} و g_{*k} هو التشاكل نفسه من $H_k(A)$ إلى $H_k(A')$.

الوحدة التاسعة

التحليل
Factorization

الفصل 45 حلقات تامة وحيدة التحليل. Unique Factorization Domains

الحلقة التامة $\mathbb{Z}$ هي مثالنا الأساسي لحلقة تامة، حيث يوجد فيها تحليل وحيد إلى أعداد أولية (غير مختزلة)، وكما بَيَّن لنا الفصل 23 بالنسبة إلى الحقل F، فإنّ $F[x]$ أيضًا حلقة تامة فيها تحليل وحيد. وسنقدِّم مجموعة من التعريفات؛ لأجل مناقشة أفكار مشابهة في أيّ حلقة تامة، علمًا بأنّ بعضها إعادة لتعريفات قديمة، ومن الجيد وضعها في مكان واحد للرجوع إليها.

تعريف 1.45 لتكن R حلقة إبدالية فيها عنصر محايد، وليكن $a, b \in R$، فإذا وجد $c \in R$ بحيث $b = ac$، فإنّ a **يقسم (divides)** b (أو a عامل لـ b)، ويرمز لها بالرمز $a|b$، ونقرأ $a \nmid b$ "a لا يقسم b". ■

تعريف 2.45 العنصر u في الحلقة الإبدالية R التي فيها عنصر محايد يسمّى **عنصر وحدة (unit)** في R، إذا كان u يقسم 1، أي إنه إذا كان لـ u معكوس ضربي في R، والعنصران $a, b \in R$ **متشاركان في R (associates)** إذا كان $a = bu$، حيث u عنصر وحدة في R. ■

يطلب منا التمرين 27 أن نوضّح أنَّ خاصية a و b متشاركين هي علاقة تكافؤ على R.

مثال 3.45 عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}$ هي 1 و -1 فقط؛ لذلك، الذي يشارك 26 في $\mathbb{Z}$ هما 26 و -26 فقط. ▲

تعريف 4.45 ليكن p عنصرًا غير صفري، وليس وحدة في حلقة تامة D. يقال عن p: إنه **غير مختزل (irreducible)** على D، إذا كان أيّ تحليل $p = ab$ في D يؤدي إلى أنّ a أو b عنصر وحدة. ■

لاحظ أنّ مشارك غير المختزلة p هو أيضًا غير مختزل؛ وذلك لأنه إذا كانت $p = uc$ حيث u عنصر وحدة، فإنّ أيّ تحليل لـ c هو تحليل لـ p.

نبذة تاريخية

ظهر السؤال عن التحليل الوحيد في حلقة تامة غير الأعداد الصحيحة بدايةً للعلن في بحث منشور، وكانت له علاقة بمحاولة جبرائيل لامي (Gabriel-Lame 1795–1870) في إثبات مبرهنة فيرما الأخيرة، وهي تخمين أنّ $x^n + y^n = z^n$ ليس لها حلول صحيحة غير صفرية لـ $n > 2$، وليس من الصعب أن نبيّن أنّ هذا التخمين صحيح، إذا أمكن إثباتها للأعداد الأولية الفردية p كلها، وقد أعلن لامي في اللقاء الذي عقد في أكاديمية باريس في واحد مارس عام 1847م، أنه أثبت المبرهنة، وقدّم إثباتًا مختصرًا، فقد كانت فكرته أولًا: أن نحلل $x^p + y^p$ في الأعداد المركبة كالآتي:

$$x^p + y^p =$$

$$(x + y)(x + \alpha y)(x + \alpha^2 y) \cdots (x + \alpha^{p-1} y)$$

حيث α الجذر البدائي من الرتبة p للواحد، ثمّ حاول بعدها أن يبيّن أنه إذا كانت العوامل في التعبير أولية نسبيًا، وإذا كان $x^p + y^p = z^p$، فإنّ كلًّا من هذه العوامل p يجب أن تكون من قوى p، بعدها استطاع أن يوضّح أنّ معادلة فيرما هذه ستكون صحيحة للثلاثي x'، y'، z'، حيث كل عدد أقل من العدد المقابل له في الثلاثي الأصلي، وهذا سيقود إلى متتالية متناقصة لا نهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة، واستحالة هذا يثبت المبرهنة.

أنهى لامي إعلانه، ومع ذلك، قدّم جوزيف ليوفيل (Joseph Liouville 1809-1882) شكوكًا مهمّة على خُلاصة الإثبات، مشيرًا إلى استنتاج أنّ كلًّا من العوامل الأولية النسبية هي من قوى p؛ لأن حاصل ضربها من قوى p اعتمدت على النتيجة أنّ إيّ عدد صحيح يمكن تحليله بصورة وحيدة إلى حاصل ضرب أعداد أولية. أصبح واضحًا لا محالة أنّ "الأعداد الصحيحة" من النوع $x+\alpha^k y$ لها خاصية هذا التحليل الوحيد، وعلى الرغم من أنّ لامي حاول أن يتجاوز اعتراضات ليوفيل، فقد تمّت تسوية الموضوع في 24 مايو، عندما أظهر ليوفيل رسالة من إيرنست كمر (Ernst Kummer) يشير إلى أنه قد أثبت بالفعل عام 1844م، أنَّ التحليل الوحيد فشل في الحلقة التامة $\mathbb{Z}[\alpha]$، حيث α هي الجذر الثالث والعشرون للواحد.

لم تثبت مبرهنة فيرما حتى عام 1994م، وباستخدام تقنيات الهندسة الجبرية، وهي غير معروفة عند لامي وكمر، في أواخر الخمسينيات لاحظ يوتاكا تانياما (Taniyama Yutaha)– وجوروشيمورا (Goro shimura) علاقة قوية بين حقلين في الرياضيات يبدوان مختلفين، المنحنيات الناقصية والأشكال المقي اسية.

بعد سنوات من الوفاة المأساوية لتانياما عن عمر 31 عامًا، أوضح شيمورا هذه الفكرة، وكوّن ما أصبح يعرف الآن بمخمنة تانياما– شيمورا. عام 1984، أكد جرهارد فري (Gerhard Fery)، وعام 1986م أثبت كن ريبت (Ken Ribet) أنّ تخمين تانياما– شيمورا سيؤدي إلى صحّة مبرهنة فيرما الأخيرة.

أخيرًا، أعطى أندرو وايلز (Andrew Wiles) من جامعة برينستون، وبعد عمل مضنٍ على هذه المعضلة استمر سبع سنوات، سلسلة محاضرات في جامعة كامبريدج في حزيران 1993م، التي أعلن من خلالها إثبات كفاية تخمين تانياما– شيمورا لإثبات مبرهنة فيرما الأخيرة، ولسوء الطالع اكتشف سريعًا فجوة في الإثبات، ورجع وايلز إلى العمل، واستغرق منه العمل أكثر من عام، ولكنه تمكن أخيرًا من ملء الفجوة، وذلك بمساعدة طالبه ريتشارد تايلور (Taylor Richard)، وقد نُشرت النتيجة في (Annals of Mathematics) في مايو عام 1995م، فحُلّت المعضلة التي عمرها 350 عامًا.

5.45 تعريف نقول: إن الحلقة التامة D **حلقة تامة وحيدة التحليل (Unique factorization domain)** (باختصار UFD) إذا تحققت الشروط الآتية:

1. كل عنصر في D ليس 0 ، وليس عنصر وحدة يمكن تحليله إلى حاصل ضرب عدد منتهٍ من غير المختزلات.

2. إذا كان $p_1 \ \dots \ p_r$ و $q_1 \ \dots \ q_s$ هما تحليلان للعنصر نفسه في D إلى غير مختزلات، فإنّ $r = s$ و يمكن إعادة ترقيمها، بحيث p_i و q_i متشاركان. ■

6.45 مثال توضّح المبرهنة 20.23 بالنسبة إلى الحقل F، أنّ $F[x]$ هو UFD، ونعلم كذلك أنّ $\mathbb{Z}$ هو UFD، وقد استخدمنا هذه الحقيقة مرارًا على الرغم من أننا لم نثبتها قطّ، على سبيل المثال: في $\mathbb{Z}$ عندنا:

$$24 = (2)(2)(3)(2) = (-2)(-3)(2)(2).$$

هنا 2 و 2– متشاركان وكذلك 3 و 3–؛ لذلك، باستثناء الترتيب والمشاركات، العوامل غير المختزلة في كلا التحليلين لـ 24 متشابهة. ▲

تذكر أنّ المثالي الرئيس $\langle a \rangle$ في D يحوي مضاعفات العنصر a.

بعد تعريف إضافي واحد فقط يمكننا وصف ما نتمنى أن نصل إليه في هذا الفصل.

7.45 تعريف الحلقة التامة D هي **حلقة المثاليات الرئيسة التامة** (**Principal ideal domain**) (باختصار PID)، إذا كانت كل مثالية في D مثالية رئيسة. ■

نعلم أنّ $\mathbb{Z}$ هو PID ؛ لأن كل مثالية على صورة $n\mathbb{Z}$، مولَّدة بالعدد الصحيح n، وتوضّح المبرهنة 24.27 أنَّه إذا كان F حقلًا، فإنّ $F[x]$ هو PID.

هدفنا في هذا الفصل أن نثبت مبرهنتين مهمّتين إلى حدّ بعيد:

1. كل PID يكون UFD. (المبرهنة 17.45).

2. إذا كانت D هي UFD، فإنّ $D[x]$ هي UFD (المبرهنة 29.45).

توضِّح حقيقة أنّ $F[x]$ تكون UFD حيث F حقل (باستخدام المبرهنة 20.23)، كلتا المبرهنتين؛ لأنه باستخدام المبرهنة 24.27، $F[x]$ PID كذلك لأنه لا يوجد في F عنصر غير صفري ليس عنصر وحدة، حيث إنّ F تحقق شروط UFD؛ لذلك، ستقدم المبرهنة 29.45 إثباتًا آخر على أنَّ $F[x]$ UFD عدا حقيقة أننا سنستخدم المبرهنة 20.23 في إثبات المبرهنة 29.45. في الفصل المقبل سندرس خصائص صنف خاص ومحدد من UFD، الحلقات التامة الإقليدية. لنواصل إثبات المبرهنتين.

كل PID يكون UFD

الخطوات التي قادتنا إلى المبرهنة 20.23 وإثباتها تحدد طريق إثباتنا للمبرهنة 17.45، حيث إنّ معظم هذه المادة سيكون مكررًا، وقد تعاملنا بصورة محدودة ومنفصلة مع الحالة الخاصة $F[x]$ في المبرهنة 20.23؛ لأنها سهلة، وكانت الحالة الوحيدة التي نحتاج إليها في مبرهنة الحقول بوجه عام.

لإثبات أنّ الحلقة التامة D هي UFD، من الضروري أن نبيّن أنّ كلا الشرطين 1 و 2 لتعريف UFD متحققان، وبالنسبة إلى حالتنا الخاصة $F[x]$ في المبرهنة 20.23، كان الشرط الأول سهلًا، ونتج عن المفهوم القائل: إنه في تحليل كثيرة حدود من الرتبة >0 إلى حاصل ضرب كثيرتي حدود غير ثابتتين، بحيث إنّ رتبة كل عامل أقل من رتبة كثيرة الحدود الأصلية، وبذلك لا يمكننا أن نستمر في التحليل بصورة غير محددة من غير الاصطدام بعوامل وحدة، أي كثيرات حدود من الرتبة 0، أمّا بالنسبة إلى الحالة العامة لـ PID، فمن الصعب أن نبيِّن ذلك.

ونعود الآن إلى هذه المسألة، سنحتاج زيادة على ذلك إلى مفهوم من مبرهنة المجموعات.

8.45 تعريف إذا كانت $\{A_i \mid i \in I\}$ مجموعة من المجموعات، فإنّ **الاتحاد** $\bigcup_{i\in I} A_i$ **للمجموعات** A_i (***union of the sets***) هو مجموعة كل x، بحيث $x \in A_i$ على الأقل لـ $i \in I$ واحدة. ■

9.45 تمهيدية لتكن R حلقة إبدالية، ولتكن $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ سلسلة تصاعدية من المثاليات N_i في R، فإنّ $N = \bigcup_i N_i$ مثالية في R.

البرهان ليكن $a, b \in N$، فتوجد مثاليتان N_i و N_j في السلسلة، بحيث $a \in N_i$ و $b \in N_j$، والآن إما $N_i \subseteq N_j$ أو $N_j \subseteq N_i$؛ لنفترض أنّ $N_i \subseteq N_j$؛ لذلك، كلا a و b في N_j، وهذا يؤدي إلى أنَّ $a \pm b$ و ab في N_j؛ إذن، $a \pm b$ و ab في N، وبأخذ $a = 0$، نرى أنَّ $b \in N$ تؤدي إلى أن $-b \in N$ و $0 \in N$؛ لأن $0 \in N_i$، وبذلك N حلقة جزئية من D، ولـ $a \in N$ و $d \in D$، يجب علينا أن نأخذ $a \in N_i$ لبعض N_i؛ ولأن N_i مثالية، $da = ad$ في N_i؛ لذلك، $da \in \bigcup_i N_i$ أي إنّ $da \in N$؛ إذن، N مثالية. ◆

10.45 تمهيدية (**شرط السلسلة التصاعدية لـ PID**) (**Ascending chain condition for a PID**): لتكن D PID، فإذا كانت $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ سلسلة تصاعدية من المثاليات N_i، فيوجد عدد صحيح موجب r، بحيث $N_r = N_s$ لكل $s \geq r$، وهذا يكافئ أنّ كل سلسلة تصاعدية فعليًّا من المثاليات (الاحتواءات كلها فعلية) في PID، تكون ذات طول منتهٍ، ونعبِّر عن ذلك بقولنا: **شرط السلسلة التصاعدية** (**ascending chain condition (ACC)**) تتحقق للمثاليات في PID.

البرهان عن طريق التمهيدية 9.45، نعلم أنّ $N = \bigcup_i N_i$ مثالية في D. الآن بوصفها مثالية في D التي هي PID، $N = \langle c \rangle$، حيث $c \in D$؛ ولأن $N = \bigcup_i N_i$، فيجب أن يكون عندنا $c \in N_r$، حيث $r \in \mathbb{Z}^+$. لـ $s \geq r$، عندنا

$$\langle c \rangle \subseteq N_r \subseteq N_s \subseteq N = \langle c \rangle$$

لذلك، $N_r = N_s$ لكل $s \geq r$. ◆

العبارة المتكافئة مع ACC مباشرَة.

سيكون من المفيد فيما تبقى أن نتذكر أنه للعنصرين a و b في الحلقة التامة D،

$\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$، إذا وفقط إذا كان b ويقسم a،

و$\langle a \rangle = \langle b \rangle$، إذا وفقط إذا كان a و b متشاركين.

بالنسبة إلى الخاصية الأولى، لاحظ أنّ $\langle b\rangle \subseteq \langle a\rangle$، إذا وفقط إذا كان $a \in \langle b\rangle$، وهو صحيح إذا وفقط إذا كان $a = bd$ ، حيث $d \in D$، أي إنّ b يقسم a، وباستخدام الخاصية الأولى هذه، نرى أنّ $\langle a\rangle = \langle b\rangle$، إذا وفقط إذا كان $a = bc$ و $b = ad$ ، حيث $c, d \in D$، لكنّ $a = adc$ وبالحذف، نجد أنّ $1=dc$ ؛ إذن، c وd عناصر وحدة؛ ولذلك a و b متشاركان.

يمكننا الآن أن نثبت الشرط 1 من تعريف UFD لحلقة تامة PID.

11.45 مبرهنة لتكن D PID، فكل عنصر ليس 0 وليس عنصر وحدة، هو حاصل ضرب غير مختزلات.

البرهان لتكن $a \in D$، حيث a ليس 0 وليس عنصر وحدة، سنبيِّن أولًا أنَّ a لها على الأقل عامل غير مختزل واحد، إذا كان a غير مختزل، انتهينا، أمّا إذا كان a مختزلًا، فإنّ $a = a_1\ b_1$، حيث a_1 وb_1 ليسا عنصري وحدة، الآن:

$$\langle a\rangle \subset \langle a_1\rangle$$

بالنسبة إلى $a \subseteq \langle a_1\rangle$ جاءت من $a = a_1b_1$، إذا كان $\langle a\rangle = \langle a_1\rangle$، فإنّ a و a_1 سيكونان متشاركين، و b_1 سيكون عنصر وحدة، وهذا يناقض الفرض، وبالاستمرار في هذا الإجراء، مبتدئين مع a_1، نصل إلى السلسلة التصاعدية فعليًّا من المثاليات:

$$\langle a\rangle \subset \langle a_1\rangle \subset \langle a_2\rangle \subset \ldots$$

باستخدام ACC في التمهيدية 10.45، تتوقف هذه السلسلة عند $\langle a_r\rangle$، و a_r يجب عندها أن تكون غير مختزلة؛ إذن، لـ a عامل غير مختزل a_r. ◆

باستخدام ما أثبتناه، لأيّ عنصر a ليس 0 وليس عنصر وحدة في D، تكون إما a غير مختزل أو $a = p_1c_1$ ، حيث p_1 غير مختزلة وc_1 ليس عنصر وحدة.

باستخدام مفهوم مشابه لما استخدمناه توًّا، في الحالة الأخيرة نستنتج أنَّ $\langle a\rangle \subset \langle c_1\rangle$، فإذا كانت c_1 مختزلة، فإن $c_1 = p_2\ c_2$، حيث p_2 غير مختزلة و c_2 ليس عنصر وحدة.

بالاستمرار، نحصل على السلسلة المتصاعدة فعليًّا من المثالثات

$$\langle a\rangle \subset \langle c_1\rangle \subset \langle c_2\rangle \subset \cdots$$

هذه السلسلة يجب أن تتوقف، باستخدام ACC في التمهيدية 10.45 عند $c_r = q_r$ ، أي إنها غير مختزلة؛ إذن، $a = p_1\ p_2 \cdot\cdot\cdot p_r q_r$.

هذا يكمل بحثنا عن الشرط الأول لتعريف UFD. لنعد إلى الشرط الثاني، إجراءاتنا هنا موازية لتلك التي قادتنا إلى المبرهنة 20.23، والنتائج التي سنحصل عليها على طول الطريق ممتعة بذاتها.

12.45 تمهيدية (**تعميم للمبرهنة 25.27**) يكون المثالي $\langle p\rangle$ في PID أعظميًّا، إذا وفقط إذا كان p غير مختزل.

البرهان ليكن $\langle p\rangle$ مثاليًّا أعظميًّا في D، PID، وافترض أنّ $p = ab$ في D ، إذن $\langle p\rangle \subseteq \langle a\rangle$، وإذا كان $\langle a\rangle = \langle p\rangle$، فإنّ a وp متشاركان؛ لذلك، يجب أن يكون b عنصر وحدة، وإذا كان $\langle a\rangle \neq \langle p\rangle$، فيجب أن يكون $\langle a\rangle = \langle 1\rangle = \langle D\rangle$؛ لأن $\langle p\rangle$ أعظمي، لكن a و1 عندها متشاركان؛ إذن، a عنصر وحدة؛ ولذلك، إذا كان $p = ab$، فإما a أو b عنصر وحدة؛ ولذلك،

p غير مختزل في D. في المقابل، افترض أنّ p غير مختزل في D، فإذا كان $\langle p\rangle\subseteq\langle a\rangle$، فيجب أن يكون عندنا $p = ab$، الآن، إذا كان a عنصر وحدة، فإنّ $\mathrm{D} = \langle 1\rangle = \langle a\rangle$، أمّا إذا لم يكن a عنصر وحدة، فيجب أن يكون b عنصر وحدة؛ لذلك، يوجد $u \in D$، بحيث $bu = 1$، وعندها $pu = abu = a$، وبهذا $\langle a\rangle \subseteq \langle p\rangle$ أي $\langle a\rangle=\langle p\rangle$؛ إذن، $\langle p\rangle\subseteq\langle a\rangle$ يؤدي إلى أنّ $\mathrm{D}=\langle a\rangle$ أو $\langle a\rangle=\langle p\rangle$ و $\langle p\rangle \neq \mathrm{D}$ وإلّا سيكون p عنصر وحدة؛ إذن، $\langle p\rangle$ مثالي أعظمي. ◆

13.45 تمهيدية (تعميم للمبرهنة 27.27) في PID، إذا كان p غير مختزل، ويقسم ab، فإمّا $p|a$ أو $p|b$.

البرهان لتكن D PID ، وافترض أنه لغير المختزل، p في D عندنا $p|ab$.

إذن، $(ab) \in \langle p\rangle$؛ ولأن كل مثالي أعظمي في D هو مثالي أولي بحسب النتيجة 16.27، فإنّ $(ab) \in \langle p\rangle$ يؤدي إلى أنّه إما $a \in \langle p\rangle$ أو $b \in \langle p\rangle$، وهذا يعطينا إما $p|a$ أو $p|b$. ◆

14.45 نتيجة إذا كان p غير مختزل في PID ، و p يقسم حاصل الضرب $a_1a_2 \ldots a_n$ حيث $a_i \in D$ ، فإنّ $p|a_i$ لـ i واحدة على الأقل.

البرهان برهان هذه النتيجة مباشرة من التمهيدية 13.45 إذا استخدمنا الاستقراء الرياضي. ◆

15.45 تعريف ليكن العنصر p ليس صفريًّا، وليس عنصر وحدة في الحلقة التامة D، فيكون p **أوّليًّا (prime)**، إذا كان لكل $a, b \in D$، $p|ab$ يؤدي إلى أن $p|a$ أو $p|b$. ■

وجّهت التمهيدية 13.45 انتباهنا إلى خاصية تعريف الأوّليّ، وسنسألك في التمرينين 25 و 26 أن تبيِّن أنَّ الأولي في الحلقة التامة هو غير مختزل دائمًا، وأنَّ غير المختزل في UFD هو أوّلي أيضًا ؛ لذلك، المفهومان الأوّلي وغير المختزل متطابقان في UFD، وسيظهر مثال 16.45 حلقة تامة تحوى بعض غير المختزلات التي تكون غير أوّلية؛ لذلك، المفهومان لا يتطابقان في كل حلقة تامة.

16.45 مثال ليكن F حقلًا، ولتكن D الحلقة التامة الجزئية $F[x^3, xy, y^3]$ من $F[x, y]$، فإنّ x^3, xy و y^3 غير مختزلة في D، لكن

$$(x^3)\,(y^3) = (xy)\,(xy)\,(xy).$$

لأن xy يقسم x^3y^3 لكن لا يقسم x^3 أو y^3، فنرى أنَّ xy ليس أوّليًّا.

إجراءات مشابهة توضح أنَّ x^3 و y^3 غير أوّليين. ▲

خاصية تعريف الأوّلي هي بالضبط ما نحتاج إليه لبناء وحدانية التحليل، الشرط الثاني في تعريف UFD. نكمل الآن إثبات المبرهنة 17.45 بتوضيح وحدانية التحليل في PID.

17.45 مبرهنة (**تعميم للمبرهنة 20.23**) كل PID تكون UFD.

البرهان تُبيِّن المبرهنة 11.45 أنه إذا كان D PID، فإنّ كل $a \in D$ ليس 0 ولا عنصر وحدة له تحليل

$$a = p_1 p_2 \dots p_r$$

إلى غير مختزلات، بقي علينا أن نوضّح الوحدانية. ليكن:

$$a = q_1 q_2 \dots q_s$$

تحليل آخر إلى غير مختزلات، حيث ينتج عندنا أنّ $p_1|(q_1 q_2 \dots q_s)$، الذي يؤدي إلى أنّ $p_1|q_j$ لأحد الـ j كما في النتيجة 14.45، وبتغيير ترتيب q_j إذا كان ضروريًّا، فنستطيع أن نفترض أنّ $j = 1$؛ إذن، $p_1 | q_1$، وبهذا، فإنَّ $q_1 = p_1 u_1$؛ ولأن p_1 غير مختزلة u_1 عنصر وحدة؛ إذن، p_1 و q_1 متشاركان، وهذا يُنتج :

$$p_1 p_2 \dots p_r = p_1 u_1 q_2 \dots q_s.$$

لذلك، وباستخدام قانون الحذف في D، نحصل على:

$$p_2 \dots p_r = u_1 q_2 \dots q_s.$$

بالاستمرار في هذا العمل، مبتدئين بـ p_2 وهكذا، نحصل أخيرًا على:

$$.1 = u_1 u_2 \dots u_r q_{r+1} \dots q_s .$$

ولأنّ q_j غير مختزلة، فيجب أن يكون عندنا $r = s$. ◆

سيبيِّن لنا المثال 31.45 في نهاية هذا الفصل، أنَّ عكس المبرهنة 17.45 خطأ، أي إنّ الـ UFD ليس بالضرورة PID.

تبدأ كثير من كتب الجبر بإثبات النتيجة الآتية للمبرهنة 17.45، وقد افترضنا أنك على علم بهذه النتيجة، واستخدمناها بحرية في عملنا الآخر.

18.45 نتيجة: (**المبرهنة الأساسية في الحساب**) الحلقة التامة $\mathbb{Z}$ هي UFD.

البرهان رأينا أنّ المثاليات في $\mathbb{Z}$ كلها على الصورة $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ لـ $n \in \mathbb{Z}$؛ لذلك، $\mathbb{Z}$ هي PID والمبرهنة 17.45 تنطبق. ◆

من الجدير بالملاحظة في إثبات أنّ $\mathbb{Z}$ هي PID، فإننا نعود فعليًّا إلى النتيجة 7.6، فقد أثبتنا المبرهنة 6.6 باستخدام خوارزمية القسمة على $\mathbb{Z}$، تمامًا كما أثبتنا في المبرهنة 24.27، أنَّ $F[x]$ هي PID باستخدام خوارزمية القسمة على $F[x]$ وسنختبر في الفصل 46 هذين الأمرين المتوازيين بصورة أكثر قربًا.

إذا كانت D UFD، فإنّ $D[x]$ UFD

نبدأ بإثبات المبرهنة 29.45، ثاني أكبر نتيجة في هذا الفصل، حيث إنّ فكرة هذا المفهوم هي كالآتي:

لتكن D UFD، فيمكننا تكوين حقل خارج القسمة F لـ D، إنّ $F[x]$ UFD بحسب المبرهنة 20.23، وسنبيِّن أنه يمكننا استعادة تحليل $f(x) \in D[x]$ من تحليلها في $F[x]$ وسيكون من الضروري مقارنة غير المختزلات في $F[x]$ بتلك التي في $D[x]$. هذه المقارنة، التي نفضلها لأنها عملية أكثر من بعض المقارنات الحديثة الفعّالة، وهي تنسب لجاوس بصورة أساسية.

19.45 تعريف لتكن D UFD، ولتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ عناصر غير صفرية في D، فالعنصر d في D هو **قاسم مشترك أكبر (greatest common divisor)** (باختصار ق م أ) لكل a_i ، إذا كان $d|a_i$ لـ $i=1, \ldots, n$، وأيّ $d' \in D$ يقسم كل a_i يقسم d أيضًا. ■

سمينا d في التعريف ق م أ بدلاً من ألـ ق م أ؛ لأن ق م أ معرفة فقط نسبةً إلى عناصر الوحدة. افترض أنّ d و d' هما ق م أ لـ a_i ، حيث $i = 1, \ldots, n$، فإنّ $d'|d$ و $d|d'$ من التعريف؛ لذلك، $d = q' d'$ و $d' = qd$ لبعض $q, q' \in D$؛ إذن، $1d = q'qd$، ونرى بالحذف في D، أنَّ $q'q=1$ ؛ لذلك، q و q' بالفعل عناصر وحدة. توضّح التقنية في المثال المقبل وجود ق م أ في UFD.

20.45 مثال لنحسب ق م أ لـ 420، -168 و 252 في ألـ $\mathbb{Z}$ UFD. بالتحليل نحصل على $420=2^2.3.5.7$، $-168=2^3.(-3).7$ و $252=2^2.3^2.7$. نختار أحد هذه الأرقام، وليكن 420، أكبر قوَّة لكل معامل غير مختزل (بالنسبة إلى المشاركة) الذي يقسم الأعداد كلها 420، -168، و252 في حالتنا هذه، حيث نأخذ حاصل ضرب هذه القوى الأكبر لغير المختزلات بوصفه ق م أ، ولمثالنا هذا، هذه القوى للعوامل غير المختزلة لـ 420 هي 2^2، 3^1، 5^0 و 7^1 ، نأخذ ق م أ $d = 4.3.1.7 = 84$، ألـ ق م أ الآخر لهذه الأعداد في $\mathbb{Z}$ هو -84؛ لأن 1، -1 هي فقط عناصر الوحدة. ▲

يعتمد تنفيذ التقنية في المثال 20.45 على قدراتنا على تحليل أيّ عنصر في UFD إلى حاصل ضرب غير المختزلات، وقد يكون هذا عملًا مضنيًا حتى في $\mathbb{Z}$.

سيوضح الفصل 46 تقنية الخوارزمية الإقليدية، التي ستسمح لنا بإيجاد ألـ ق م أ من غير التحليل في ألـ UFD، التي تحوي $\mathbb{Z}$ و $F[x]$ للحقل F.

21.45 تعريف لتكن D UFD، تسمى كثيرة الحدود غير الصفرية

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

في $D[x]$ **بدائية (primitive)**، إذا كان ألـ 1 هو ق م أ لـ a_i لـ $i = 0, 1, \ldots, n$. ■

22.45 مثال في $\mathbb{Z}[x]$، $4x^2 + 3x + 2$ بدائية، بينما $4x^2 + 6x + 2$ ليست بدائية؛ لأن 2 وهو ليس عنصر وحدة، هو القاسم المشترك لـ 4، و6 و2. ▲

لاحظ أنّ كل كثيرة حدود غير ثابتة وغير مختزلة في $D[x]$ يجب أن تكون كثيرة حدود بدائية.

23.45 تمهيدية إذا كانت D UFD، فلكل غير ثابت $f(x) \in D[x]$ عندنا $f(x) = (c)\, g(x)$ ، حيث $c \in D$، $g(x) \in D[x]$ و $g(x)$ بدائي، والعنصر c وحيد ما عدا الضرب بعنصر وحدة في D وهو **محتوى (content)** لـ $f(x)$. أيضًا $g(x)$ وحيد ما عدا الضرب بعنصر وحدة في D.

البرهان لتكن $f(x) \in D[x]$ معطاة حيث $f(x)$ كثيرة حدود غير ثابتة معاملاتها $a_0, a_1, \ldots, a_n$، ولتكن c ق م أ لـ a_i لـ $i = 0, 1, \ldots, n$ ، فلكل i، يكون $a_i = cq_i$ ، حيث $q_i \in D$، وباستخدام قانون التوزيع، نحصل على $f(x) = (c)g(x)$ ، حيث لا يوجد غير مختزل في D يقسم المعاملات كلها $q_0, q_1, \ldots, q_n$ لـ $g(x)$؛ إذن، $g(x)$ بدائية.

بالنسبة إلى الوحدانية، إذا كان أيضًا $f(x) = (d)h(x)$، حيث $h(x) \in D[x]$، $d \in D$، و $h(x)$ بدائية، فإن كل معامل غير مختزل لـ c يجب أن يقسم d وبالعكس، وبوضع $(c)g(x) = (d)h(x)$ وحذف المعاملات غير المختزلة لـ c في d، نصل إلى $(u)g(x) = (v)h(x)$، حيث $u \in D$ عنصر وحدة؛ لكن عندها يجب أن يكون v عنصر وحدة D، وإلا فسنكون قادرين على حذف معامل غير مختزل لـ v في u؛ إذن، v, u كلاهما عنصرا وحدة؛ لذلك، c وحيدة ما عدا الضرب بعنصر وحدة، ومن $f(x) = (c)g(x)$ ، نرى أنَّ كثيرة الحدود البدائية $g(x)$ وحيدة ما عدا الضرب بعنصر وحدة. ◆

24.45 مثال في $\mathbb{Z}[x]$،

$$4x^2 + 6x - 8 = (2)(2x^2 + 3x - 4)$$

حيث $2x^2 + 3x - 4$ بدائية. ▲

25.45 تمهيدية (**تمهيدية جاوس**): إذا كانت D UFD، فإنّ حاصل ضرب كثيرتي حدود بدائيتين في $D[x]$ تكون أيضًا بدائية.

البرهان لتكن

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

و

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

بدائيتين في $D[x]$ ، ولتكن $h(x) = f(x)g(x)$، ليكن p غير مختزل في D، فإنّ p لا يقسم كل a_i، و p لا يقسم كل b_j؛ لأن $g(x)$ و $f(x)$ بدائيتان، ليكن a_r أول معامل لـ $f(x)$ غير قابل للقسمة على p؛ أي إنّ $p|a_i$ لـ $i < r$ ، لكنّ $p \nmid a_r$ (أي إنّ p لا يقسم a_r)، وبالمثل، ليكن $p|b_j$ لكل $j < s$ ، لكن $p \nmid b_s$
معامل x^{r+s} في $h(x) = f(x)g(x)$ هو:

$$c_{r+s} = (a_0b_{r+s} + \cdots + a_{r-1}b_{s+1}) + a_rb_s + (a_{r+1}b_{s-1} + \cdots + a_{r+s}b_0).$$

الآن $p|a_i$ لـ $i < r$ يؤدي إلى:

$$p \mid (a_0b_{r+s} + \cdots + a_{r-1}b_{s+1})$$

وأيضًا $p|b_j$ لـ $j < s$ يؤدي إلى:

$$p \mid (a_{r+1}b_{s-1} + \cdots + a_{r+s}b_0)$$

لكن p لا يقسم a_r أو b_s؛ لذلك، p لا يقسم $a_r\, b_s$، وعليه، p لا يقسم c_{r+s}، وهذا يوضح أنه إذا أعطينا غير مختزل $p \in D$، فيوجد معامل لـ $f(x)g(x)$ غير قابل للقسمة على p إذن، $f(x)g(x)$ بدائي. ◆

26.45 نتيجة إذا كانت D UFD، فإنّ حاصل ضرب عدد منتهٍ من كثيرات الحدود البدائية في $D[x]$، يكون أيضًا بدائيًّا.

البرهان نحصل على النتيجة من التمهيدية 25.45 بالاستقراء الرياضي. ◆

الآن، لتكن D UFD، وليكن F حقل خوارج القسمة على D، فبحسب المبرهنة 20.23 يكون $F[x]$ UFD، وكما قلنا سابقًا، سنبين أنّ $D[x]$ هو UFD عن طريق نقل التحليل في $F[x]$ لـ $f(x) \in D[x]$ إلى تحليل في $D[x]$، التمهيدية المقبلة تربط غير المختزلات غير الثابتة في $D[x]$ بمثيلاتها في $F[x]$، وهذه آخر خطوة مهمّة.

27.45 تمهيدية لتكن D UFD ، وليكن F حقل خوارج القسمة على D، لتكن $f(x) \in D[x]$، حيث (درجة $f(x)$) > 0، فإذا كان $f(x)$ غير مختزل في $D[x]$، فإنّ $f(x)$ غير مختزل في $F[x]$ أيضًا، وكذلك، إذا كان $f(x)$ بدائيًا في $D[x]$ وغير مختزل في $F[x]$ ، فإنّ $f(x)$ غير مختزل في $D[x]$.

البرهان افترض أنّ غير الثابتة $f(x) \in D[x]$ تتحلل إلى كثيرات حدود ذات درجات أقلّ في $F[x]$ أي إنّ

$$f(x) = r(x)s(x)$$

حيث $r(x), s(x) \in F[x]$؛ ولأنّ F حقل خوارج القسمة على D، فإنّ كل معامل في $s(x)$ و $r(x)$ على صورة $a|b$ حيث $a, b \in D$، ويمكننا بإلغاء المقامات أن نحصل على:

$$(d)\ f(x) = r_1(x)s_1(x)$$

حيث $d \in D$ و $r_1(x), s_1(x) \in D[x]$، و رتب $s_1(x)$ و $r_1(x)$ هي رتب $s(x)$ و $r(x)$ نفسها على الترتيب، عن طريق التمهيدية 23.45، $f(x) = (c)g(x)$, $r_1(x) = (c_1)r_2(x)$، و $s_1(x) = (c_2)s_2(x)$ لكثيرات الحدود البدائية $s_2(x)$ و $g(x), r_2(x)$ و $c, c_1, c_2 \in D$.

وهكذا، فإنّ

$$(dc)g(x) = (c_1c_2)r_2(x)s_2(x).$$

وبحسب التمهيدية 25.45، تكون $r_2(x)s_2(x)$ بدائية، باستخدام جزء الوحدانية للتمهيدية 23.45، $c_1c_2 = dcu$ ، حيث u عنصر وحدة في D؛ إذن:

$$(dc)g(x) = (dcu)r_2(x)s_2(x),$$

وهكذا

$$f(x) = (c)g(x) = (cu)r_2(x)s_2(x).$$

أوضحنا أنه إذا كانت $f(x)$ تتحلل بصورة غير تافهة في $F[x]$، فإنّ $f(x)$ تتحلل بصورة غير تافهة إلى كثيرات حدود من الرتب نفسها في $D[x]$؛ لذلك، إذا كانت $f(x) \in D[x]$ غير مختزلة في $D[x]$، فيجب أن تكون غير مختزلة في $F[x]$.

غير الثابتة $f(x) \in D[x]$ البدائية في $D[x]$ وغير مختزلة في $F[x]$ هي أيضًا غير مختزلة في $D[x]$؛ لأن $D[x] \subseteq F[x]$. ◆

توضح التمهيدية 27.45 أنه إذا كانت D UFD، فإنّ غير المختزلات في $D[x]$ هي نفسها غير المختزلات في D، وكثيرات الحدود البدائية غير الثابتة وغير المختزلة في $F[x]$، حيث F حقل خوارج القسمة لـ D.

التمهيدية السابقة مهمة في ذاتها، ويظهر هذا في النتيجة القادمة، وهي حالة خاصة من مبرهنتنا 11.23. (نعترف بأنه ليس من اللائق أن نطلق على حالة خاصة لنتيجة تمهيدية مبرهنة، حيث يعتمد الرقم الذي يشير إلى النتيجة بطريقة أو بأخرى على المحتوى حيثما ظهر).

28.45 نتيجة إذا كانت D UFD و F حقل خوارج القسمة على D، فإنّ غير الثابتة $f(x) \in D[x]$ تتحلل الى حاصل ضرب كثيرتي حدود ذات درجة أقل r و s في $F[x]$ إذا وفقط إذا كان لها التحليل إلى كثيرات حدود من الدرجة نفسها r و s في $D[x]$.

البرهان لقد أُثبت في برهان التمهيدية 27.45 أنه إذا كانت $f(x)$ تتحلل إلى حاصل ضرب كثيرتي حدود ذات درجة أقل في $F[x]$، فإنّ لها تحليلا إلى كثيرتي حدود من الدرجة نفسها في $D[x]$ (انظر الآتي لآخر جملة من الفقرة الأولى للبرهان)، ويتحقق العكس؛ لأن $D[x] \subseteq F[x]$. ◆

صرنا الآن جاهزين لإثبات مبرهنتنا الرئيسة:

29.45 مبرهنة إذا كانت D UFD، فإنّ $D[x]$ UFD.

البرهان لتكن $f(x) \in D[x]$، حيث $f(x)$ ليست 0 ولا عنصر وحدة، فإذا كانت $f(x)$ من الدرجة 0، فنكون قد انتهينا؛ لأن D UFD. افترض أنّ درجة $(f(x)) > 0$ وليكن

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots g_r(x)$$

تحليل لـ $f(x)$ في $D[x]$ له أكبر عدد r من العوامل ذات الدرجات الموجبة. (يوجد مثل هذا العدد الأكبر من العوامل؛ لأن r لا يستطيع أن يزيد على درجة $f(x)$. الآن حلل $g_i(x)$ كلها إلى الصيغة $g_i(x)= c_ih_i(x)$ ، حيث c_i محتوى $h_i(x)$ و $g_i(x)$، و $h_i(x)$ كثيرة حدود بدائية، $h_i(x)$ كلها غير مختزلة؛ لأنه إن أمكن تحليلها، فإنّ أيًّا من عواملها يمكن أن يقع في D؛ لذلك، سيكون لها كلها درجات موجبة، ما يؤدي إلى تحليل مماثل لـ $g_i(x)$، وهكذا لتحليل $f(x)$ لأكثر من r من العوامل ذات الدرجات الموجبة، مناقضًا لاختيارنا لـ r؛ لذلك، نحصل الآن على:

$$f(x) = c_1h_1(x)c_2h_2(x)\cdots c_rh_r(x)$$

حيث $h_i(x)$ غير مختزلة في $D[x]$، وإذا حللنا c_i الآن إلى غير مختزلات في D، نحصل على تحليل لـ $f(x)$ إلى حاصل ضرب غير المختزلات في $D[x]$.

تحليل $f(x) \in D[x]$، إذا كانت درجة $f(x)$ تساوي 0، فيكون وحيدًا؛ لأن D UFD، انظر التعليق بعد التمهيدية 27.45، وإذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من 0، فيمكننا تصوّر أيّ تحليل لـ $f(x)$ إلى حاصل ضرب غير مختزلات في $D[x]$ كتحليل في $F[x]$ إلى عناصر وحدة (أي العوامل في D) وكثيرات حدود غير مختزلات في $F[x]$ بحسب التمهيدية 27.45، وبحسب المبرهنة 20.23، كثيرات الحدود هذه وحيدة ما عدا الضرب بعوامل ثابتة من F، لكن بوصفها غير مختزلة في $D[x]$، كل كثيرة حدود ذات درجة > 0 تظهر في تحليل $f(x)$ في $D[x]$ هي بدائية، وبحسب جزء الوحدانية للتمهيدية 23.45، فهذا يوضح أنّ كثيرات الحدود هذه وحيدة في $D[x]$ ما عدا الضرب بعناصر وحدة، أي إنها متشاركة، التي هي مرة أخرى وحيدة ما عدا الضرب بعنصر وحدة بحسب التمهيدية 23.45؛ لذلك، كل غير المختزلات في $D[x]$ الظاهرة في التحليل وحيدة ما عدا الترتيب والمشاركة. ◆

30.45 نتيجة إذا كان F حقلًا و $x_1, \ldots, x_n$ غير معينات، فإنّ $F[x_1, ..., x_n]$ UFD.

البرهان بحسب المبرهنة 20.23، $F[x_1]$ UFD، وبحسب المبرهنة 29.45، كذلك $(F[x_1])[x_2] = F[x_1, x_2]$، وبالاستمرار بهذا الإجراء، نرى (بالاستقراء الرياضي) أنَّ $F[x_1, ..., x_n]$ UFD. ♦

رأينا أنَّ أيّ PID يكون UFD، وقد جعلت النتيجة 30.45 الأمر سهلاً أن نقدم مثالاً يوضح أنّه ليس كل UFD يكون PID.

31.45 مثال ليكن F حقلًا، ولتكن x , y غير معينات، فإنّ $F[x,y]$ UFD بحسب النتيجة 30.45. افترض المجموعة N من كثيرات الحدود في y, x في $F[x,y]$ ذات الحدّ الثابت 0، فإنّ N مثالية، لكن ليست مثالية رئيسة؛ إذن، $F[x,y]$ ليست PID. ▲

مثال آخر على UFD وليس PID هو $\mathbb{Z}[x]$، كما سيظهر في تمرين 12، فصل 46.

تمارين 45

حسابات

في التمارين من 1 إلى 8، بيِّن فيما إذا كان العنصر غير مختزل في الحلقة التامة المبينة

1. 5 في $\mathbb{Z}$

2. -17 في $\mathbb{Z}$

3. 14 في $\mathbb{Z}$

4. $2x - 3$ في $\mathbb{Z}[x]$

5. $2x - 10$ في $\mathbb{Z}[x]$

6. $2x - 3$ في $\mathbb{Q}[x]$

7. $2x - 10$ في $\mathbb{Q}[x]$

8. $2x - 10$ في $\mathbb{Z}_{11}[x]$

9. أعطِ أربع مشاركات مختلفة لـ $2x - 7$ بوصفها عنصرًا في $\mathbb{Z}[x]$؛ في $\mathbb{Q}[x]$؛ $\mathbb{Z}_{11}[x]$، إذا كان ذلك ممكنًا.

10. حلّل كثيرة الحدود $4x^2 - 4x + 8$ إلى حاصل ضرب غير مختزلات، بوصفها عنصرًا في الحلقة التامة $\mathbb{Z}[x]$؛ في الحلقة التامة $\mathbb{Q}[x]$؛ في الحلقة التامة $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

في التمارين من 11 إلى 13 أوجد ق م أ للعناصر المعطاة في $\mathbb{Z}$

11. 234 ،3250 ،1690

12. 784 ،-1960 ،448

13. 2178 ،396 ،792 ،594.

في التمارين من 14 إلى 17، عبّر عن كثيرة الحدود المعطاة بوصفها حاصل ضرب محتواها في كثيرة حدود بدائية في ألـ UFD المبينة.

14. $18x^2 - 12x + 48$ في $\mathbb{Z}[x]$

15. $18x^2 - 12x + 48$ في $\mathbb{Q}[x]$

16. $2x^2 - 3x + 6$ في $\mathbb{Z}[x]$

17. $2x^2 - 3x + 6$ في $\mathbb{Z}_7[x]$

مفاهيم

في التمارين من 18 إلى 20، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

18. العنصران a و b في الحلقة التامة D متشاركان في D، إذا وفقط إذا كان الكسر $a|b$ في D عنصر وحدة.

19. العنصر في الحلقة التامة D غير مختزل في D، إذا وفقط إذا كان لا يمكن تحليله إلى حاصل ضرب عنصرين من D.

20. العنصر في الحلقة التامة D أولي في D، إذا وفقط إذا كان لا يمكن تحليله إلى حاصل ضرب عنصرين أصغر في D.

21. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كلّ حقل UFD.

________ ب. كلّ حقل PID.

________ جـ. كلّ PID يكون UFD.

________ د. كلّ UFD يكون PID.

________ هـ. $\mathbb{Z}[x]$ UFD.

______ و. أيّ غير مختزلين في UFD متشاركان.
______ ز. إذا كان D PID ، فإنّ $D[x]$ PID.
______ ح. إذا كان D UFD ، فإنّ $D[x]$ UFD.
______ ط. في أيّ UFD، إذا كان $p|a$ لأيّ غير مختزل p، فإنّ p نفسه يظهر في كل تحليل لـ a.
______ ي. UFD لا يحوي قواسم لـ 0.

22. ليكن D UFD صف غير المختزلات في $D[x]$ بدلالة غير المختزلات في D وغير المختزلات في $F[x]$، حيث F هو حقل خوارج القسمة على D.

23. نصّت التمهيدية 26.45 على أنّه إذا كان D UFD و F حقل خوارج القسمة، فإنّ غير المختزلة وغير الثابتة $f(x)$ في $D[x]$ أيضًا غير مختزلة في $F[x]$. بيّن بمثال أنه إذا كانت $g(x) \in D[x]$ غير مختزلة في $F[x]$، فإنها ليست بالضرورة غير مختزلة في $D[x]$.

مفاهيم

24. ركّز عملنا كله في هذا الفصل على الحلقات التامة، بأخذ التعريف نفسه في هذا الفصل، لكن على الحلقة الإبدالية التي لها عنصر محايد، افترض التحليل إلى غير مختزلات في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ماذا يمكن أن يحدث؟ افترض بصورة خاصة $(1، 0)$.

براهين

25. أثبت أنه إذا كان p أوليًّا في حلقة تامة D، فإنّ p غير مختزل.

26. أثبت أنه إذا كان p غير مختزل في UFD، فإنّ p أولي.

27. بالنسبة إلى حلقة إبدالية R فيها عنصر محايد. بيِّن أنّ العلاقة $a \backsim b$ إذا كانت a تشارك b (أي إنه، إذا كان $a = bu$ حيث u عنصر وحدة في R) هي علاقة تكافؤ على R.

28. لتكن D حلقة تامة. وقد بيَّن تمرين 37، فصل 18 أنَّ $\langle U, \cdot \rangle$ زمرة ، حيث U هي مجموعة عناصر الوحدة في D، بيِّن أنّ المجموعة $D^* - U$ لغير عناصر الوحدة عدا 0 مغلقة تحت عملية الضرب. هل هذه المجموعة زمرة تحت عملية الضرب على D؟

29. لتكن D UFD. بيِّن أنّ القاسم غير الثابت لكثيرة حدود بدائية في $D[x]$ هي أيضًا كثيرة حدود بدائية.

30. بيِّن أنّ كل مثالية فعلية في PID، محتواة في مثالية أعظمية. [مساعدة: استخدم التمهيدية 10.45].

31. حلّل $x^3 - y^3$ إلى غير مختزلات في $\mathbb{Q}[x,y]$ ، وأثبت أنَّ هذه العوامل كلها غير مختزلة.

هناك مفاهيم أخرى عدة معتبرة عادة ومشابهة في تشخيص شرط السلسلة المتصاعدة على المثاليات في الحلقة. التمارين الثلاثة الآتية تهتم ببعض هذه المفاهيم.

32. لتكن R أيّ حلقة، **شرط السلسلة التصاعدية** (ACC) لمثاليات متحقق في R ، إذا كانت كل متتالية متزايدة فعليًّا $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$ من المثاليات في R ذات طول منته. **الشرط الأعظمي** (MC) لمثاليات متحقق في R ، إذا كانت كل مجموعة غير خالية S من المثاليات في R ، تحوي مثالية ليست محتواة بصورة فعلية في أيّ مثالية أخرى من المجموعة S. **شرط الأساس المنتهي** (FBC) لمثاليات متحقق في R ، إذا كان لكل مثالية N في R، توجد مجموعة منتهية $B_N = \{b_1, \cdots, b_n\} \subseteq N$، بحيث N تقاطع المثاليات كلها في R التي تحوي B_N. المجموعة B_N **مجموعة منتهية مولدة** لـ N.

بيِّن أنّ الشروط ACC، MC، FBC متكافئة لكل حلقة R.

33. لتكن R أي حلقة، **شرط السلسلة التنازلية** (DCC) لمثاليات متحقق في R ، إذا كانت كل متتالية متناقصة فعليًّا $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \cdots$ لمثاليات في R ذات طول منته، **والشرط الأصغري** (mC) لمثاليات متحقق في R ، إذا أعطينا أيّ مجموعة S من المثاليات في R، يوجد مثالية في S لا تحوي بصورة فعلية أيّ مثالية أُخرى من المجموعة S.

بيِّن أنّ الشرطين DCC و mC متكافئان لكل حلقة.

34. أعطِ مثالًا لحلقة، بحيث ACC متحقق لكنّ DCC غير متحقق. (انظر التمرينين 32 و 33).

الفصل 46 حلقات تامة إقليدية Euclidean Domains

أشرنا مرات عدّة إلى أهمية خوارزميات القسمة، وأول اتصالنا بها كان بخوارزمية القسمة على $\mathbb{Z}$ في الفصل 6، إذ استخدمت تلك الخوارزمية مباشرة في إثبات المبرهنة المهمّة، التي تنصّ على أنَّ الزمرة الجزئية من زمرة دورية تكون دورية، أي إنَّ لها مولِّدًا واحدًا، وبالطبع، هذا يتّضح للوهلة الأولى؛ لأن $\mathbb{Z}$ PID خوارزمية القسمة على $F[x]$ التي ظهرت في المبرهنة 1.23، واستخدمت بطريقة مشابهة بالكامل في إثبات أنَّ $F[x]$ PID، أمّا الآن، فالتقنية الحديثة في الرياضيات تعتمد على أخذ أوضاع متشابهة تمامًا، ومحاولة جمعها في برهان واحد عن طريق تجريد أفكار مهمّة مشتركة بينها، والتعريف المقبل هو توضيح لهذه التقنية، كما هو هذا الكتاب كله، لنرى ماذا يمكننا أن نطوِّر عندما نبدأ بإيجاد خوارزمية قسمة عامة لائقة في حلقة تامة.

1.46 تعريف **المعيار الإقليدي (Euclidean norm)** على حلقة تامة D هو دالة v تربط العناصر غير الصفرية من D بأعداد غير سالبة، بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:

1. لكل $a, b \in D$ حيث $b \neq 0$، يوجد q وr في D حيث $a = bq + r$، وإمّا $r = 0$ أو $v(r) < v(b)$.
2. لكل $a, b, \in D$ حيث a, b لا يساويان 0، $v(a) \leq v(ab)$.

تسمّى الحلقة التامة D **حلقة تامة إقليدية (Euclidean domain)** إذا وجد معيار إقليدي على D. ■

أهمية الشرط الأول واضحة من خلال مناقشتنا، وأهمية الشرط الثاني تكمن في أنه يمكننا من تشخيص عناصر الوحدة في الحلقة التامة الإقليدية D.

2.46 مثال الحلقة $\mathbb{Z}$ حلقة تامة إقليدية؛ لأن الدالة v المعرفة بـ $v(n) = |n|$ لـ $n \neq 0$ في $\mathbb{Z}$ هي معيار إقليدي على $\mathbb{Z}$ فالشرط الأول متحقّق عن طريق خورازمية القسمة على $\mathbb{Z}$ الشرط الثاني يأتي من $|ab| = |a|\ |b|$ و $|a| \geq 1$ لـ $a \neq 0$ في $\mathbb{Z}$. ▲

3.46 مثال إذا كان F حقلًا، فإنّ $F[x]$ حلقة تامة إقليدية؛ لأن الدالة v المعرفة بـ $v(f(x)) =$ (درجة $(f(x)$ لـ $f(x) \in F[x]$. و $f(x) \neq 0$ هي معيار إقليدي، فالشرط الأول متحقق بحسب المبرهنة 1.23، والشرط الثاني متحقق؛ لأن درجة حاصل ضرب كثيرتي حدود هي مجموع درجتيهما. ▲

بالطبع، سنقدم بعض الأمثلة على حلقات تامة إقليدية غير تلك المشهورة التي عززت التعريف. سنفعل ذلك في الفصل 47، وباستعراض الملحوظات الافتتاحية، نعجِّل بالمبرهنة الآتية:

4.46 مبرهنة تكون كل حلقة تامة إقليدية PID.

البرهان لتكن D حلقة تامة إقليدية مع المعيار الإقليدي ν، ولتكن N مثالية في D، فإذا كانت $N = \{0\}$، فإنّ $N = \langle 0 \rangle$ و N رئيسة. افترض أنَّ $N \neq \{0\}$؛ إذن، يوجد $b \neq 0$ في N، دعنا نختار b ، بحيث $\nu(b)$ هي الأصغر بين كل $\nu(n)$ ، حيث $n \in N$، وندَّعي أنَّ $N = \langle b \rangle$. لتكن $a \in N$، فباستخدام الشرط الأول للحلقة التامة الإقليدية، يوجد q و r في D بحيث:

$$a = bq + r$$

حيث إما $r = 0$ أو $\nu(r) < \nu(b)$. الآن، $r = a - bq$ و $a,b \in N$؛ لذلك، $r \in N$ ؛ لأن N مثالية. ولكن $\nu(r) < \nu(b)$ وهذا مستحيل من خلال اختيارنا لـ b؛ لذلك، $r = 0$، وبذلك $a = bq$، ولأنَّ a كان عنصرًا عشوائيًا في N، فنحصل على $N = \langle b \rangle$. ◆

5.46 نتيجة الحلقة التامة الإقليدية هي UFD.

البرهان بحسب المبرهنة 4.46 الحلقة التامة الإقليدية PID، وبحسب المبرهنة 17.45 ألـ PID هي UFD. ◆

أخيرًا، يجب علينا أن نذكر أنَّه بينما كل حلقة تامة إقليدية هي PID بحسب المبرهنة 4.46، فليس كل PID حلقة تامة إقليدية. ليس من السهل إيجاد أمثلة على PID وليست إقليدية.

الحساب في حلقات تامة إقليدية

سنكتشف الآن بعض خصائص الحلقات التامة الإقليدية التي لها علاقة بتركيبتها الضربية، حيث نشدد على أنَّ البناء الحسابي للحلقة التامة الإقليدية غير متأثر بأيّ حال من الأحوال بالمعيار الإقليدي ν على الحلقة التامة، والمعيار الإقليدي فقط أداة مفيدة ربمًا في إلقاء بعض الضوء على ذلك التركيب الحسابي للحلقة التامة، والبنية الحسابية للحلقة التامة D مُحدَّدة بالكامل بالمجموعة D والعمليتين الثنائيتين $+$، $\cdot$ على D. لتكن D حلقة تامة إقليدية مع المعيار الإقليدي ν. نستطيع أن نستخدم الشرط الثاني للمعيار الإقليدي في تمييز عناصر الوحدة في D.

6.46 مبرهنة: للحلقة التامة الإقليدية مع المعيار الإقليدي ν، $\nu(1)$ الأصغر بين كل $\nu(a)$ لغير الصفري $a \in D$، و $u \in D$ عنصر وحدة، إذا وفقط كان $\nu(u) = \nu(1)$.

البرهان يخبرنا الشرط الثاني لـ ν من الوهلة الأولى بأنَّه لـ $a \neq 0$.

$$\nu(1) \leq \nu(1a) = \nu(a).$$

من ناحية أخرى، إذا كان u عنصر وحدة في D، فإنَّ

$$\nu(u) \leq \nu(uu^{-1}) = \nu(1).$$

إذًا

$$\nu(u) = \nu(1)$$

لعنصر وحدة u في D.

في المقابل، افترض أنَّ غير الصفري $u \in D$ ، حيث $\nu(u) = \nu(1)$، فيوجد باستخدام خوارزمية القسمة q و r في D ، حيث

$$1 = uq + r.$$

حيث إما $r = 0$ أو $\nu(r) < \nu(u)$، ولكن لأن $\nu(u) = \nu(1)$ هي الأقل بين كل $\nu(d)$ لغير الصفري $d \in D$، $\nu(r) < \nu(u)$ مستحيل؛ إذن، $r = 0$ و $1 = uq$؛ لذلك، يكون u عنصر وحدة. ◆

مثال 7.46 بالنسبة إلى $\mathbb{Z}$، حيث $\nu(n)=|n|$، أصغر قيمة لـ $\nu(n)$ لغير صفري $n\in\mathbb{Z}$ هو 1، ولكن 1 و -1 هي فقط العناصر في $\mathbb{Z}$ ، حيث $\nu(n)=1$، وبالطبع 1 و -1 هي بالضبط عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}$. ▲

مثال 8.46 بالنسبة إلى $F[x]$، حيث $\nu(f(x)) =$ (درجة $(f(x)$) لـ $f(x)\neq 0$، أقل قيمة لـ $\nu(f(x))$ لكل غير صفري $f(x)\in F[x]$ هو 0، وكثيرات الحدود غير الصفرية من الدرجة 0 هي بالضبط العناصر غير الصفرية لـ F، وهذه هي فقط عناصر الوحدة في $F[x]$. ▲

نشدد على أنَّ كل شيء أثبتناه هنا متحقق في كل حلقة تامة إقليدية، بوجه خاص في $\mathbb{Z}$ و $F[x]$، وكما أشرنا في المثال 20.45، نستطيع أن نبيِّن أنَّ أيّ a و b في UFD لها ق م أ، ونحسبه فعلًا عن طريق تحليل a و b إلى غير مختزلات؛ لكن من الممكن أن يكون إيجاد هذه التحليلات صعبًا، أمّا إذا كانت ألـ UFD هي في الواقع إقليدية، ولدينا معيار إقليدي سهل الحساب، فتوجد طريقة فعّالة وسهلة لإيجاد ق م أ، كما توضح المبرهنة الآتية .

نبذة تاريخية

ظهرت الخوارزمية الإقليدية في كتاب العناصر لإقليدس كالقضيتين 1 و 2 في الكتاب السابع، حيث استخدمت كما استخدمت هنا في إيجاد القاسم المشترك الأكبر بين عددين صحيحين.

واستخدمها إقليدس أيضًا في الكتاب الخامس (القضيتان 2 و 3) في إيجاد القياس المشترك الأعظم لمقدارين (إذا وجد)، ولتحديد فيما إذا كان المقداران غير قابلين للقياس.

تظهر الخوارزمية مرة أخرى في (*Brahme sphutasiddhanta*) (تصحيح نظام براهما الفلكي) (628) للرياضي والفلكي الهندي في القرن السابع برهما جويتا، فلحلّ المعادلة غير المحددة $rx+c=sy$ في الأعداد الصحيحة، يستخدم براهما جويتا إجراء إقليدس "ليقسم بصورة تتابعية" r على s ؛ حتى يصل إلى آخر باقٍ غير صفري، بعدها وباستخدام التعويض معتمدًا على خوارج القسمة السابقة والبواقي، ينتج خوارزمية مباشِرة لإيجاد أصغر حل موجب لمعادلته.

عالم الجبر الصيني كِن جيوشاو استخدم أيضًا خوارزمية إقليدس في القرن الثالث عشر، في حله لما يُسمَّى معضلة الباقي الصينية التي نشرت في (*Shushu jiuzhang*) (رسالة رياضية في تسعة فصول) (1247)، فقد كان هدف كِن صياغة طريقة لحل نظام تطابقات $N\equiv r_i$ (مقياس m_i) وبوصفه جزءًا من هذه الطريقة، احتاج إلى حل تطابقات على صورة $Nx\equiv 1$ (مقياس m)، حيث N و m أوّليان نسبيًّا، حيث إنّ حلّ التطابق من هذا النوع يمكن إيجاده أيضًا عن طريق إجراء التعويض، بطريقة مختلفة عن الطريقة الهندية، التي تستخدم خوارج القسمة والبواقي من تطبيق خوارزمية إقليدس على N و m، وليس من المعلوم فيما إذا كان العنصر المشترك في الخوارزميات الهندية والصينية، وخوارزمية إقليدس نفسها، قد اكتشفت بصورة منفصلة في هذه الحضارات، أم أنها اقتبست من المصادر اليونانية.

9.46 مبرهنة (الخوارزمية الإقليدية): لتكن D حلقة تامة إقليدية مع المعيار الإقليدي v، ولتكن a و b عناصر غير صفرية في D. ليكن r_1 كما في الشرط الأول من المعيار الإقليدي، أي إنَّ

$$a = bq_1 + r_1,$$

حيث إما $r_1 = 0$ أو $v(r_1) < v(b)$. إذا كان $r_1 \neq 0$، ليكن r_2، حيث

$$b = r_1 q_2 + r_2,$$

وحيث إما $r_2 = 0$ أو $v(r_2) < v(r_1)$. بوجه عام، ليكن r_{i+1}، حيث:

$$r_{i-1} = r_i q_{i+1} + r_{i+1},$$

وحيث إما $r_{i+1} = 0$ أو $v(r_{i+1}) < v(r_i)$، فإنَّ المتتالية $r_1, r_2, \ldots$ يجب أن تتوقف عند بعض $r_s = 0$. إذا كان $r_1 = 0$، فإنّ b ق م أ لـ a و b، وإذا كان $r_1 \neq 0$ و r_s هو أوّل $r_i = 0$، فإنّ ألـ ق م أ لـ a و b هو r_{s-1}.

إضافة إلى ذلك، إذا كان d ق م أ لـ a و b، فإنه يوجد λ و μ في D، بحيث $d = \lambda a + \mu b$.

البرهان لأن $v(r_i) < v(r_{i-1})$ و $v(r_i)$ عدد غير سالب، يؤدي إلى أنَّه بعد عدد منتهٍ من الخطوات يجب أن نصل إلى $r_s = 0$.

إذا كان $r_1 = 0$، فإنّ $a = bq_1$ و b هو ق م أ لـ a و b. افترض أنَّ $r_1 \neq 0$، فإنَّه إذا كان $d|a$ و $d|b$، فإننا نحصل على:

$$d|\ (a - bq_1).$$

لذلك، $d|r_1$، ومع ذلك، إذا كان $d_1|r_1$ و $d_1|b$، فإنّ

$$d_1|\ (bq_1 + r_1).$$

لذلك، $d_1|a$؛ إذن، مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة لـ b و r_1. وبإجراء مشابه، إذا كان $r_2 \neq 0$، فإنّ مجموعة القواسم المشتركة لـ b و r_1 هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة لـ r_1 و r_2، ومستمرون على هذا العمل، فنرى أخيرًا أنّ مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b هي مجموعة القواسم المشتركة نفسها r_{s-2} و r_{s-1}، حيث r_s هو أوّل r_i يساوي 0.

لذلك، ق م أ لـ r_{s-2} و r_{s-1} هو أيضًا ق م أ لـ a و b. لكن المعادلة

$$r_{s-2} = q_s r_{s-1} + r_s = q_s r_{s-1}$$

توضّح أنّ ق م أ لـ r_{s-2} و r_{s-1} هو r_{s-1}.

يبقى علينا أن نبيِّن أنه يمكننا أن نعبِّر عن ألـ ق م أ d لـ a و b بـ $d = \lambda a + \mu b$. بدلالة البناء الذي أعطي توًّا، فإذا كان $d = b$، فإنّ $d = 0a + 1b$، وبذلك نكون انتهينا. إذا كان $d = r_{s-1}$، فإنه وبالرجوع العكسي خلال معادلاتنا، يمكننا أن نعبِّر عن r_i كلها بالصيغة $\lambda_i r_{i-1} + \mu_i r_{i-2}$، حيث $\lambda_i, \mu_i \in D$. للتوضيح مستخدمين الخطوة الأولى، فنحصل من المعادلة:

$$r_{s-3} = q_{s-1} r_{s-2} + r_{s-1}$$

على

$$d = r_{s-1} = r_{s-3} - q_{s-1} r_{s-2} \qquad (1)$$

بعدها نعبّر عن r_{s-2} بدلالة r_{s-3} و r_{s-4}، ونعوض في المعادلة (1) للتعبير عن d بدلالة r_{s-3} و r_{s-4}، حيث سيكون لدينا في آخر الأمر:

$$d = \lambda_3 r_2 + \mu_3 r_1 = \lambda_3(b - r_1 q_2) + \mu_3 r_1 = \lambda_3 b + (\mu_3 - \lambda_3 q_2) r_1$$
$$= \lambda_3 b + (\mu_3 - \lambda_3 q_2)(a - bq_1)$$

الذي يمكن التعبير عنه على الصورة $d = \lambda a + \mu b$. إذا كان d' أي ق م آخر لـ a و b ، فإنّ $d' = ud$ حيث u عنصر وحدة؛ إذن، $d' = (\lambda u)a + (\mu u)b$. ◆

الشيء الجميل في المبرهنة 9.46 أنُّه يمكن تنفيذها باستخدام الحاسوب، وبالطبع، نتوقع ذلك من أيّ شيء مسمّى بـ " خوارزمية".

مثال 10.46 لنوضح خوارزمية القسمة على المعيار الإقليدي | | على $\mathbb{Z}$ عن طريق حساب ق م أ لـ 22,471 و3,266. نطبّق فقط خوارزمية القسمة مرات عدّة وآخر باقٍ غير صفري هو ق م أ، حيث نرمز إلى الأرقام التي حصلنا عليها كما في المبرهنة 9.46 ؛ لنوضح نصّ المبرهنة وإثباتها بصورة أكثر، إذ يمكن التحقق من الحسابات بسهولة.

	$a = 22,471$
	$b = 3,266$
$22,471 = (3,266)6 + 2,875$	$r_1 = 2,875$
$3,266 = (2,875)1 + 391$	$r_2 = 391$
$2,875 = (391)7 + 138$	$r_3 = 138$
$391 = (138)2 + 115$	$r_4 = 115$
$138 = (115)1 + 23$	$r_5 = 23$
$115 = (23)5 + 0$	$r_6 = 0$

إذن، $r_5 = 23$ هو ق م أ لـ 471 ,22 و 266 ,3. أوجدنا ق م أ من غير تحليل وهذا مهم، إذ من الصعوبة بمكان تحليل عدد صحيح إلى أعداد أولية في بعض الأحيان. ▲

مثال 11.46 لاحظ أنه في خوارزمية القسمة وفي الشرط الأول في تعريف المعيار الإقليدي، لم نقل أيّ شيء عن أنّ r "موجب"، وقد كان اهتمامنا بالتأكيد في حساب ق م أ في $\mathbb{Z}$ عن طريق خوارزمية إقليدس لـ | |، كما في المثال 10.46، أن نجعل $|r_i|$ أصغر ما يمكن في كل حاصل قسمة؛ لذلك، بإعادة المثال 10.46 سيكون أكثر فاعلية أن نكتب:

	$a = 22,471$
	$b = 3,266$
$22,471 = (3,266)7 - 391$	$r_1 = -391$
$3,266 = (391)8 + 138$	$r_2 = 138$
$391 = (138)3 - 23$	$r_3 = -23$
$138 = (23)6 + 0$	$r_4 = 0$

يمكننا أن نبدل إشارة r_i من سالب إلى موجب عندما نريد؛ لأن قواسم r_i و $-r_i$ هي نفسها. ▲

تمارين 46

حسابات

في التمارين من 1 إلى 5، اذكر فيما إذا كانت الدالة المعطاة ν معيارًا إقليديًا للحلقة التامة المعطاة.

1. الدالة ν لـ $\mathbb{Z}$ المعطاة بـ $\nu(n) = n^2$ لغير الصفرى $n \in \mathbb{Z}$.

2. الدالة ν لـ $\mathbb{Z}[x]$ المعطاة بـ $\nu(f(x))=$ (درجة $f(x)$) لـ $f(x)) \in \mathbb{Z}[x]$، $f(x) \neq 0$.

3. الدالة ν لـ $\mathbb{Z}[x]$ المعطاة بـ $\nu(f(x)) =$ (القيمة المطلقة لمعامل أعلى درجة غير صفرية لحد في $f(x)$) لغير الصفري $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

4. الدالة ν لـ $\mathbb{Q}$ المعطاة بـ $\nu(a) = a^2$ لغير الصفري $a \in \mathbb{Q}$.

5. الدالة ν لـ $\mathbb{Q}$ المعطاة بـ $\nu(a) = 50$ لغير الصفري $a \in \mathbb{Q}$.

6. بالعودة إلى المثال 11.46، عَبِّرْ عن ق م أ 23 بالصيغة: $\lambda(22,471) + \mu(3,266)$ حيث $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$. [مساعدة: في السطر قبل الأخير في حسابات المثال 11.46، $391 - 3\,(138) = 23$. ومن السطر الذي قبله، $3,266 - 8(391) = 138$، إذن، تحصل بالتعويض على $391 - 3[3,266 - (391)\,8] = 23$، وهكذا. أي ، سر في طريقك من الأسفل إلى الأعلى حتى تجد فعليًا قيم λ و μ].

7. أوجد ق م أ لـ 49,349 و 15, 555 في $\mathbb{Z}$.

8. باتباع الفكرة في تمرين 6 وبالعودة إلى تمرين 7، عبِّرْ عن ق م أ الموجب لـ 49,349 و 15,555 في $\mathbb{Z}$ بالصيغة $\lambda(49,349) + \mu(15,555)$، حيث $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}$.

9. أوجد ق م أ لـ

$$x^{10} - 3x^9 + 3x^8 - 11x^7 + 11x^6 - 11x^5 + 19x^4 - 13x^3 + 8x^2 - 9x + 3$$

و

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 5x + 2$$

في $\mathbb{Q}[x]$.

10. صف كيف يمكن استخدام خوارزمية إقليدس في إيجاد ق م أ لـ n من الأعداد $a_1, a_2, \cdots, a_n$ في حلقة تامة إقليدية.

11. باستخدام الطريقة المستنبطة من تمرين 10، أوجد ق م أ لـ 2178، 396، 792، 726.

مفاهيم

12. لنفترض $\mathbb{Z}[x]$.

أ. هل $\mathbb{Z}[x]$ UFD؟ لماذا؟

ب. بيِّن أنَّ $\{a + xf(x) \mid a \in 2\mathbb{Z}, f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$ مثالية في $\mathbb{Z}[x]$.

جـ. هل $\mathbb{Z}[x]$ PID؟ (استخدم الجزء (ب)).

د. هل $\mathbb{Z}[x]$ حلقة تامة إقليدية؟ لماذا؟

13. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل حلقة تامة إقليدية PID.

________ ب. كل PID حلقة تامة إقليدية.

________ جـ. كل حلقة تامة إقليدية UFD.

________ د. كل UFD حلقة تامة إقليدية.

________ هـ. ق م أ لـ 2 و 3 في $\mathbb{Q}$ هو $\frac{1}{2}$.

________ و. خوارزمية إقليدس تقدِّم طريقة لإيجاد ق م أ لعددين صحيحين.

________ ز. إذا كان v معيارًا إقليديًّا على حلقة تامة إقليدية D، فإنّ $v(1) \leq v(a)$ لكل غير صفري $a \in D$.

________ ح. إذا كان v معيارًا إقليديًّا على حلقة تامة إقليدية D، فإنّ $v(1) < v(a)$ لكل غير صفري $a \in D$، $a \neq 1$.

________ ط. إذا كان v معيارًا إقليديًّا على حلقة تامة إقليدية D، فإنّ $v(1) < v(a)$ لكل غير صفري، وليس عنصر وحدة $a \in D$.

________ ي. لأي حقل F، $F[x]$ حلقة تامة إقليدية.

14. هل اختيار معيار إقليدي محدّد v على حلقة تامة إقليدية D، هو تدخل غير مشروع في البناء الحسابي لـ D بأيّ صورة في الصور؟ وضِّح.

براهين

15. لتكن D حلقة تامة إقليدية، وليكن v معيارًا إقليديًّا على D. بيِّن أنَّه إذا كان a و b متشاركين في D، فإنّ $v(a) = v(b)$.

16. لتكن D حلقة تامة إقليدية، وليكن v معيارًا إقليديًّا على D. أثبت أنَّه لغير الصفرين $a,b \in D$، نحصل على $v(a) < v(ab)$، إذا وفقط إذا كان b ليس عنصر وحدة في D. [**مساعدة**: يظهر من التمرين 15، أنَّ $v(a) < v(ab)$ يؤدي إلى أنّ b ليس عنصر وحدة في D. باستخدام الخوارزمية الإقليدية، بيِّن أنّ $v(a) = v(ab)$ يؤدي إلى أنّ $\langle a \rangle = \langle ab \rangle$. استنتج أنَّه إذا كان b ليس عنصر وحدة، فإنّ $v(a) < v(ab)$].

17. أثبت أو انفِ الجملة الآتية: إذا كان v معيارًا إقليديًّا على حلقة تامة إقليدية D، فإنّ $\{a \in D \mid v(a) > v(1)\} \cup \{0\}$ مثالية في D.

18. بيِّن أنَّ كل حقل يكون حلقة تامة إقليدية.

19. ليكن v معيارًا إقليديًّا على الحلقة التامة الإقليدية D.

أ. بيِّن أنه إذا كان $s \in \mathbb{Z}$ حيث $s + v(1) > 0$، فإنّ $n : D^* \to \mathbb{Z}$ المعرفة بـ $n(a) = v(a) + s$ لغير الصفري $a \in D$ معيار إقليدي على D. كالعادة D^* هي مجموعة العناصر غير الصفرية في D.

ب. أثبت أنَّه لـ $t \in \mathbb{Z}^+$، $\lambda : D^* \to \mathbb{Z}$ المعطاة بـ $\lambda(a) = t.\ v(a)$ لغير الصفري $a \in D$، معيار إقليدي على D.

جـ. بيِّن أنه يوجد معيار إقليدي μ على D ، حيث $\mu(1) = 1$ و $\mu(a) > 100$ لكل غير صفري، وليس عنصر وحدة $a \in D$.

20. لتكن D UFD. العنصر c في D **مضاعف مشترك أصغر (least common multiple)** (باختصار م م أ) لعنصرين a و b في D ، إذا كان $a|c$، $b|c$ ، وإذا كان c يقسم كل عنصر في D قابل للقسمة على كلٍّ من a و b. بيِّن أنَّ كل عنصرين غير صفريين a و b في حلقة إقليدية D لهما م م أ في D. [مساعدة: بيِّن أنَّ المضاعفات المشتركة كلها – بالمعنى الواضح – لكلٍّ من a و b تشكل مثالية في D].

21. استخدم العبارة الأخيرة في المبرهنة 9.46 لتبيِّن أنَّ كل عنصرين غير صفريين $r, s \in \mathbb{Z}$ يولدان الزمرة $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$، إذا وفقط إذا كان s, r، بوصفهما عنصرين في الحلقة التامة $\mathbb{Z}$، **أوليّين نسبيًا (reatively prime)**، أي إنَّ ق م أ لهما هو 1.

22. باستخدام الجملة الأخيرة في المبرهنة 9.46 بيِّن أنه للقيم غير الصفرية $a, b, n \in \mathbb{Z}$ التطابق $ax \equiv b$ (مقياس n) له حل في $\mathbb{Z}$ إذا كان a و n أوليين نسبيًّا.

23. عمِّم التمرين 22 موضحًا أنه للقيم غير الصفرية $a, b, n \in \mathbb{Z}$، التطابق $ax \equiv b$ (مقياس n) له حل في $\mathbb{Z}$ ، إذا وفقط إذا كان ق م أ الموجب لـ a و n في $\mathbb{Z}$ يقسم b.

ترجم هذه النتيجة في الحلقة $\mathbb{Z}_n$.

24. متّبعًا الفكرة في التمرينين 6 و 23، أوجز طريقة بنّاءة لإيجاد الحل في $\mathbb{Z}$ للتطابق $ax \equiv b$ (مقياس n) للقيم غير الصفرية $a,b,n \in \mathbb{Z}$ وإذا كان للتطابق حل، استخدم هذه الطريقة في إيجاد الحلّ للتطابق $22x \equiv 18$ (مقياس 42).

الفصل 47 أعداد جاوس والمعايير الضربية Gaussian Integers and Multiplicative Norms

أعداد جاوس الصحيحة

سنقدِّم مثالًا على حلقة تامة إقليدية تختلف عن $\mathbb{Z}$ و $F[x]$.

1.47 تعريف عدد **جاوس الصحيح (Gaussian Integer)** هو العدد المركَّب $a + bi$، حيث $a, b \in \mathbb{Z}$. ولعدد جاوس الصحيح $\alpha = a + bi$، **المعيار (norm)** $N(\alpha)$ لـ α هو $a^2 + b^2$. ■

سنجعل $\mathbb{Z}[i]$ تعني مجموعة أعداد جاوس الصحيحة. ستقدِّم التمهيدية الآتية بعض الخصائص الأساسية لدالة المعيار N على $\mathbb{Z}[i]$، وستقود إلى توضيح أنَّ الدالة v المعرفة بـ $v(\alpha) = N(\alpha)$ لغير صفري $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$، هي معيار إقليدي على $\mathbb{Z}[i]$. لاحظ أنَّ أعداد جاوس الصحيحة تشمل الأعداد النسبية الصحيحة كلها، أي عناصر $\mathbb{Z}$ كلها.

نبذة تاريخية

درس جاوس بالتفصيل في كتابه (*Disquisitiones Arithmeticae*) مبرهنة البواقي التربيعية، التي هي مبرهنة الحلول للمتطابقة $x^2 \equiv p$ (مقياس q)، وأثبت مبرهنة المقلوبية التربيعية المشهورة، موضِّحًا العلاقة بين حلول المتطابقتين $x^2 \equiv p$ (مقياس q) $x^2 \equiv q$ (مقياس p)، حيث p و q أعداد أولية، وفي محاولته لتعميم نتائجه إلى مبرهنات البواقي التربيعية، أدرك أنَّه من الطبيعي أكثر الأخذ في الحسبان أعداد جاوس الصحيحة بدلاً من الأعداد الصحيحة العادية.

اكتشافات جاوس على أعداد جاوس الصحيحة محتواة في بحث طويل منشور عام 1832م، وقد أثبت فيه وجود كثير من أوجه الشبه بينها وبين الأعداد الصحيحة العادية، على سبيل المثال: بعد أن لاحظ وجود أربعة عناصر وحدة (عناصر لها معكوس ضربي) من أعداد جاوس الصحيحة، هي 1، -1، i و $-i$ وبتعريف المعيار كما في التعريف 1.47، عمَّم مفهوم العدد الأولي بتعريفه عدد جاوس الأولي؛ ليكون العدد الذي لا يمكن التعبير عنه بوصفه حاصل ضرب عددين صحيحين ليس أيًّا منهما عنصر وحدة، وأصبح قادرًا – بعدها –على تحديد أيٍّ من أعداد جاوس أولي:

عدد جاوس غير الحقيقي يكون أوليًّا، إذا وفقط إذا كان معياره عددًا حقيقيًّا أوليًّا، الذي يمكن أن يكون 2 أو على الصيغة $4n+1$. العدد الأوليّ الحقيقي $(1-i)\,(1+i) = 2$ والأعداد الحقيقية الأولية المطابقة لـ 1 مقياس 4 مثل $13 = (2+3i)$ $(2-3i)$، تتحلل إلى حاصل ضرب عددي جاوس أوَّليين، والأعداد الأولية الحقيقية على صيغة $4n+3$ مثل 7 و 11، لا تزال أولية في الحلقة التامة لأعداد جاوس الصحيحة. انظر التمرين 10.

2.47 تمهيدية في $\mathbb{Z}[i]$، الخصائص الآتية لدالة المعيار N متحققة لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$:

.1 $N(\alpha) \geq 0$.

.2 $N(\alpha) = 0$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = 0$.

.3 $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

البرهان إذا جعلنا $\alpha = a_1 + a_2 i$ و $\beta = b_1 + b_2 i$، هذه النتائج هي حسابات مباشِرة، ونترك إثبات هذه الخصائص بوصفها تمرينًا (انظر التمرين 11). ♦

3.47 تمهيدية $\mathbb{Z}[i]$ حلقة تامة.

البرهان من الواضح أنّ $\mathbb{Z}[i]$ حلقة إبدالية فيها عنصر محايد، سنبيِّن أنه لا توجد قواسم لـ 0. لتكن $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. باستخدام التمهيدية 2.47، إذا كان $\alpha\beta = 0$ ، فإنَّ

$$N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) = N(0) = 0$$

إذن، $\alpha\beta = 0$ يؤدي إلى أنَّ $N(\alpha) = 0$ أو $N(\beta) = 0$، مرّة أخرى وباستخدام التمهيدية 2.47، يؤدي هذا إلى أنه إما $\alpha = 0$ أو $\beta = 0$؛ إذن، $\mathbb{Z}[i]$ لا تحوي قواسم لـ 0؛ لذلك، $\mathbb{Z}[i]$ حلقة تامة. ♦

بالطبع، لأن $\mathbb{Z}[i]$ حلقة جزئية من $\mathbb{C}$، حيث $\mathbb{C}$ حقل الأعداد المركبة، فإنَّه من الواضح حقيقةً أنَّ $\mathbb{Z}[i]$ لا تحوي قواسم لـ 0. قدَّمنا برهان التمهيدية 3.47 لتوضيح استخدام الخاصية الضربية 3 للمعيار الدالي N ، ولتجنُّب الذهاب خارج $\mathbb{Z}[i]$.

4.47 مبرهنة الدالة v المعطاة بـ $v(\alpha) = N(\alpha)$ لغير الصفري $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ هي معيار إقليدي على $\mathbb{Z}[i]$، إذن، $\mathbb{Z}[i]$ حلقة تامة إقليدية.

البرهان لاحظ أنَّه لـ $\beta = b_1 + b_2 i \neq 0$، $N(b_1 + b_2 i) = b_1^2 + b_2^2$؛ إذن، $N(\beta) \geq 1$.

إذن، لكل $\alpha, \beta \neq 0$ في $\mathbb{Z}[i]$، $N(\alpha) \leq N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta)$، وهذا يثبت الشرط الثاني للمعيار الإقليدي في التعريف 1.46.

بقي أن نثبت خوارزمية القسمة، الشرط الأول، لـ N. لتكن $\alpha = a_1 + a_2 i$ و $\beta = b_1 + b_2 i$، حيث $\beta \neq 0$. يجب علينا أن نجد σ و ρ في $\mathbb{Z}[i]$ ، بحيث $\alpha = \beta\sigma + \rho$ وإمّا $\rho = 0$ أو $N(\rho) < N(\beta) = b_1^2 + b_2^2$. لتكن $\alpha/\beta = r + si$ حيث $r, s \in \mathbb{Q}$، لتكن q_1 و q_2 أعدادًا صحيحة في $\mathbb{Z}$ ، أقرب ما تكون إلى الأعداد النسبية r و s على الترتيب. لتكن $\sigma = q_1 + q_2 i$ و $\rho = \alpha - \beta\sigma$، فإذا كان $\rho = 0$، فقد انتهينا. وإلّا، وبحسب بناء σ، نرى أنَّ $|r - q_1| \leq \frac{1}{2}$ و $|s - q_2| \leq \frac{1}{2}$؛ إذن:

$$\begin{aligned} N\left(\frac{\alpha}{\beta} - \sigma\right) &= N((r + si) - (q_1 + q_2 i)) \\ &= N((r - q_1) + (s - q_2)i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

لذلك نحصل على

$$N(\rho) = N(\alpha - \beta\sigma) = N\left(\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - \sigma\right)\right) = N(\beta)N\left(\frac{\alpha}{\beta} - \sigma\right) \leq N(\beta)\frac{1}{2},$$

إذن، حصلنا فعلًا على $N(\rho) < N(\beta)$ كما هو مطلوب. ♦

5.47 مثال يمكننا تطبيق نتائجنا جميعها في الفصل 46 على $\mathbb{Z}[i]$، بالتحديد؛ لأنَّ $N(1) = 1$، عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}[i]$ هي بالضبط $\alpha = a_1 + a_2 i$، حيث $N(\alpha) = a_1^2 + a_2^2 = 1$، ومن حقيقة أنَّ a_1 و a_2 أعداد صحيحة، فإنّ الاحتمالات هي فقط $a_1 = \pm 1$ مع $a_2 = 0$ أو $a_1 = 0$ مع $a_2 = \pm 1$؛ إذن، عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}[i]$ هي ± 1 و $\pm i$. يمكن استخدام خوارزمية القسمة لحساب ق م أ لعنصرين غير صفريين. سنترك مثل هذه الحسابات للتمارين.

أخيرًا، لاحظ إنَّه، بينما 5 غير مختزل في $\mathbb{Z}$ أصبح 5 مختزلًا في $\mathbb{Z}[i]$ لأنَّ $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5$، وليس $1 + 2i$ أو $1 - 2i$ عنصر وحدة. ▲

المعايير الضربيّة

لنُشر مرّة أخرى إلى أنه للحلقة التامة D، المفاهيم الحسابية لغير المختزلات وعناصر الوحدة، لا تتأثر بأيّ حال بالمعيار الذي ربما يُعرَّف على الحلقة التامة، مع ذلك كما في الفصل السابق، وعملنا إلى الآن في هذا الفصل يوضحان أنَّ معيارًا مناسبًا معرَّفًا ربما يساعد على تحديد البنية الحسابية لـ D. هذا موضَّح بصورة لافتة للنظر في مبرهنة الأعداد الجبرية، فبالنسبة إلى الحلقة التامة للأعداد الجبرية، نفترض معايير كثيرة مختلفة على الحلقة التامة، كل منها له دوره في المساعدة على تحديد البنية الحسابية للحلقة التامة، وعندنا في الحلقة التامة للأعداد الجبرية معيار واحد جوهري لكل غير مختزل (تبعًا للمشاركة)، وكل معيارٍ منها يقدّم معلومات عن سلوك غير المختزلات في الحلقة التامة التي ترتبط بها.

هذا مثال على أهمية دراسة خصائص العناصر في بنية جبرية من خلال دوال مرتبطة بها.

لندرس حلقة تامة لها معيار ضربي محقق للخصائص 2 و 3 لـ N على $\mathbb{Z}[i]$ المعطاة في التمهيدية 2.47.

6.47 تعريف لتكن D حلقة تامة. **المعيار الضربي** N **على** D (***multiplicative norm***) هو دالة تربط D بالأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، حيث تتحقق الشروط الآتية:

1. $N(\alpha) = 0$، إذا وفقط إذا كان $\alpha = 0$.
2. $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ لكل $\alpha, \beta \in D$. ■

7.47 مبرهنة إذا كانت D حلقة تامة مع المعيار الضريبي N، فإنّ $N(1) = 1$ و $|N(u)| = 1$ لكل عنصر وحدة u في D، وإذا كان– إضافة إلى ذلك – كل α بحيث $|N(\alpha)| = 1$ عنصر وحدة في D، فإنّ العنصر π في D، بحيث $|N(\pi)| = p$ و $p \in \mathbb{Z}$ عدد أوّليّ غير مختزل في D.

البرهان لتكن D حلقة تامة مع المعيار الضربي N؛ إذن:

$$N(1) = N((1)(1)) = N(1)\,N(1)$$

تبيّن أنّ $N(1) = 1$. كذلك، إذا كان u عنصر وحدة في D، فإنَّ

$$1 = N(1) = N(uu^{-1}) = N(u)\,N(u^{-1})$$

ولأن $N(u)$ عدد صحيح، فهذا يؤدي إلى أنّ $|N(u)| = 1$.

افترض الآن أنَّ عناصر الوحدة في D هي بالضبط العناصر ذات المعيار ±1. لتكن $\pi \in D$ بحيث $p=|N(\pi)|$، حيث p عدد أوّلي في $\mathbb{Z}$، فإذا كان $\pi = \alpha\beta$، فنحصل على:

$$p = |N(\pi)| = |N(\alpha)N(\beta)|$$

لذلك، إما $|N(\alpha)| = 1$ أو $|N(\beta)| = 1$. وبالإفتراض، هذا يعني أنه إما α أو β عنصر وحدة في D؛ إذن، π غير مختزل في D. ♦

8.47 مثال في $\mathbb{Z}[i]$، الدالة N المعرفة بـ $N(a+bi) = a^2 + b^2$ تقدِّم معيارًا ضربيًّا يتناسب مع تعريفنا. رأينا أنَّ الدالة ν المعطاة بـ $\nu(\alpha) = N(\alpha)$ لغير الصفري $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ هي معيار إقليدي على $\mathbb{Z}[i]$؛ لذلك، عناصر الوحدة هي بالضبط العناصر α في $\mathbb{Z}[i]$ ، حيث $N(\alpha) = N(1) = 1$؛ إذن، الجزء الثاني من المبرهنة 7.47 متحقق في $\mathbb{Z}[i]$.

رأينا في المثال 5.47 أنّ 5 مختزلة في $\mathbb{Z}[i]$؛ لأنَّ $(1-2i)(1+2i)=5$. ولأنَّ $N(1+2i) = N(1-2i) = 1^2 + 2^2 = 5$ و 5 عدد أولي في $\mathbb{Z}$، فنرى من المبرهنة 7.47 أنَّ $1+2i$ و $1-2i$ كليهما غير مختزل في $\mathbb{Z}[i]$.

بوصفه تطبيقًا على المعايير الضربية، سنقدم الآن مثالًا على حلقة تامة ليست UFD، فقد رأينا مثالاً واحدًا في المثال 16.45، والآتي هو توضيح أساسي.

9.47 مثال لتكن $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + ib\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$، وبوصفها مجموعة جزئية من الأعداد المركبة، فهي مغلقة تحت الجمع، والطرح، والضرب وتحوي 0 و 1؛ إذن، $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ حلقة تامة.

عرّف N على $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ بـ

$$N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$$

من الواضح أنّ $N(\alpha) = 0$، إذا وفقط إذا كان $\alpha = a+b\sqrt{-5} = 0$؛ ولأنّ $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ هو حساب مباشر، فسنتركه للتمارين (انظر التمرين 12). لنجد عناصر الوحدة كلها المرشحة في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$، عن طريق إيجاد العناصر α في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$، حيث $N(\alpha) = 1$، فإذا كان $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ و $N(\alpha) = 1$، فيجب أن يكون عندنا $a^2 + 5b^2 = 1$ وللأعداد الصحيحة a و b ، هذا ممكن فقط إذا $b = 0$ و $a = \pm1$؛ إذن، ±1 هي فقط المرشحة بوصفها عناصر وحدة، ولأنَّ ±1 عناصر وحدة، فإنها بالضبط عناصر الوحدة في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

الآن في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$، عندنا $21 = (3)(7)$ ، وكذلك:

$$21 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5}).$$

إذا استطعنا أن نبيِّن أنَّ $1+2\sqrt{-5}$، 7، 3 و $1-2\sqrt{-5}$ كلها غير مختزلة في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ، فسنعلم عندها أنّ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ لا يمكن أن يكون UFD؛ لأنَّه لا 3 ولا 7 يساوي $\pm(1 + 2\sqrt{-5})$.

افترض أنَّ $3 = \alpha\beta$، فإنَّ

$$9 = N(3) = N(\alpha)N(\beta)$$

توضح أنه يجب أن يكون عندنا $N(\alpha)$ تساوي 1، 3 أو 9، فإذا كان $N(\alpha) = 1$، فإنّ α عنصر وحدة، وإذا كان $\alpha = a + b\sqrt{-5}$، فإنّ $N(\alpha) = a^2 + 5b^2$، وليس هناك أيّ خيار لأعداد صحيحة a و b، حيث $N(\alpha) = 3$، فإذا كان $N(\alpha) = 9$، فإنّ $N(\beta) = 1$؛ إذن، β عنصر وحدة؛ ولذلك، 3 غير مختزل في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ وبمناقشة مشابهة يتبيّن أنّ 7 غير مختزل في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

إذا كان $1 + 2\sqrt{-5} = \gamma\,\delta$، فنحصل على:

$$21 = N(1 + 2\sqrt{-5}) = \mathrm{N}(\gamma)N(\delta)$$

إذن، $N(\gamma)$ تساوي 1، أو 3، أو 7 أو 21. رأينا أنّه لا يوجد عنصر في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ معياره 3 أو 7؛ لذلك، إمّا $N(\gamma) = 1$، و γ عنصر وحدة، أو $N(\gamma) = 21$؛ وبذلك، فإنّ $N(\delta) = 1$، و δ عنصر وحدة؛ إذن، $1 + 2\sqrt{-5}$ غير مختزل في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. وبمناقشة موازية يتّضح أنّ $1 - 2\sqrt{-5}$ أيضًا غير مختزلة في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

باختصار، بيّنا أنّ

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + ib\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathrm{Z}\}$$

هي حلقة تامة، لكنها ليست UFD، وبالتحديد هناك تحليلان مختلفان

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$$

لـ 21 إلى غير مختزلات. غير المختزلات هذه لا يمكن أن تكون أولية؛ لأنها لو كانت أولية لأمكننا إثبات وحدانية التحليل (انظر إثبات المبرهنة 17.45). ▲

نختم بالسؤال التقليدي، حدِّد أيّ الأعداد الأوّلية p في $\mathbb{Z}$ تساوي حاصل جمع مربعي عددين في $\mathbb{Z}$. على سبيل المثال $2 = 1^2 + 1^2$، $5 = 1^2 + 2^2$، و $13 = 2^2 + 3^2$ هي مجموع مربعات؛ ولأننا أجبنا الآن عن هذا السؤال للعدد الزوجي الأولي الوحيد 2، فنستطيع أن نقيِّد أنفسنا بالأعداد الأولية الفردية.

10.47 مبرهنة (**مبرهنة فيرما $p = a^2 + b^2$**) ليكن p عددًا أوليًّا فرديًّا في $\mathbb{Z}$، فإنّ $p = a^2 + b^2$ للعددين الصحيحين a و b في $\mathbb{Z}$، إذا وفقط إذا كان $p \equiv 1$ (مقياس 4).

البرهان أولًا، افترض أنّ $p = a^2 + b^2$. الآن، لا يمكن أن يكون a و b كلاهما زوجي أو كلاهما فردي؛ لأن p عدد فردي، فإذا كان $a = 2r$ و $b = 2s + 1$، فإنّ $a^2 + b^2 = 4r^2 + 4(s^2 + s) + 1$؛ إذن، $p \equiv 1$ (مقياس 4). هذا يهتم باتجاه واحد لهذه المبرهنة: إذا وفقط إذا كان.

بالنسبة إلى الاتجاه الآخر، نفترض أنّ $p \equiv 1$ (مقياس 4). الآن، الزمرة الضربية للعناصر غير الصفرية للحقل المنتهي $\mathbb{Z}_p$ دورية ورتبتها 1؛ ولأنّ 4 قاسم لـ $p - 1$، نرى أنَّ $\mathbb{Z}_p$ يحوى عنصر n رتبته الضربية 4. وعليه، n^2 رتبتها الضربية 2؛ إذن، $n^2 = -1$ في $\mathbb{Z}_p$؛ لذلك، نحصل في $\mathbb{Z}$ على: $n^2 \equiv -1$ (مقياس p)؛ إذن، p يقسم $n^2 + 1$ في $\mathbb{Z}$.

باستعراض p وn^2+1 في $\mathbb{Z}[i]$؛ نرى أنّ p تقسم $(n-i)(n+i) = n^2+1$. افترض أنَّ p غير مختزلة في $\mathbb{Z}[i]$ فيجب على p أن تقسم $n+i$ أو $n-i$. فإذا كانت p تقسم $n+i$ ، فإنّ $n+i = p(a+bi)$، حيث $a, b \in \mathbb{Z}$، وبمساواة معاملات i، نحصل على $1 = pb$ ، وذلك غير ممكن، وبالمثل، إذا كانت p تقسم $n-i$ ، فإنّ ذلك يقود إلى معادلة غير ممكنة، وهي: $-1 = pb$. إذن، افتراضنا أنَّ p غير مختزلة في $\mathbb{Z}[i]$ يجب أن يكون خاطئًا.

لأنّ p مختزلة في $\mathbb{Z}[i]$، فإننا نحصل على $p = (a+bi)(c+di)$ ، حيث $a+bi$ و $c+di$ ليسا عناصر وحدة، وبأخذ المعايير، يكون عندنا $p^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$، حيث لا $a^2+b^2 = 1$ ولا $c^2+d^2 = 1$ بناءً على ذلك، يكون عندنا $p = a^2+b^2$، الذي يكمل إثباتنا.

[لأن $a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi)$ نرى أنَّ هذا هو التحليل لـp ، أي إنَّ $c+di = a-bi$.] . ♦

يسألك التمرين 10 لتحدد أيّ الأعداد الأوّلية p من $\mathbb{Z}$ تبقى أوّلية في $\mathbb{Z}[i]$.

تمارين 47

حسابات

في التمارين من 1 إلى 4، حلل عدد جاوس الصحيح إلى حاصل ضرب غير مختزلات في $\mathbb{Z}[i]$. [مساعدة: لأنّ كل معامل غير مختزل لـ $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ يجب أن يكون معياره > 1 ويقسم $N(\alpha)$، فيوجد فقط عدد منتهٍ من أعداد جاوس الصحيحة $a + bi$ لأن تُعدّ عوامل غير مختزلة ممكنة لأيّ α معطاة. قسم α على كل منها في $\mathbb{C}$، وانظر أيًّا من نواتج القسمة مرة أخرى في $\mathbb{Z}[i]$.]

1. 5 **2.** 7 **3.** $4 + 3i$ **4.** $6 - 7i$

5. بيِّن أنَّ 6 لا يتحلل بصورة وحيدة (تبعًا للمشاركات) إلى غير مختزلات في $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. أعطِ تحليلين مختلفين.

6. افترض $\alpha = 7 + 2i$ و $\beta = 3 - 4i$ في $\mathbb{Z}[i]$. أوجد σ و ρ في $\mathbb{Z}[i]$ بحيث:

$$\alpha = \beta\sigma + \rho \text{ حيث } N(\rho) < N(\beta)$$

[مساعدة: استخدم البناء في إثبات المبرهنة 4.47].

7. استخدم الخوارزمية الإقليدية في $\mathbb{Z}[i]$ في إيجاد ق م أ لـ $5 - 15i$ و $8 + 6i$ في $\mathbb{Z}[i]$. [مساعدة: استخدم البناء في إثبات المبرهنة 4.47].

مفاهيم

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. $\mathbb{Z}[i]$ هي PID.

______ ب. $\mathbb{Z}[i]$ حلقة إقليدية.

______ ج. كل عدد صحيح في $\mathbb{Z}$ هو عدد جاوس صحيح.

______ د. الخوارزمية الإقليدية متحققة في $\mathbb{Z}[i]$.

______ هـ. كل عدد مركب هو عدد جاوس صحيح.

______ و. المعيار الضربي على حلقة تامة يساعد في بعض الأحيان على إيجاد غير مختزلات في الحلقة التامة.

______ ز. إذا كان N معيارًا ضربيًّا على حلقة تامة D، فإنّ $|N(u)| = 1$ لكل عنصر وحدة u في D.

______ ح. إذا كان F حقلًا، فإنّ الدالة N المعرفة بـ $N(f(x)) = ($درجة $f(x))$ هي معيار ضربي على $F[x]$.

______ ط. إذا كان F حقلًا، فإنَّ الدالة المعرفة بـ $N(f(x)) = 2^{(\text{درجة } f(x))}$ لـ $f(x) \neq 0$ و $N(0) = 0$ هي معيار ضربي على $F[x]$ تبعًا لتعريفنا.

______ ي. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ حلقة تامة ليست UFD.

9. لتكن D حلقة تامة مع المعيار الضربي N، بحيث $|N(\alpha)| = 1$ لـ $\alpha \in D$، إذا وفقط إذا كان α عنصر وحدة في D. لتكن π بحيث $|N(\pi)|$ الأصغر بين كل $1 < |N(\beta)|$، حيث $\beta \in D$. بيِّن أنّ π غير مختزل في D.

10. أ. أثبت أنّ 2 يساوي حاصل ضرب عنصر وحدة ومربع غير مختزل في $\mathbb{Z}[i]$.

ب. أثبت أنّ العدد الأوّلي p في $\mathbb{Z}$ غير مختزل في $\mathbb{Z}[i]$، إذا وفقط إذا كان $p \equiv 3$ (مقياس 4). (استخدم المبرهنة 10.47).

11. أثبت التمهيدية 2.47.

12. أثبت أنّ N في المثال 9.47 ضربية، أي إنّ $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\,N(\beta)$ لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

13. لتكن D حلقة تامة مع المعيار الضربي N، بحيث $|N(\alpha)| = 1$ لـ $\alpha \in D$ إذا وفقط إذا كان α عنصر وحدة في D. بيّن أنّ أيّ عنصر ليس صفرًا، وليس عنصر وحدة في D له تحليل إلى غير مختزلات في D.

14. استخدم الخوارزمية الإقليدية في $\mathbb{Z}[i]$ في إيجاد ق م أ لـ $16 + 7i$ و $10 - 5i$ في $\mathbb{Z}[i]$. [مساعدة: استخدم البناء في إثبات المبرهنة 4.47].

15. لتكن $\langle\alpha\rangle$ مثالية رئيسة غير صفرية في $\mathbb{Z}[i]$.

أ. أثبت أنّ $\mathbb{Z}[i]/\langle\alpha\rangle$ حلقة منتهية. [مساعدة: استخدم خوارزمية القسمة].

ب. أثبت أنه إذا كان π غير مختزل في $\mathbb{Z}[i]$، فإنّ $\mathbb{Z}[i] / \langle\pi\rangle$ حقل.

جـ. بالرجوع إلى الجزء (ب)، أوجد رتبة وميِّز كل من الحقول الآتية:

i. $\mathbb{Z}[i] / \langle 3\rangle$ **ii.** $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + i\rangle$ **iii.** $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + 2i\rangle$

16. لتكن $n \in \mathbb{Z}^+$ حرّة من المربعات، أي أنها لا تقبل القسمة على مربع أيّ عدد أوّلي صحيح.

لتكن $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}\,] = \{a + ib\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

أ. أثبت أنّ المعيار N، المعرّف بـ $N(\alpha) = a^2 + nb^2$، لـ $\alpha = a + ib\sqrt{n}$ هو معيار ضربي على $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}\,]$.

ب. أثبت أنّ $N(\alpha) = 1$ لـ $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-n}\,]$ إذا وفقط إذا كان α عنصر وحدة في $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}\,]$.

جـ. أثبت أنّ كل عنصر غير صفري $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-n}\,]$ وبحيث إنّه ليس عنصر وحدة له تحليل إلى غير مختزلات في $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}\,]$. [مساعدة: استخدم الفرع (ب)].

17. أعد التمرين 16 لـ $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$، حيث N معرّفة بـ $N(\alpha) = a^2 - nb^2$ لـ $\alpha = a + b\sqrt{n}$ في $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,]$.

18. يُبيِّن ببناء مشابه لذلك الذي أُعطي في إثبات المبرهنة 4.47، أنَّ خوارزمية القسمة متحققة على الحلقة التامة $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}\,]$ لـ $\nu(\alpha) = N(\alpha)$ لغير صفري α في هذه الحلقة التامة. (انظر التمرين 16). (إذن، هذه الحلقة التامة إقليدية. انظر (Hardy and Wright [29] في مناقشتهما أيّ الحلقات التامة $\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,]$ و $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}\,]$ إقليدية).

الوحدة العاشرة

التماثلات الذاتية ومبرهنة جالوا
Automorphisms and Galois Theory

الفصل 48 التماثلات الذاتية للحقول Automorphisms of Fields

تماثلات الترافق في مبرهنة الحقول الجبرية

ليكن F حقلًا، وليكن $\overline{F}$ إغلاقًا جبريًا لـ F، أي امتداد جبري لـ F ومغلق جبريًا. فالحقل $\overline{F}$ موجود، بحسب المبرهنة 17.31، واختيارنا له محدد، وليس حاسمًا؛ وذلك – وكما سنرى في الفصل 49– لأنّ أيّ إغلاقين جبريين لـ F يكونان متماثلين باستخدام دالة تبقي F ثابتة، وسنفرض في عملنا من الآن فصاعدًا أنّ الامتدادات الجبرية والعناصر الجبرية على الحقل F قيد الدراسة كلها محتواة في إغلاق جبري ثابت $\overline{F}$ لـ F.

تذكر أننا نعمل على دراسة أصفار كثيرات الحدود، وباستخدام مصطلحات الفصل 31، دراسة أصفار كثيرات الحدود في $F[x]$ تعادل دراسة بناء الامتدادات الجبرية لـ F والعناصر الجبرية على F، وسنثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًا لـ F وكانت $\alpha, \beta \in E$، فإنّ لـ α وβ الخصائص الجبرية نفسها، إذا وفقط إذا كانت $\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F)$ سنصوغ هذه الحقيقة باستخدام الدوال – كما كنا نعمل دائمًا في مبرهنة الحقول – وسوف نحقق هذا من خلال إثبات أنه إذا كانت $\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F)$، فإنه يوجد تماثل $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ وغامر لـ $F(\beta)$، ويربط كل عنصر من F بنفسه، ويربط α بـ β. تعرض المبرهنة الآتية هذا التماثل $\psi_{\alpha,\beta}$، حيث ستصبح هذه التماثلات أدواتنا الأساسية في دراسة الامتدادات الجبرية، وهي تخلف تشاكلات التعويض ψ_α في المبرهنة 4.22، التي تجعل آخر مشاركاتها تعريف هذه التماثلات قبل النصّ على هذه المبرهنة وإثباتها، لنقدم المزيد من المصطلحات.

48.1 تعريف ليكن الحقل E امتدادًا جبريًا لـ F، حيث يقال عن العنصرين $\alpha, \beta \in E$: إنهما **مترافقان على** F (***Conjugate over F***) إذا كان $\operatorname{irr}(\alpha, F) = \operatorname{irr}(\beta, F)$– بمعنى أنّ α و β صفران لكثيرة الحدود نفسها غير المختزلة على F. ■

48.2 مثال مفهوم العناصر المترافقة الذي عرّف توًا يتوافق مع التعريف الكلاسيكي لفكرة الأعداد المركبة المترافقة، إذا فهمنا أنّ الأعداد المركبة المترافقة تعني عناصر مترافقة على $\mathbb{R}$، فإذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ و$b \neq 0$، فإنّ المترافقين $a + bi$ و$a - bi$ صفران لـ $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$، التي تكون غير مختزلة في $\mathbb{R}[x]$. ▲

48.3 مبرهنة (**تماثلات الترافق**): ليكن F حقلًا، ولتكن α وβ جبرية على F و $\deg(\alpha, F) = n$. تكون الدالة $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta)$ والمعرفة بـ:

$$\psi_{\alpha,\beta}(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) = c_0 + c_1\beta + \dots + c_{n-1}\beta^{n-1}$$

حيث $c_i \in F$ تماثل من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$ ، إذا وفقط إذا كانت α وβ مترافقتين على F.

البرهان افترض أنّ $\psi_{\alpha,\beta}: F(\alpha) \to F(\beta)$ المعرفة في نصّ المبرهنة تماثل. ليكن $\operatorname{irr}(\alpha, F) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$؛ إذن، $a_0 + a_1\alpha + \dots a_n\alpha^n = 0$، ما يعني أنّ

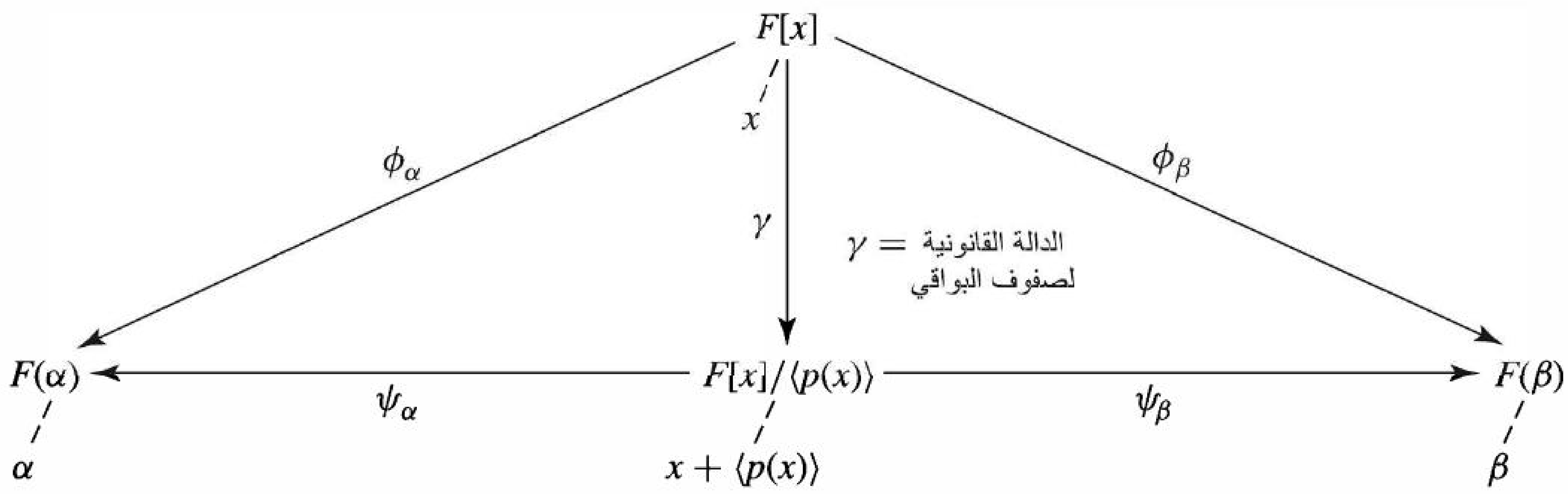
$$\psi_{\alpha,\beta}(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n) = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_n\beta^n = 0.$$

بحسب العبارة الأخيرة في نص المبرهنة 13.29، ينتج أنّ $\operatorname{irr}(\beta, F)$ تقسم $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ وبأسلوب مشابه باستخدام التماثل $(\psi_{\alpha,\beta})^{-1} = \psi_{\beta,\alpha}$ يتبيّن أنّ $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ تقسم $\operatorname{irr}(\beta, F)$، وهذا يؤدي – ولأن كثيرتي الحدود أحاديتان– إلى أنّ $\operatorname{irr}(\beta, F) = \operatorname{irr}(\alpha, F)$.

إذن، α و β مترافقان على F.

في المقابل، افترض أنّ $\mathrm{irr}(\alpha,F) = \mathrm{irr}(\beta,F) = p(x)$، هذا يؤدي إلى أن تشاكلي التعويض $\phi_\alpha: F[x] \longrightarrow F(\alpha)$ و $\phi_\beta: F[x] \longrightarrow F(\beta)$ لهما النواة نفسها $\langle p(x)\rangle$ بحسب المبرهنة 17.26 وبالرجوع إلى $\phi_\alpha : F[x] \longrightarrow F(\alpha)$ – يوجد تماثل طبيعي ψ_α يربط $F[x]/\langle p(x)\rangle$ بصورة غامرة بـ $\phi_\alpha[F[x]] = F(\alpha)$ وبالمثل، يعطي ϕ_β تماثلاً ψ_β يربط $F[x]/\langle p(x)\rangle$ بصورة غامرة بـ $F(\beta)$. ليكن $\psi_{\alpha,\beta} = \psi_\beta(\psi_\alpha)^{-1}$. يعطي الشكل 4.48 رسمًا توضيحيًّا لهذه الدوال، حيث تشير الخطوط المقطعة إلى العناصر المتقابلة في هذه الدوال، ولأنَّ تركيب تماثلين $\psi_{\alpha,\beta}$ هو أيضًا تماثل، ويربط $F(\alpha)$ بصورة غامرة بـ $F(\beta)$، فإذا كانت $(c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}) \in F(\alpha)$، فإنّ:

$$\begin{aligned}
&\psi_{\alpha,\beta}(c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1})\\
&\quad = \left(\psi_\beta \psi_\alpha{}^{-1}\right)(c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1})
\end{aligned}$$



الشكل 4.48

$$\begin{aligned}
&= \psi_\beta\left((c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}) + \langle p(x)\rangle\right)\\
&= c_0 + c_1\beta + \cdots + c_{n-1}\beta^{n-1}.
\end{aligned}$$

إذن، $\psi_{\alpha,B}$ هي الدالة المعرفة في نص المبرهنة. ◆

النتيجة الآتية للمبرهنة 3.48 هي حجر الزاوية في برهاننا لمبرهنة امتداد التماثلات المهمّة في الفصل 49 وفي معظم بقية عملنا.

5.48 نتيجة لتكن α جبرية على الحقل F. كل تماثل ψ يربط $F(\alpha)$ بصورة غامرة بحقل جزئي من $\overline{F}$ بحيث $\psi(a) = a$ لكل $a \in F$، فإنه يربط α بمرافق له β على F، وفي المقابل، لكل مرافق β لـ α على F، يوجد بالضبط تماثل واحد $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ وبصورة غامرة إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويربط α بـ β ويربط كل $a \in F$ بنفسه.

البرهان ليكن ψ تماثلاً من $F(\alpha)$ وبصورة غامرة إلى حقل جزئي من $\overline{F}$، بحيث إنّ $\psi(a) = a$ لكل $a \in F$. لتكن $\operatorname{irr}(\alpha,F) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$؛ إذن:

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0,$$

وهكذا ينتج

$$0 = \psi(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n) = a_0 + a_1\psi(\alpha) + \cdots + a_n\psi(\alpha)^n,$$

و $\beta = \psi(\alpha)$ مرافق لـ α.

في المقابل، لكل مرافق β لـ α على F، يكون تماثل الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ في المبرهنة 3.48 هو تماثل بالصفات المطلوبة؛ ولأن $\psi_{\alpha,\beta}$ هو التماثل الوحيد الذي ينتج من حقيقة أنّ أيّ تماثل على $F(\alpha)$ يتحدد تمامًا من قيمه على عناصر F وقيمته على α. ◆

وبوصفها نتيجة ثانية للمبرهنة 3.48، فيمكننا إثبات نتيجة مشهورة.

6.48 نتيجة لتكن $f(x) \in \mathbb{R}[x]$، فإذا كانت $f(a + bi) = 0$، حيث $(a + bi) \in \mathbb{C}$، و$a, b \in \mathbb{R}$، فإنّ $f(a - bi) = 0$ كذلك، وبصورة أكثر بساطة، الأصفار المركبة لكثيرات حدود ذات معاملات حقيقية تكون أزواجًا مترافقة.

البرهان رأينا أنّ $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$، الآن:

$$\operatorname{irr}(i,R) = \operatorname{irr}(-i,R) = x^2 + 1$$

إذن، i و$-i$ مترافقان على $\mathbb{R}$ بحسب المبرهنة 3.48، دالة الترافق $\psi_{i,-i}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

حيث $\psi_{i,-i}(a + bi) = a - bi$ تكون تماثلًا، وهكذا، فإذا كان $a_i \in \mathbb{R}$

$$f(a + bi) = a_0 + a_1(a + bi) + \cdots + a_n(a + bi)^n = 0$$

فإنه

$$0 = \psi_{i,-i}(f(a + bi)) = a_0 + a_1(a - bi) + \cdots + a_n(a - bi)^n$$
$$= f(a - bi),$$

بمعنى أنّ $f(a - bi) = 0$ كذلك. ◆

7.48 مثال افترض $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ على $\mathbb{Q}$. أصفار $\operatorname{irr}(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = x^2 - 2$ هي $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$، ما يعني أنّ $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ مترافقان على $\mathbb{Q}$. وبحسب المبرهنة 3.48 تكون الدالة $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ المعرّفة بـ

$$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

تماثلاً من $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ إلى نفسها. ▲

التماثلات الذاتية والحقول الثابتة

كما تم توضيحه في النتيجة والمثال السابقين، يمكن أن يكون للحقل تماثل غير بدهي مع نفسه. هذه الدوال ستكون ذات أهمية قصوى في العمل المقبل.

8.48 تعريف التماثل من الحقل إلى نفسه يسمى تماثلًا ذاتيًا للحقول (***automorphism of fields***). ■

9.48 تعريف إذا كانت σ تماثلًا من الحقل E إلى أيّ حقل، فيسمى العنصر a من E **متروكًا ثابتًا (*left Fixed*)** بـ σ، إذا كان $\sigma(a)= a$، مجموعة التماثلات S على E، **التي تترك الحقل الجزئي F من E ثابتًا (*leaves a subfield F of E fixed*)**، إذا كان كل $a \in F$ متروكًا ثابتًا بكل $\sigma \in S$. إذا كانت $\{\sigma\}$ **تترك F ثابتًا**، فإن σ **تترك F ثابتًا (*leaves F fixed*)**. ■

10.48 مثال ليكن $E= \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ الدالة $\sigma: E \to E$ المعرفة بـ

$$\sigma\left(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\right)=a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6}$$

حيث $a, b, c,d \in \mathbb{Q}$ تكون تماثلًا ذاتيًا على E؛ إنها تماثل الترافق $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ من E إلى نفسها. إذا تصورنا E على الصورة $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\right)(\sqrt{3})$، فسوف نرى أنّ σ تترك $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ثابتًا. ▲

هدفنا دراسة بنية التمدد الجبري E للحقل F من خلال دراسة التماثلات الذاتية على E، التي تترك كل عنصر في F ثابتًا، وسنثبت في الوقت الحاضر أنّ هذه التماثلات تشكل زمرة بطريقة طبيعية، ثم بعد ذلك سنطبق هذه النتائج الخاصة ببنية الزمرة للحصول على معلومات عن بنية امتداد الحقول؛ إذن، الكثير من عملنا السابق سيجمع الآن معًا، والمبرهنات الثلاث اللاحقة تبرهن بسهولة، ولكن الأفكار المحتواة فيها تمثل الأساس لكل شيء قادم؛ لذلك، فهذه المبرهنات ذات أهمية بالغة لنا، إنها في الحقيقة تعادل ملاحظات أكثر منها مبرهنات، والمهم هو الأفكار التي تحويها، فالخطوات الكبيرة في الرياضيات ليست دائمًا مكوّنة من مبرهنات صعبة، بل من الممكن أن تتكوّن من ملاحظة كيف أنّ معلومات رياضية معروفة قد توصل إلى مواقف جديدة، سنحضر هنا مبرهنة الزمر لدراسة أصفار كثيرات الحدود، وحاول أن تتأكد من فهمك لهذه الأفكار، حيث إنها المفتاح لحل هدفنا النهائي في هذا الكتاب، وذلك بخلاف ما يبدو.

الهدف النهائي (سيتمّ النصّ عليه بدقة لاحقًا): إثبات أنه ليست الأصفار كلها لأيّ كثيرة حدود من الدرجة الخامسة $f(x)$، يمكن التعبير عنها باستخدام الجذور بدءًا بعناصر من الحقل الذي يحوي معاملات $f(x)$.

نبذة تاريخية

كان ريتشارد ديدكند (*Richard Dedekind*) أول من طوّر فكرة التماثلات الذاتية للحقول – التي أطلق عليها " تباديل الحقول " – عام 1894م، وكان التطبيق المبكر لمبرهنة الزمر في مبرهنة المعادلات من خلال زمر التباديل لجذور كثيرات حدود خاصة، وقد عمم ديدكند هذه الفكرة إلى دوال على كامل الحقل، وأثبت كثيرًا من مبرهنات هذا الفصل.

على الرغم من أنّ هنريك ويبر (*Heinrich Weber*) أكمل طريقة ديدكند إلى زمر التأثير في الحقول في كتابه في الجبر عام 1895م، إلّا أنّ هذه الطريقة لم تتابع في كتب أخرى إلى عام 1920 – بعد أن أصبحت معالجة إيمي نوثير (*Emmy Noether*) المجردة للجبر مؤثرة في جامعة جوتنجن – حيث طوّر إميل آرتن (1898- 1962 *Emil Artin*) هذه العلاقة بين الزمر والحقول بكثير من التفصيل، وقد أكد آرتن أنّ الهدف مما أصبح يعرف الآن بمبرهنة جالوا ليس تحديد شروط الحل للمعادلات الجبرية، بل اكتشاف العلاقة بين امتدادات الحقول وزمرة التماثلات الذاتية، لقد فصّل آرتن طريقته في محاضرة أعطيت عام 1926م؛ ونشرت مقاربته أول مرة عن طريق ب. ل. فان دير واردن (*B. L. Van der Waerden*) في كتابه الجبر الحديث (*Modern Algebra*) عام 1930م، ثمّ نشرها آرتن نفسه في ملخص محاضرات في العامين 1938م و 1942م. في الواقع، بقية هذا الكتاب مبنية على تطوير آرتن لمبرهنة جالوا.

إذا كانت $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ مجموعة من التماثلات الذاتية للحقل E، فإنّ العناصر في E التي تعطي $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ أقل قدر من المعلومات هي $a \in E$ المتروكة ثابتة من كل σ_i حيث $i \in I$، وأول مبرهناتنا الثلاث تقريبًا تحوي معظم ما يمكن قوله عن هذه العناصر الثابتة في E.

11.48 مبرهنة لتكن $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ مجموعة من التماثلات الذاتية على الحقل E، فتكون المجموعة $E_{\{\sigma i\}}$ المؤلفة من العناصر جميعها $a \in E$ المتروكة ثابتة بكل σ_i، $i \in I$، حقلاً جزئيًا من E.

البرهان إذا كانت $\sigma_i(a) = a$ و $\sigma_i(b) = b$ لكل $i \in I$، فإنّ:

$$\sigma_i(a \pm b) = \sigma_i(a) \pm \sigma_i(b) = a \pm b$$

و $$\sigma_i(ab) = \sigma_i(a)\sigma_i(b) = ab$$

لكل $i \in I$، كذلك إذا كانت $b \neq 0$ ، فإنّ:

$$\sigma_i(a/b) = \sigma_i(a) / \sigma_i(b) = a/b$$

لكل $i \in I$، ولأنّ σ_i تماثل ذاتي، فنحصل على

$$\sigma_i(1) = 1 \qquad \text{و} \qquad \sigma_i(0) = 0$$

لكل $i \in I$؛ إذن، $0, 1 \in E_{\{\sigma i\}}$ ، ما يعني أنّ $E_{\{\sigma\}}$ حقل جزئي من E. ♦

12.48 تعريف يسمى الحقل $E_{\{\sigma i\}}$ في المبرهنة 11.48 **الحقل الثابت** لـ $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ (**fixed field**). سوف نشير في حالة التماثل الذاتي الوحيد σ، إلى $E_{\{\sigma\}}$ بـ الحقل الثابت بـ σ (***fixed field of*** σ) . ■

13.48 مثال ليكن التماثل الذاتي $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ المعطى في المثال 7.48، فإذا كانت $a, b \in \mathbb{Q}$، فإنّ

$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$ و $a-b\sqrt{2} = a+b\sqrt{2}$، إذا وفقط إذا كانت $b = 0$؛ إذن، الحقل الثابت بـ $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ هو $\mathbb{Q}$. ▲

لاحظ أنّ أيّ تماثل ذاتي للحقل E هو بصورة خاصة دالة أحادية وغامرة من E إلى E، أي إنها تباديل على E. إذا كانت σ وτ تماثلين ذاتيين على E، فإنّ التبديلة $\sigma\,\tau$ هي كذلك تماثل ذاتي على E؛ لأنّ – وبوجه عام – تركيب تشاكلين يعطي تشاكلًا. هكذا تصنع مبرهنة الزمر المدخل للموضوع.

14.48 مبرهنة مجموعة التماثلات الذاتية كلها المعرفة على الحقل E تكون زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب الدوال.

البرهان ضرب التماثلات الذاتية على E معرّف بوصفه تركيب الدوال، وهكذا، فإنه تجميعي (إنه ضرب التباديل). التبديلة المحايدة $i : E \to E$ المعرفة بالقاعدة $i\,(\alpha) = \alpha$ لكل $\alpha \in E$ تكون تماثلًا ذاتيًا على E، فإذا كانت σ تماثلًا ذاتيًا، فإنّ التبديلة σ^{-1} هي كذلك تماثل ذاتي؛ إذن، تشكل مجموعة التماثلات الذاتية كلها المعرفة على E زمرة جزئية من S_E، زمرة التباديل جميعها المعرفة على E المعطاة في المبرهنة 5.8. ♦

15.48 مبرهنة ليكن E حقلًا، وليكن F حقلًا جزئيًا من E. تشكل المجموعة – $G\,(E\,/\,F)$ المكونة من التماثلات الذاتية جميعها على E ، التي تترك F ثابتة – زمرة جزئية من زمرة التماثلات الذاتية جميعها على E. إضافة إلى ذلك $F \leq E_{G(E/F)}$.

البرهان إذا كانت $\sigma, \tau \in G(E/F)$ و$a \in F$، فإنّ

$$(\sigma\,\tau)(a) = \sigma\,(\tau(a)) = \sigma\,(a) = a$$

إذن، $\sigma\,\tau \in G(E/F)$، بالطبع، فإن التماثل الذاتي المحايد i عنصر في $G\,(E/F)$. وكذلك، فإن كان $\sigma\,(a) = a$ حيث $a \in F$، فإنّ $a = \sigma^{-1}\,(a)$؛ إذن، $\sigma \in G\,(E\,/F)$ يؤدي إلى $\sigma^{-1} \in G\,(E/\,F)$.

إذن، $G\,(E\,/F)$ زمرة جزئية من زمرة التماثلات الذاتية على E.

لأنَّ كل عنصر في F يترك ثابتًا بكل عنصر في $G\,(E/\,F)$، فينتج مباشرة أنّ الحقل $E_{G(E/F)}$ المكوّن من عناصر E جميعها المتروكة ثابتة بـ $G\,(E\,/\,F)$ تحوي F. ♦

16.48 تعريف تسمى الزمرة $G\,(E\,/\,F)$ في المبرهنة السابقة **زمرة التماثلات الذاتية على E التي تترك F ثابتًا (*group of automorphisms of E leaving F fixed*)**، أو باختصار **زمرة E على F (*group of E over F*)**.

لا تفكر في $E\,/F$ في الرمز $G\,(E\,/F)$ بوصفه مؤشرًا على فضاء خارج قسمة من نوع ما، بل بالأحرى إنه يعني أنّ E حقل امتداد للحقل F.

ستُوضَّح الأفكار المحتواة في المبرهنات الثلاث السابقة في المثال الآتي، ويجب أن تدرس هذا المثال بعناية. ■

17.48 مثال افترض الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. أظهر المثال 9.31 أن $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=4$، وإذا نظرنا إلى $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على الصورة $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))(\sqrt{2})$، فإن تماثل الترافق $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ من المبرهنة 3.48 المعرّف بـ

$$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\left(a+b\sqrt{2}\right)=a-b\sqrt{2}$$

حيث $a,b\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$، يشكل تماثلًا ذاتيًا على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$، ويترك الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ثابتًا. وبالمثل، فإنّ التماثل الذاتي $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ على $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ يترك الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ثابتًا، ولأنَّ ضرب تماثلين ذاتيين يعطي تماثلًا ذاتيًا، فيمكن اعتبار $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ الذي يحرك كلًّا من $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$، أي لا يثبّت أيًّا من العددين.

ليكن تماثل العنصر المحايد $=\iota$

$$\sigma_1=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$$

$$\sigma_2=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$$

$$\sigma_3=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$$

لزمرة التماثلات الذاتية كلها على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ حقلًا ثابتًا، فبحسب المبرهنة 11.48، يجب أن يحوي هذا الحقل $\mathbb{Q}$؛ لأن كل تماثل ذاتي يجب أن يترك 1 ثابتًا، ويؤدي هذا إلى أن يكون الحقل الجزئي الأولي ثابتًا. أساس $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$ هو $\left\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right\}$ لأن

$\sigma_1\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}, \sigma_1\left(\sqrt{6}\right)=-\sqrt{6}$ و $\sigma_2\left(\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3},$ ، فإننا نرى أنّ $\mathbb{Q}$ هو بالضبط الحقل الثابت لـ $\left\{\iota,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right\}$ ، ومن السهل التحقق أنّ $G=\left\{\iota,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right\}$ تشكل زمرة بالنسبة إلى ضرب التماثلات الذاتية (تركيب الدوال). جدول الزمرة G معطًى في الجدول 18.48، على سبيل المثال:

$$\sigma_1\sigma_3=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\left(\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}\right)=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}=\sigma_2$$

الجدول 18.48

	ι	σ_1	σ_2	σ_3
ι	ι	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	ι	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	ι	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	ι

الزمرة G تماثل زمرة كلاين الرباعية ($Klein$ 4- $group$)، ويمكننا إثبات أنّ G هي كامل الزمرة $\mathbb{G}\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q})$؛ لأن كل تماثل ذاتي τ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ يقرن $\sqrt{2}$ بـ $\pm\sqrt{2}$ بحسب النتيجة 5.48، وبالمثل يقرن τ $\sqrt{3}$ بـ $\pm\sqrt{3}$، ولأنَّ $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}\right\}$ أساس لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$، فإنّ أيّ تماثل ذاتي على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ويبقي $\mathbb{Q}$ ثابتة، يحدد بقيمه على $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$.

الآن، i، σ_1، σ_2، σ_3 تعطي التراكيب جميعها الممكنة لصور $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$، وإذن، فهي التماثلات الذاتية كلها الممكنة على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

لاحظ أنّ $G\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}\right)$ من الرتبة 4، و $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right]=4$ فهذه ليست مصادفة، بل هي حالة من الظاهرة العامة، كما سنرى لاحقًا. ▲

التماثل الذاتي لفروبينس

ليكن F حقلًا منتهيًا، سنرى لاحقًا أنّ زمرة التماثلات الذاتية على F جميعها دورية. الآن، وبحسب التعريف، فإنّ للزمرة الدورية مولدًا، ويمكن أن تكون لها مولدات عدة، بالنسبة إلى الزمرة الدورية المجردة، ولا توجد طريقة لجعل أحد المولدات أكثر أهمية من الأخريات. على أيّ حال، بالنسبة إلى الزمرة الدورية للتماثلات الذاتية جميعها لحقل منته، فيوجد مولد قانوني (طبيعي) هو التماثل الذاتي لفروبينس (بصورة كلاسيكية تعويض فروبينِس). هذه الحقيقة ذات أهمية كبيرة في بعض العمل المتقدم في الجبر.
تقدم المبرهنة الآتية التماثل الذاتي لفروبينس.

19.48 مبرهنة ليكن F حقلًا منتهيًا ذا مميز p. تكون الدالة $\sigma_p : F \to F$ المعرّفة بـ $\sigma_P(a)= a^p$ لكل $a \in F$ تماثلًا ذاتيًا – التماثل الذاتي لفروبينس – على F. وكذلك فإنّ $F_{\{\sigma p\}} \simeq \mathbb{Z}_p$.

البرهان لتكن $a, b\in F$. خذ $n=1$ في التمهيدية 9.33، فسنرى أنّ $(a + b)^p = a^p + b^p$. إذن:

$$\sigma_p(a + b) = (a + b)^p = a^p + b^p = \sigma_p(a) + \sigma_p(b)$$

وبالطبع:

$$\sigma_p(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \sigma_p(a)\sigma_p(b),$$

إذن، σ_P على الأقل تشاكل، فإذا كان $\sigma_P(a)=0$، فإنّ $a^P = 0$، وهكذا $a=0$؛ إذن، نواة σ_P هي $\{0\}$، ما يعني أنّ σ_P دالة أحادية. أخيرًا؛ لأن F منتهية، فإنّ σ_P وباستخدام العد غامرة، وهكذا فإنّ σ_P تماثل ذاتي على F.
يجب أن يكون الحقل الأولي $\mathbb{Z}_p$ (تبعًا للتماثل) محتوًى في F؛ لأن F ذو مميز p. وإذا كانت $c\in \mathbb{Z}_p$، فإنّ $\sigma_p(c)=c^p=c$ بحسب مبرهنة فيرما (انظر النتيجة 2.20)؛ إذن، كثيرة الحدود $x^P - x$ لها p من الأصفار في F، عناصر $\mathbb{Z}_p$ تحديدًا، وبحسب النتيجة 5.23، فإنّ أيّ كثيرة حدود من الدرجة n على حقل لها على الأكثر n من الأصفار في الحقل. لأنَّ العناصر الثابتة بـ σ_P هي تحديدًا أصفار $x^P - x$ في F، نرى أنّ

$$Z_p = F_{\{\sigma p\}}$$ ◆

يخطئ الطالب الساذج أحيانًا عندما يقول: $(a+b)^n = a^n + b^n$. نرى هنا أنّ أسس الطالب الساذج، $(a+b)^P = a^P + b^P$ مع الأس p، متحققة في حقل F ذي مميز p.

■ تمارين 48

حسابات

في التمارين من 1 إلى 8، أوجد المرافقات جميعها في $\mathbb{C}$ للأعداد المعطاة على الحقول:

.1 $\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$
.2 $\sqrt{2}$ على $\mathbb{R}$
.3 $3+\sqrt{2}$ على $\mathbb{Q}$
.4 $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ على $\mathbb{Q}$
.5 $\sqrt{2}+i$ على $\mathbb{Q}$
.6 $\sqrt{2}+i$ على $\mathbb{R}$
.7 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}$
.8 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

في التمارين من 9 إلى 14، سنفترض الحقل $E=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\right)$، من الممكن إثبات أنّ $[E:\mathbb{Q}]=8$

باستخدام المصطلحات في المبرهنة 3.48، ينتج لدينا تماثلات الترافق الآتية (التي هي هنا تماثلات ذاتية على E):

$$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}:(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}))(\sqrt{2})\to(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}))(-\sqrt{2}),$$
$$\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}:(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}))(\sqrt{3})\to(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}))(-\sqrt{3}),$$
$$\psi_{\sqrt{5},-\sqrt{5}}:(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}))(\sqrt{5})\to(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}))(-\sqrt{5}).$$

باستخدام ترميز مختصر، لتكن $\tau_2=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$، $\tau_3=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ و $\tau_5=\psi_{\sqrt{5},-\sqrt{5}}$ احسب العنصر المشار إليه في E.

.9 $\tau_2\left(\sqrt{3}\right)$
.10 $\tau_2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$
.11 $\left(\tau_3\tau_2\right)\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)$
.12 $\left(\tau_5\tau_3\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$
.13 $\left(\tau_5^2\tau_3\tau_2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{45}\right)$
.14 $\tau_3\left[\tau_5(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\left(\tau_2\tau_5\right)(\sqrt{30}))\right]$

.15 بالرجوع إلى المثال 17.48، أوجد الحقول الثابتة في $E=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

أ. $E_{\{\sigma1,\sigma3\}}$ ب. $E_{\{\sigma3\}}$ جـ. $E_{\{\sigma2,\sigma3\}}$

في التمارين من 16 إلى 21، ارجع إلى تعليمات التمارين من 9 إلى 14 وأوجد الحقل الثابت لكل تماثل ذاتي أو مجموعة تماثلات ذاتية على E.

.16 τ_3
.17 τ_3^2
.18 $\{\tau_2,\tau_3\}$
.19 $\tau_5\tau_2$
.20 $\tau_5\tau_3\tau_2$
.21 $\{\tau_2,\tau_3,\tau_5\}$

.22 ارجع إلى تعليمات التمارين من 9 إلى 14 في هذا التمرين.

أ. أثبت أنّ التماثلات الذاتية جميعها τ_2، τ_3، و τ_5 من الرتبة 2 في $G(E/\mathbb{Q})$. (تذكر ماذا تعني رتبة العنصر في الزمرة).

ب. أوجد الزمرة الجزئية H من $G(E/\mathbb{Q})$ المولدة من العناصر τ_2، τ_3، و τ_5، وأوجد جدول هذه الزمرة. [مساعدة: يوجد ثمانية عناصر].

جـ. تمامًا كما فُعل في المثال 17.48، ناقش كيف أنّ H في الفرع (ب) هي كل الزمرة $G(E/\mathbb{Q})$.

مفاهيم

في التمرينين 23 و24، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

.23 يكون العنصران α وβ، في الامتداد الجبري E على الحقل F مترافقين على F، إذا وفقط إذا كانا صفرين لكثيرة الحدود نفسها $f(x)$ في $F[x]$.

.24 يكون العنصران α وβ، في الامتداد الجبري E على الحقل F مترافقين على F ، إذا وفقط إذا كان لتشاكلي التعويض $\phi_\alpha : F[x] \to E$ و $\phi_\beta : F[x] \to E$ النواة نفسها.

.25 الحقلان $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ و$\mathbb{Q}(3+\sqrt{2})$ متساويان بالطبع. لتكن $\alpha = 3+\sqrt{2}$.

أ. أوجد مرافق $\beta \neq \alpha$ لـ α على $\mathbb{Q}$.

ب. بالرجوع إلى الفرع (أ)، قارن بين تماثل الترافق الذاتي $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ وتماثل الترافق الذاتي $\psi_{\alpha,\beta}$.

.26 أوجد قيمة تماثل فروبينس الذاتي σ_2 على كل عنصر في الحقل المنتهي من أربعة عناصر المعطى في المثال 19.29. أوجد الحقل الثابت لـ σ_2.

.27 أوجد قيمة تماثل فروبينس الذاتي σ_3 على كل عنصر في الحقل المنتهي من تسعة عناصر المعطى في التمرين 18 في الفصل 29. أوجد الحقل الثابت لـ σ_3.

.28 ليكن F حقلاً ذا مميز $p \neq 0$. أعط مثالًا يبين أنّ الدالة $\sigma_p : F \to F$ المعرفة بـ $\sigma_p(a) = a^p$ ، حيث $a \in F$ ليست بالضرورة تماثلًا ذاتيًّا إذا كان F غير منتهٍ. ما الخطأ الذي يمكن أن يحدث؟

.29 ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. لكل $\alpha, \beta \in E$، يوجد دائمًا تماثل ذاتي على E يربط α بـ β.

________ ب. لكل α, β جبريان على الحقل F، يوجد دائمًا تماثل من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$.

________ جـ. لكل α, β جبريان ومترافقان على الحقل F، يوجد دائمًا تماثل من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$.

________ د. كل تماثل ذاتي لأيّ حقل E، يترك كل عنصر في الحقل الجزئي الأولي لـ E ثابتًا.

________ هـ. كل تماثل ذاتيّ لأيّ حقل E ، يترك عددًا لا نهائيًّا من عناصر E ثابتة.

________ و. كل تماثل ذاتيّ لأيّ حقل E، يترك على الأقل عنصرين ثابتين في E.

________ ز. كل تماثل ذاتيّ لأيّ حقل E ذا مميز 0، يترك عددًا لا نهائيًّا من عناصر E ثابتة.

________ ح. التماثلات الذاتية كلها لحقل E تشكل زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب الدوال.

________ ط. مجموعة عناصر حقل E التي تركت ثابتة بتماثل ذاتي واحد على E تشكل حقلًا جزئيًّا من E.

________ ي. للحقول $F \leq E \leq K$، $G(K/E) \leq G(K/F)$.

براهين مختصرة

30. أعطِ برهـانًا مختصرًا من جملة واحدة لجزء «إذا كان» في المبرهنة 3.48.

31. أعطِ برهـانًا مختصرًا من جملة واحدة لجزء «وفقط إذا كان» في المبرهنة 3.48.

براهين

32. لتكن α جبرية من الدرجة n على F. أثبت – باستخدام النتيجة 5.48 – أنه يوجد على الأكثر n من التماثلات المختلفة من $F(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ تاركة F ثابتة.

33. ليكن $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ امتدادًا للحقل F. أثبت أنّ أيّ تماثل ذاتي σ على $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ويترك F ثابتة، يتحدد تمامًا بـ ألـ n قيمة لـ $\sigma(\alpha_i)$.

34. ليكن E امتدادًا جبريًّا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا ذاتيًّا على E ويترك F ثابتة. لتكن $\alpha \in E$. أثبت أنّ σ تنتج تباديل على أصفار $irr\ (\alpha, F)$ الموجودة في E.

35. ليكن E امتدادًا جبريًّا للحقل F. لتكن $S = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ مجموعة من التماثلات الذاتية على E، بحيث إنّ كل σ_i تترك عناصر F كلها ثابتة. أثبت أنه إذا كانت S تولد زمرة جزئية H من $G\ (E/F)$ ، فإنّ $E_S = E_H$.

36. رأينا في النتيجة 17.23 أنّ كثيرة الحدود الدورية:

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ لكل عدد أولي p. ليكن ζ صفرًا لـ $\Phi_p(x)$، وافترض الحقل $\mathbb{Q}(\zeta)$.

أ. أثبت أنّ $\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{p-1}$ أصفار مختلفة لـ $\Phi_p(x)$، واستنتج أنها أصفار $\Phi_p(x)$ جميعها.

ب. استنتج من النتيجة 5.48 ومن الفرع (أ) في هذا التمرين أنّ $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ تبديلية من الرتبة $p - 1$.

جـ. أثبت أنّ $\mathbb{Q}$ هو الحقل الثابت لـ $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$. [مساعدة: أثبت أنّ $\{\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{p-1}\}$ أساس لـ $\mathbb{Q}(\zeta)$ على $\mathbb{Q}$، ثم عيّن أيًّا من التراكيب الخطية لـ $\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{p-1}$ تبقى ثابتة مع عناصر $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ كلها.

37. تصف المبرهنة 3.48 تماثلات الترافق في حال كانت α و β عناصر جبرية مترافقة على F. هل يوجد تماثل مشابه بين $F(\beta)$ و $F(\alpha)$ عندما يكون كل من α و β متسامين على F؟

38. ليكن F حقلًا، وليكن x أيّ غير معين على F. أوجد التماثلات الذاتية على $F(x)$ كلها التي تترك F ثابتة من خلال وصف قيمها على x.

39. أثبت سلسلة المبرهنات الآتية:

أ. يحمل التماثل الذاتي على E مربعات عناصر في E إلى عناصر هي مربعات لعناصر في E.

ب. يحمل التماثل الذاتي على $\mathbb{R}$ الأعداد الموجبة إلى أعداد موجبة.

جـ. إذا كانت σ تماثلًا ذاتيًّا على $\mathbb{R}$ و $a < b$، حيث $a, b \in \mathbb{R}$، فإنّ $\sigma(a) < \sigma(b)$.

د. التماثل الذاتي الوحيد على $\mathbb{R}$ هو التماثل الذاتي المحايد.

الفصل 49 مبرهنة تمديد التماثل The Isomorphism Extension Theorem

مبرهنة التمديد

لنكمل دراسة التماثلات الذاتية للحقل. في هذا الفصل الذي يليه، سنكون مهمتين بإثبات وجود تماثلات ذاتية على حقل E وعددها.

افترض أنّ E امتداد جبري لـ F، ونريد أن نجد بعض التماثلات على E. نعرف من المبرهنة 3.48 أنه إذا كانت $\alpha, \beta \in E$ مترافقتين على F، فإنه يوجد تماثل $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$. بالطبع $\alpha, \beta \in E$ يؤدي إلى أنّ كلا $F(\alpha) \leq E$ و$F(\beta) \leq E$. من الطبيعي أن نتساءل ما إذا كان مجال تعريف $\psi_{\alpha,\beta}$ يمكن تكبيره من $F(\alpha)$ إلى حقل أكبر، وربما كل E، وما إذا أدّى هذا إلى تماثل ذاتي على E. رسم بياني لهذه الدوال في هذه الحالة معروض في الشكل 1.49. عوضًا عن الحديث عن «تكبير مجال تعريف $\psi_{\alpha,\beta}$،

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{F} \arrow[d, dash] \\
E \arrow[r, "?"] \arrow[d, dash] & E \arrow[d, dash] \\
F(\alpha) \arrow[r, "\psi\alpha\beta"] & F(\beta)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \overline{F}' \arrow[d, dash] \\
E \arrow[r, "\tau = ?"] \arrow[d, dash] & \tau[E] \arrow[d, dash] \\
F \arrow[r, "\sigma"] & F'
\end{tikzcd}$$

الشكل 1.49 الشكل 2.49

من المألوف الحديث عن «**تمديد الدالة** $\psi_{\alpha,\beta}$ **إلى الدالة** τ»، التي هي دالة معرفة على E كلها.

تذكر أننا دائمًا نفترض أنّ الامتدادات الجبرية قيد الدراسة جميعها محتواة في إغلاق جبري محدد $\overline{F}$ لـ F. تثبت مبرهنة تمديد التماثل أنّ الدالة $\psi_{\alpha,\beta}$ يمكن تمديدها دائمًا إلى تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$. والسؤال: ما إذا كان هذا التمديد يعطي تماثلًا ذاتيًا على E، بمعنى تربط E بنفسها؟ هو سؤال سندرسه في الفصل 50.

تضمن مبرهنة التمديد هذه وباستخدام تماثل الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ وجود كثير من دوال التماثل، على الأقل لكثير من الحقول، إذ إنّ مبرهنات التمديد مهمّة جدًّا في الرياضيات، وخاصة في الجبر والطبولوجيا.

لنأخذ نظرة أكثر شمولًا لهذه الحالة. افترض أنّ E امتداد جبري للحقل F، وأنّ لدينا تماثل σ من F غامرًا للحقل F'، وليكن $\overline{F}'$ الإغلاق الجبري لـ F'. نرغب في تمديد σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}'$، حيث يعرض هذا الوضع ببساطة في الشكل 2.49، سنختار $\alpha \in E$ ولكن ليست في F، ونحاول تمديد σ إلى $F(\alpha)$. إذا كان:

$$p(x) = \operatorname{irr}(\alpha, F) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

ليكن β صفرًا في $\overline{F}'$ لـ

$$q(x) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + \cdots + \sigma(a_n)x^n.$$

هنا $q(x) \in F'[x]$. نعلم أنّ $q(x)$ غير مختزلة في $F'[x]$ ؛ لأن σ تماثل، فيبدو منطقيًا أنه يمكن ربط $F(\alpha)$ بتماثل غامر مع $F(\beta)$ بدالة تمديد σ وتربط α بـ β، (هذه ليست تمامًا المبرهنة 3.48، ولكنها قريبة منها، وقد غُيّرت أسماء بعض العناصر باستخدام σ)، فإذا كانت $F(\alpha)= E$ فقد انتهينا، أمّا إذا كانت $F(\alpha) \neq E$، فعلينا أن نجد عنصرًا آخر في E وليس في $F(\alpha)$، ونكمل العملية، إنه موقف شبيه جدًا ببناء الإغلاق الجبري $\overline{F}$ لـ F، ومرة أخرى المشكلة بوجه عام، عندما لا يكون E امتدادًا منتهيًا، فالعملية يمكن أن تكرر (من المحتمل الكثير) عددًا لا نهائيًا من المرات، وسنحتاج إلى بدهية زورن لمعالجتها، ولهذا السبب، سنؤجل إثبات المبرهنة 3.49 إلى نهاية هذا الفصل.

3.49 مبرهنة **(مبرهنة تمديد التماثل)**: ليكن E امتدادًا جبريًا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا من F وبصورة غامرة إلى الحقل F'. ليكن $\overline{F'}$ الإغلاق الجبري لـ F'.

يمكن تمديد σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، بحيث $\tau(a) = \sigma(a)$ لكل $a \in F$.

وبوصفها نتيجة إثبات، سوف نجد تمديدًا لأحد تماثلات الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ كما ذكر في بداية هذا الفصل.

4.49 نتيجة إذا كان $\overline{F} \geq E$ امتدادًا جبريًا لـ F و $\alpha, \beta \in E$ مترافقة على F، فيمكن تمديد تماثل الترافق $\psi_{\alpha,\beta}: F(\alpha) \to F(\beta)$ – المعطى في المبرهنة 3.48 – إلى تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$.

البرهان ينتج إثبات هذه النتيجة مباشرة من المبرهنة 3.49، إذا استبدلنا في نصّ المبرهنة $F(\alpha)$ بـ F، $F(\beta)$ بـ $\overline{F}$، و $\overline{F}$ بـ $\overline{F'}$. ♦

بوصفها نتيجة أخرى، يمكننا إثبات – كما وعدنا سابقًا – أنّ الإغلاق الجبري لـ F وحيد، تبعًا لتماثل يترك F ثابتة.

5.49 نتيجة ليكن $\overline{F}$ و $\overline{F'}$ إغلاقين جبريين لـ F. إن $\overline{F}$ يماثل $\overline{F'}$ بتأثير تماثل يترك كل عنصر في F ثابتًا.

البرهان بحسب المبرهنة 3.49 فإنّ التماثل المحايد من F إلى F يمكن تمديده إلى تماثل τ يربط $\overline{F}$ بحقل جزئي من $\overline{F'}$ ويترك F ثابتًا. (انظر الشكل 6.49) نحتاج فقط إلى إثبات أنّ τ غامر لـ $\overline{F'}$، ولكن بحسب المبرهنة 3.49، فإنّ الدالة يمكن تمديدها إلى تماثل من $\overline{F'}$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$، ولأنّ τ^{-1} بالتأكيد غامرة لـ $\overline{F}$، فيجب أن تكون $\tau[\overline{F}] = \overline{F'}$. ♦

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{F'} \arrow[d, dash] \\
\overline{F} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dash] & \tau[\overline{F}] \arrow[d, dash] \\
F \arrow[r, "e"] & F
\end{tikzcd}
$$

الشكل 6.49

دليل امتداد الحقل

بعد مناقشتنا لسؤال الوجود، ننتقل الآن للسؤال عن العدد. لامتداد منتهٍ E للحقل F، نود أن نحصي عدد التماثلات من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ التي تترك F ثابتة، سنثبت وجود عددٍ منتهٍ من التماثلات، ولأنّ أنّ كل تماثل ذاتي في $G(E/F)$ هو أحد هذه التماثلات، فإنّ إحصاءَ هذه التماثلات سيتضمن التماثلات الذاتية، وقد أثبت المثال 17.48 أنّ $G(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ يحوي أربعة عناصر و $[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}]=4$ ، فعلى الرغم من أنّ هذه المعادلة ليست دائمًا صحيحة، إلّا أنها صحيحة في حالة مهمّة جدًّا، وتأخذ المبرهنة الآتية أول خطوة كبيرة في برهان ذلك، وسنذكر نصّ المبرهنة بصورة أكثر عمومية ما سنحتاج إليه، ولكنها لن تجعل البرهان أكثر صعوبة.

7.49 مبرهنة ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا من F إلى حقل جزئي من F'، وليكن $\overline{F'}$ الإغلاق الجبري لـ F'. إن عدد التمديدات لـ σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$ منتهٍ ومستقل عن F' ، $\overline{F'}$ و σ. بمعنى أنّ عدد التمديدات يحدد تمامًا من الحلقين E و F؛ فهو جوهري لهما.

البرهان ربما يساعدنا الرسم في الشكل 8.49 على تتبع الإنشاء الذي سنصنعه، إذ إن هذا الرسم يصنع كما يأتي: افترض تماثلين

$$\sigma_2 : F \xrightarrow{\text{غامر}} F'_2,\ \ \sigma_1 : F \xrightarrow{\text{غامر}} F'_1,$$

حيث $\overline{F_1}'$ و $\overline{F_2}'$ إغلاقان جبريان لـ F'_1 و F'_2 على الترتيب. الآن $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ تماثل من F'_1 غامر لـ F'_2؛ إذن. وبحسب المبرهنة 3.49 والنتيجة 5.49 يوجد تماثل

$$\lambda : \overline{F'_1} \xrightarrow{\text{غامر}} \overline{F'_2}$$

يمدد التماثل $F_1' \xrightarrow{\text{غامر}} F_2'$: $\sigma_2\sigma_1^{-1}$ ، وبالرجوع إلى الشكل 8.49 ومطابقة كل من $\tau_1 : E \to \overline{F}'_1$
التي تمدد σ_1 نحصل على تماثل $\tau_2 : E \to \overline{F}'_2$
بالبدء بـ E والذهاب أولًا إلى اليسار، ثم إلى أعلى، ثم إلى اليمين. وبالكتابة جبريًّا

$$\tau_2(\alpha) = (\lambda\tau_1)(\alpha)$$

حيث $\alpha \in E$، واضح أنّ τ_2 تمدد σ_2، كان بإمكاننا البدء بـ τ_2 واستعادة τ_1 بتعريف

$$\tau_1(\alpha) = (\lambda^{-1}\tau_2)(\alpha),$$

أي بالمتابعة من الجهة الأخرى للرسم، يمكن إثبات أنّ المطابقة بين $\tau_1 : E \to \overline{F}'_1$ و $\tau_2 : E \to \overline{F}'_2$ أحادية، ومن وجهة هذا التقابل الأحادي الغامر، فإنّ عدد τ الممددة لـ σ مستقل عن F'، $\overline{F'}$ و σ.

يُستنتج أنّ عدد الدوال الممددة لـ σ منته من حقيقة أنّ E امتداد منته لـ F، $E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$، حيث $\alpha_1,\dots, \alpha_n \in E$، وبحسب المبرهنة 11.31.

$$\begin{tikzcd}
\overline{F}_1' \arrow[rr, "\lambda", "\text{تمديد } \sigma_2\sigma_1^{-1}"'] \arrow[d, dash] & & \overline{F}_2' \arrow[d, dash] \\
\tau_1[E] \arrow[d, dash] & E \arrow[l, "\tau_1"'] \arrow[r, "\tau_2", "\tau_2(\alpha) = (\lambda\tau_1)(\alpha)"'] \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash, shorten >=30pt, "\alpha"'] & \tau_2[E] \arrow[d, dash] \\
F_1' & F \arrow[l, "\sigma_1"'] \arrow[r, "\sigma_2"] & F_2'
\end{tikzcd}$$

الشكل 8.49

يوجد عدد منتهٍ من الاحتمالات المرشحة بوصفها صورًا لـ $\tau(\alpha_i)$ في F'؛ لذلك، إذا كان

$$\mathrm{irr}(\alpha_i , F) = a_{i0} + a_{i1}x + \cdots + a_{imi}\, x^{mi}$$

حيث $a_{ik} \in F$، فإنّ $\tau(\alpha_i)$ يجب أن يكون أحد الأصفار لـ $\overline{F'}$

$$[\sigma(a_{i0}) + \sigma(a_{i1})x + \cdots + \sigma(a_{imi})x^{mi}] \in F'[x].$$

♦

9.49 تعريف ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F، فيسمى عدد التماثلات من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ التي تترك F ثابتة، **دليل** $\{E : F\}$ لـ E على F. **(index $\{E : F\}$ of E over F)** ■

10.49 نتيجة إذا كان $F \le E \le K$، حيث الحقل K امتداد منتهٍ للحقل F، فإنّ $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$.

البرهان: ينتج من المبرهنة 7.49 أنّ كلًّا من الـ $\{E : F\}$ تماثل τ_i من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، لها $\{K : F\}$ من التمديدات إلى تماثلات من K إلى حقل جزئي من $\overline{F}$. ♦

في الحقيقة، كانت النتيجة السابقة هي الشيء الرئيس الذي نسعى إليه، لاحظ أنها تُعدّ شيئًا، فلا تقلل من قدر أيّ نتيجة مثلها، حتى لو كان اسمها "نتيجة".

سنثبت في الفصل 51 أنه ما لم يكن F حقلًا غير منته ذا مميز $p \neq 0$، فإنه دائمًا يكون $\{E : F\} = [E : F]$ لكل امتداد منته E لـ F. وفي حالة $E = F(\alpha)$، فإنّ ألـ $\{F(\alpha) : F\}$ تمديد للدالة المحايدة $i: F \to \overline{F}$، التي تربط $F(\alpha)$ بحقل جزئي من $\overline{F}$، معطاة بتماثلات الترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ لكل مرافق β في $\overline{F}$ لـ α على F. فإذا كان لـ $irr\ (\alpha, F)$ عدد n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$، فإنّ $n = \{E : F\}$، سنثبت لاحقًا أنه ما لم يكن F حقلًا غير منته ذا مميز $p \neq 0$، فإنّ عدد الأصفار المختلفة لـ $irr\ (\alpha, F)$ يساوي $\deg(\alpha, F) = [F(\alpha) : F]$.

11.49 مثال افترض $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ على $\mathbb{Q}$، كما في المثال 17.48، فقد أثبت عملنا في ذلك المثال أنّ $\{E : \mathbb{Q}\} = [E : \mathbb{Q}] = 4$، وكذلك $\{E : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\} = 2$ و $\{\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\} = 2$، إذن:

$$4 = \{E : \mathbb{Q}\} = \{E : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}\{\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\} = (2)(2)$$

هذا يوضح النتيجة 10.49. ▲

إثبات مبرهنة التمديد

سنعيد صياغة مبرهنة التمديد التماثل 3.49.

مبرهنة تمديد التماثل: ليكن E امتدادًا جبريًّا للحقل F، ولتكن σ تماثلًا من F غامرًا للحقل F'، ليكن $\overline{F'}$ الإغلاق الجبري لـ F'، فيمكن تمديد σ إلى تماثل τ من E إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$ بحيث $\tau(a) = \sigma(a)$ لكل $a \in F$.

البرهان افترض الأزواج كلها (L, λ)، حيث L حقل يحقق $F \leq L \leq E$ و λ تماثل من L إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، بحيث إنّ $\lambda(a) = \sigma(a)$ لكل $a \in F$. المجموعة S المكوّنة من الأزواج (L, λ) غير خالية؛ لأن (F, σ) هو أحد هذه الأزواج. عرّف ترتيبًا جزئيًّا على S، بحيث $(L_1, \lambda_1) \leq (L_2, \lambda_2)$ إذا كان $L_1 \leq L_2$ و $\lambda_1(a) = \lambda_2(a)$ لكل $a \in L_1$. من السهل التحقق أنّ هذه العلاقة $\leq$ تعطي ترتيبًا جزئيًّا على S.

لتكن $T = \{(H_i, \lambda_i) \mid i \in I\}$ أي سلسلة في S. نزعم أنّ $H = \bigcup_{i \in I} H_i$ حقل جزئي من E. لتكن $a, b \in H$، حيث $a \in H_1$ و $b \in H_2$؛ إذن، إما $H_1 \leq H_2$ أو $H_2 \leq H_1$؛ لأن T سلسلة. إذا كان – فرضًا– $H_1 \leq H_2$، فإنّ $a, b \in H_2$، وهذا يؤدي إلى أنّ $a \pm b$، ab، و a/b إذا كانت $b \neq 0$ كلها في H_2 ومن ثم في H، ولأنّه لكل $i \in I$، $F \subseteq H_i \subseteq E$، فإنّ $F \subseteq H \subseteq E$. إذن، H حقل جزئي من E.

عرّف $\lambda : H \to \overline{F'}$ كالآتي: ليكن $c \in H$؛ إذن، $c \in H_i$ حيث $i \in I$، ولتكن:

$$\lambda(c) = \lambda_i(c)$$

الدالة λ حسنة التعريف؛ لأنه إذا كانت $c \in H_1$ و $c \in H_2$، فإما $(H_1, \lambda_1) \le (H_2, \lambda_2)$ أو $(H_2,\lambda_2) \le (H_1,\lambda_1)$ ؛ لأن T سلسلة، وفي كلتا الحالتين $\lambda_1(c) = \lambda_2(c)$ نزعم أنّ λ تماثل من H إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، فإذا كان $a, b \in H$، فيوجد H_i بحيث إنّ $a,b \in H_i$

$$\lambda(a + b) = \lambda_i (a + b) = \lambda_i (a) + \lambda_i (b) = \lambda(a) + \lambda(b)$$ و

وبالمثل

$$\lambda(ab) = \lambda_i (ab) = \lambda_i (a)\lambda_i (b) = \lambda(a) \lambda(b).$$

إذا كان $\lambda(a) = 0$، فيوجد i حيث $a \in H_i$ و $\lambda_i (a) = 0$، وهذا يؤدي إلى أنّ $a = 0$.

إذن، λ تماثل. وهكذا، فإنّ $(H, \lambda) \in S$، وواضح من تعريف H و λ أنّ (H, λ) حدّ أعلى لـ T.
أثبتنا أنّ كل سلسلة في S لها حدّ أعلى في S، وهكذا، فإنّ شروط بدهية زورن متحققة؛ إذن، يوجد عنصر أعظمي (K, τ) في S. ليكن $\tau(K) = K'$ حيث $K' \le \overline{F'}$. الآن، إذا كانت $K \ne E$، فلتكن $\alpha \in E$ ولكن $\alpha \notin K$. الآن α جبرية على F، وهذا يؤدي إلى أنّ α جبرية على K، وكذلك فلتكن $p(x)= \operatorname{irr} (\alpha, K)$. ليكن ψ_α التماثل القانوني

$$\psi_\alpha : K[x] / \langle p(x)\rangle \to K(\alpha)$$

المرتبط بتشاكل التعويض $\phi_\alpha : K[x] \to K(\alpha)$. إذا كانت

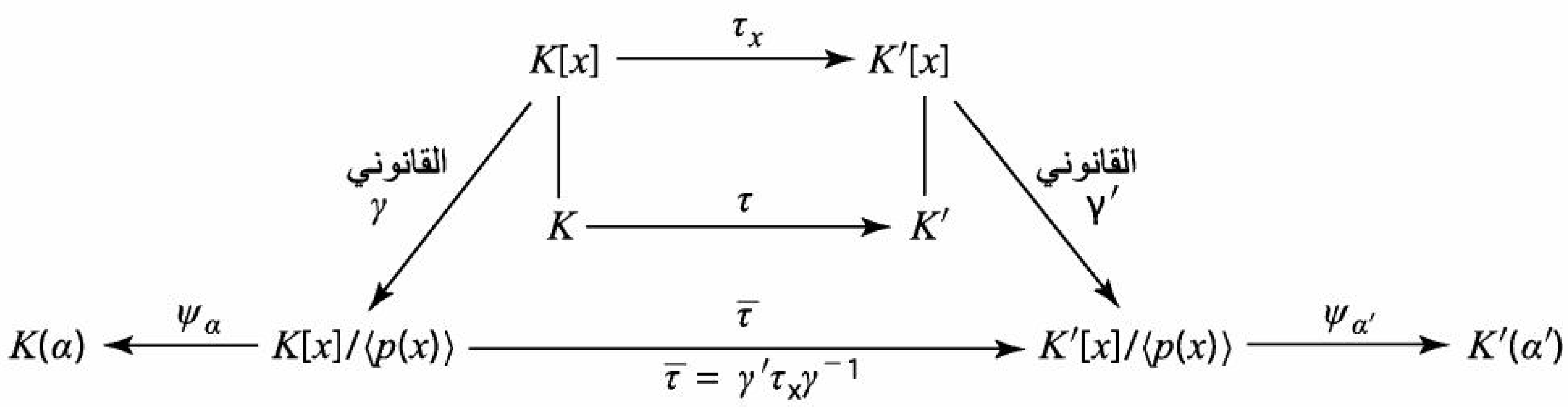
$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots +a_nx^n$$

افترض

$$q(x) = \tau (a_0) + \tau (a_1)x + \cdots +\tau (a_n)x^n$$

في $K'[x]$. لأنّ τ تماثل، فإنّ $q(x)$ غير مختزلة في $K'[x]$ ، ولأنّ $K' \le F'$ ، يوجد صفر α' لـ $q(x)$ في $\overline{F'}$. لتكن

$$\psi_{\alpha'} : K'[x] / \langle q(x)\rangle \to K'(\alpha')$$



الشكل **12.49**

التماثل المشابه لـ ψ_α. أخيرًا، ليكن

$$\overline{\tau} : K[x]/\langle p(x)\rangle \to K'[x]/\langle q(x)\rangle$$

التماثل الممدد لـ τ على K، ويربط $x+ \langle p(x)\rangle$ بـ $x+ \langle q(x)\rangle$. (انظر الشكل 12.49). إذن، تركيب الدوال

$$\psi_{\alpha'}\overline{\tau}\psi_\alpha^{-1} : K(\alpha) \to K'(\alpha')$$

تماثل من $K(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F'}$، وواضح أنّ $(K, \tau) < (K(\alpha), \psi_{\alpha'}\bar{\tau}\,\psi_{\alpha}^{-1})$، ما يناقض أنّ (K, τ) عنصر أعظمي؛ إذن، يجب أن تكون $K = E$. ♦

■ تمارين 49

حسابات

لتكن $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$، بالإمكان إثبات أنّ $[E:\mathbb{Q}] = 8$. في التمارين من 1 إلى 3، لكل تماثل معطًى على حقل جزئي من E، أوجد التمديدات كلها للدالة إلى تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{\mathbb{Q}}$، وصف التمديدات بإعطاء قيمها على مجموعة المولدات $\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$ لـ E على $\mathbb{Q}$.

1. $\iota : \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15})$ حيث ι الدالة المحايدة.

2. $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{15})$ بحيث $\sigma(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ و $\sigma(\sqrt{15}) = -\sqrt{15}$.

3. $\psi_{\sqrt{30},-\sqrt{30}} : \mathbb{Q}(\sqrt{30}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{30})$

إنها حقيقة يمكن إثباتها بالتكعيب أنّ أصفار $x^3 - 2$ في $\mathbb{Q}$ هي:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{2},\quad \alpha_2 = \sqrt[3]{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ و } \alpha_3 = \sqrt[3]{2}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

حيث $\sqrt[3]{2}$ – كالعادة– الجذر التكعيبي الحقيقي لـ 2. استخدم هذه المعلومات في التمارين 4 إلى 6.

4. صف التمديدات للدالة المحايدة على $\mathbb{Q}$ إلى تماثل يربط $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ بحقل جزئي من $\overline{\mathbb{Q}}$.

5. صف التمديدات جميعها للدالة المحايدة على $\mathbb{Q}$ إلى تماثل يربط $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{3})$ بحقل جزئي من $\overline{\mathbb{Q}}$.

6. صف التمديدات جميعها للتماثل الذاتي $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ على $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ إلى تماثل يربط بحقل جزئي من $\overline{\mathbb{Q}}$.

7. ليكن σ تماثلًا ذاتيًا على $\mathbb{Q}(\pi)$ التي تربط π بـ $-\pi$.

أ. صف الحقل الثابت لـ σ.

ب. صف تمديدات σ جميعها إلى تماثل يربط الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ بحقل جزئي من $\overline{\mathbb{Q}(\pi)}$.

مفاهيم

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. ليكن $F(\alpha)$ أيّ امتداد بسيط للحقل F، فكل تماثل من F إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ له تمديد إلى تماثل من $F(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$.

________ ب. ليكن $F(\alpha)$ أيّ امتداد جبريّ بسيط للحقل F، فكل تماثل من F إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ له تمديد إلى تماثل من $F(\alpha)$ إلى حقل جزئي من $\overline{F}$.

________ جـ. كل تماثل من F إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ له العدد نفسه من التمديدات لكل امتداد جبري بسيط لـ F.

________ د. الإغلاقات الجبرية للحقول المتماثلة دائمًا متماثلة.

________ هـ. الإغلاقات الجبرية للحقول غير المتماثلة لا يمكن أبدًا أن تكون متماثلة.

________ و. الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ متماثل مع الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$.

ــــــــــــ ز. دليل الامتداد المنتهي E على الحقل F منته.

ــــــــــــ ح. يتصرف الدليل ضربيًا بالنسبة إلى الأبراجِ المنتهية للامتدادات المنتهية للحقول.

ــــــــــــ ط. ملاحظاتنا السابقة للنصّ الأول للمبرهنة 3.49 تشكل أساسًا لإثبات هذه المبرهنة للامتدادات المنتهية E لـ F.

ــــــــــــ ي. تثبت النتيجة 5.49 أنّ $\mathbb{C}$ يماثل $\overline{\mathbb{Q}}$.

براهين

9. ليكن K حقلًا مغلقًا جبريًّا. أثبت أنّ أيّ تماثل σ من K إلى حقل جزئي منه، بحيث تكون K جبرية على $\sigma[K]$ يكون تماثلًا ذاتيًا على K– بمعنى أنه دالة غامرة. [مساعدة: استخدم المبرهنة 3.49 على σ^{-1}].

10. ليكن E امتدادًا جبريًّا على الحقل F. أثبت أنّ كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي على $\overline{F}$.

11. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ أيّ إغلاقين جبريين $\overline{F}$ و $\overline{E}$ لـ F وE، على الترتيب، متماثلان.

12. أثبت أنّ الإغلاق الجبري لـ $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\pi}\right)$ في $\mathbb{C}$ يماثل أيّ إغلاق جبري لـ $\overline{\mathbb{Q}}(x)$، حيث $\overline{\mathbb{Q}}$ هو حقل الأعداد الجبرية وx غير معين.

13. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا منتهيًا للحقل F، فإنّ $\{E : F\} \leq [E : F]$.

[مساعدة: تثبت الملاحظات السابقة للمثال 11.49 بصورة أساسية هذا بالنسبة إلى امتداد جبري بسيط $F(\alpha)$ لـ F. استخدم حقيقة أنّ الامتداد المنتهي هو برج من الامتدادات البسيطة، بالترافق مع الخصائص الضربية للدليل والدرجة].

الفصل 50 حقول الانشطار Splitting Fields

سنكون مهتمين بصورة رئيسة بالتماثلات الذاتية للحقل E، وليس مجرد التماثلات التي تربط E بحقل جزئي من $\overline{E}$. إنها التماثلات الذاتية للحقل التي تشكل زمرة، ونتساءل ما إذا كان للتمدد E للحقل F، كل تماثل يربط E بحقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة هو في الحقيقة تماثل ذاتي لـ E.

افترض أنّ E تمدد جبري للحقل F، فإذا كانت $\alpha \in E$ و $\beta \in \overline{F}$ مرافقة لـ α على F، فإنه يوجد تماثل ترافق

$$\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \to F(\beta).$$

بحسب النتيجة 4.49، يمكن تمديد $\psi_{\alpha,\beta}$ إلى تماثل يربط E بحقل جزئي من $\overline{F}$. الآن، إذا كانت $\beta \notin E$ ، فإنّ مثل هذا التماثل على E لا يمكن أن يكون تماثلًا ذاتيًا على E؛ إذن، إذا كان امتداد جبري E للحقل F يحقق خاصية أنّ تماثلاته كلها التي تربطه بحقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة هي في الحقيقة تماثلات ذاتية على E، فإنّ لكل $\alpha \in E$ ، يجب أن يحوي E مرافقات α على F جميعها كذلك، يمكن ملاحظة هذا بسهولة. نشير هنا إلى أننا استخدمنا الكثير من القوة، تحديدًا وجود تماثلات الترافق ومبرهنة تمديد التماثل 3.49.

تقترح هذه الأفكار صياغة للتعريف الآتي:

1.50 تعريف ليكن F حقلًا له إغلاق جبري $\overline{F}$، ولتكن $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$ مجموعة من كثيرات الحدود في $F[x]$، فيسمى الحقل $E \leq \overline{F}$ **حقل انشطار لـ** $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$ **على F (splitting filed)** إذا كان E أصغر حقل جزئي من $\overline{F}$ يحوي F والأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل $f_i(x)$ حيث $i \in I$، ويسمى $K \leq \overline{F}$ **حقل انشطار على** F إذا كان حقل انشطار لبعض كثيرات الحدود في $F[x]$. ■

2.50 مثال رأينا أنّ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ حقل انشطار لـ $\{x^2-2, x^2-3\}$ وكذلك $\{x^4-5x^2+6\}$. ▲

لكثيرة حدود واحدة $f(x) \in F[x]$، سوف نشير عادة إلى حقل انشطار لـ $\{f(x)\}$ على F، **بحقل انشطار $f(x)$ على** F. لاحظ أنّ حقل الانشطار لـ $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$ على F في $\overline{F}$ هو تقاطع الحقول الجزئية جميعها من $\overline{F}$ التي تحوي F، والأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل $f_i(x)$، حيث $i \in I$؛ إذن، مثل حقل الانشطار هذا موجود بالتأكيد.

سنثبت الآن أنّ حقول الانشطار على F هي تحديدًا تلك الحقول $E \leq \overline{F}$، مع خاصية أنّ التماثلات جميعها التي تربط E بحقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، هي تماثلات ذاتية على E، وستكون هذه نتيجة للمبرهنة المقبلة. مرة أخرى، نشخّص مفهومًا باستخدام الدوال، وتذكر أننا دائمًا نفترض أنّ الامتدادات الجبرية للحقل F قيد الدراسة جميعها محتواة في إغلاق جبري محدد $\overline{F}$ لـ F.

3.50 مبرهنة يكون الحقل E، حيث $F \leq E \leq \overline{F}$ حقل انشطار على F، إذا وفقط إذا كان كل تماثل ذاتي لـ $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يربط E بنفسها، وهكذا فهو يصنع تماثلًا ذاتيًا لـ E ويبقي F ثابتة.

البرهان ليكن E حقل انشطار على F في $\overline{F}$ لـ $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$، ولتكن σ تماثلًا ذاتيًا على $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، ولتكن $\{ \alpha_j \mid j \in J \}$ مجموعة الأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل $f_i(x)$ حيث $i \in I$. يثبت عملنا السابق أنّ لـ α_j محددة، وتكون عناصر $F(\alpha_j)$ هي التراكيب جميعها على الصورة:

$$g(\alpha_j) = a_0 + a_1\alpha_j + \cdots + a_{nj-1}\alpha_j^{nj-1},$$

حيث n_j هي درجة $\operatorname{irr}(\alpha_j, F)$ و $a_k \in F$. افترض المجموعة S المكوّنة من المجاميع المنتهية كلها لحاصل الضرب المنتهي لعناصر من الشكل $g(\alpha_j)$ لكل $j \in J$. المجموعة S محتواة في E ومغلقة بالنسبة إلى الجمع والضرب، وتحوي 0 و 1 ومعكوسًا جمعيًّا لكل عنصر، ولأنَّ كل عنصر في S محتوًى في $F(\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j_r}) \subseteq S$، فنرى أنّ S تحوي كذلك المعكوس الضربي لكل عنصر لا يساوي الصفر؛ إذن، S حقل جزئي من E، وتحوي α_j لكل $j \in J$، وبحسب تعريف حقل الانشطار E لـ $\{ f_i(x) \mid i \in I \}$، نرى أنه يجب أن تكون $S=E$، هذا العمل كان فقط لإثبات أنّ $\{ \alpha_j \mid j \in J \}$ تولد E على F، بطريقة أخذ المجاميع المنتهية وحاصل الضرب المنتهي. وبمعرفة هذا، نرى مباشرة أنّ قيمة σ لأيّ عنصر في E تتحدد تمامًا بقيم $\sigma(\alpha_j)$، ولكن بحسب النتيجة 5.48، يجب أن تكون $\sigma(\alpha_j)$ كذلك صفرًا لـ $\operatorname{irr}(\alpha_j, F)$.

بحسب المبرهنة 13.29، فإنّ $\operatorname{irr}(\alpha_j, F)$ تقسم $f_i(x)$ التي تحقق $f_i(\alpha_j) = 0$؛ إذن $\sigma(\alpha_j) \in E$ كذلك، وهكذا فإنّ σ تربط E بحقل جزئي من E تماثليًّا. على أيّ حال، فإنّ المثل صحيح بالنسبة إلى التماثل الذاتي σ^{-1} على $\bar{F}$. ولأنَّ لكل $\beta \in E$،

$$\beta = \sigma(\sigma^{-1}(\beta)),$$

نرى أنّ σ تربط E بصورة غامرة بـ E، وهكذا، فهي تعطي تماثلًا ذاتيًا على E.

افترض العكس، أي إنّ كل تماثل ذاتي على $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، يعطي تماثلًا ذاتيًّا على E. لتكن $g(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$ ولها صفر α في E، فإذا كان β أيّ صفر لـ $g(x)$ في $\bar{F}$، فإنه وبحسب المبرهنة 3.48، يوجد تماثل ترافق $\psi_{\alpha,\beta}$ من $F(\alpha)$ غامر لـ $F(\beta)$، ويترك F ثابتة بحسب المبرهنة 3.49، يمكن تمديد $\psi_{\alpha,\beta}$ إلى تماثل τ من $\bar{F}$ إلى حقل جزئي من $\bar{F}$. ولكن

$$\tau^{1}: \tau[\bar{F}] \rightarrow \bar{F}$$

يمكن تمديدها إلى تماثل يربط $\bar{F}$ بحقل جزئي من $\bar{F}$، ولأنَّ صورة τ^{-1} هي كل $\bar{F}$، فإننا نرى أنّ τ يجب أن تكون غامرة لـ $\bar{F}$، بمعنى أنّ τ تماثل ذاتي على $\bar{F}$، ويترك F ثابتة؛ إذن، وبحسب الفرض، تولد τ تماثلًا ذاتيًّا على E، ما يؤدي إلى أنّ $\tau(\alpha) = \beta$ موجودة في E. لقد أثبتنا أنه إذا كانت $g(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E، فإنّ أصفار $g(x)$ الموجودة في $\bar{F}$ جميعها تنتمي لـ E؛ إذن، إذا كانت $\{g_k(x)\}$ مجموعة كثيرات الحدود جميعها غير المختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E، فإنّ E هي حقل الانشطار لـ $\{g_k(x)\}$. ♦

4.50 تعريف ليكن E امتدادًا للحقل F، فنقول: إنّ كثيرة الحدود $f(x)$ تنشطر في E **(splits)** إذا أمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عوامل خطية في $E[x]$. ■

5.50 مثال كثيرة الحدود x^4+5x^2+6 في $\mathbb{Q}[x]$ تنشطر في الحقل $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ إلى

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$ ▲

6.50 نتيجة إذا كان $E \leq \bar{F}$ حقل انشطار على F، فإنّ كل كثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E تنشطر في E.

البرهان إذا كان E حقل انشطار على F في $\bar{F}$، فإنّ كل تماثل ذاتي على $\bar{F}$ يولد تماثلًا ذاتيًا على E، الجزء الثاني من إثبات المبرهنة 3.50 ، يبرهن بالضبط أنّ E كذلك حقل الانشطار على F للمجموعة $\{g_k(x)\}$ المكوّنة من كثيرات الحدود غير المختزلة في $F[x]$ ولها صفر في E؛ إذن، أيّ كثيرة حدود غير مختزلة $f(x)$ في $F[x]$ ولها صفر في E تكون أصفارها في $\bar{F}$ جميعها تنتمي لـ E، وهكذا، فإنّ تحليلها إلى عوامل خطية في $\bar{F}[x]$ – المعطى في المبرهنة 5.31 – في الحقيقة يحدث في $E[x]$، وهكذا، فإنّ $f(x)$ تنشطر في E ♦

7.50 نتيجة إذا كان $E \leq \bar{F}$ حقل انشطار على F، فإنّ كل تماثل يربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، هو في الحقيقة تماثل ذاتي على E، وبوجه خاص، إذا كان E حقل انشطار من درجة منهية على F، فإنّ

$$\{E:F\} = |G(E/F)|$$

البرهان كل تماثل σ يربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي τ على $\bar{F}$، بحسب المبرهنة 3.49 ومناقشة الغمر في الجزء الثاني من إثبات المبرهنة 3.50. إذا كان E حقل انشطار على F، فإنه وبحسب المبرهنة 3.50، قصر τ على E – أي σ – يعطي تماثلًا ذاتيًا على E، وهكذا لحقل انشطار E على F، كل تماثل يربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ ويترك F ثابتة، هو تماثل ذاتي على E.

تنتج المعادلة $\{E:F\} = |G(E/F)|$ مباشرة لحقل انشطار E ذي درجة منتهية على F؛ لأن $\{E:F\}$ تم تعريفها بوصفها عدد التماثلات المختلفة التي تربط E بحقل جزئي من $\bar{F}$ وتترك F ثابتة. ♦

8.50 مثال لاحظ أنّ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ حقل انشطار لـ

$$\{x^2-2, x^2-3\}$$

على $\mathbb{Q}$ يثبت المثال 17.48 أنّ الدوال i، σ_1، σ_2، σ_3 هي التماثلات الذاتية كلها لـ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ التي تترك $\mathbb{Q}$ ثابتة. (في الحقيقة؛ لأن كل تماثل ذاتي للحقل الجزئي يجب أن يترك الحقل الجزئي الأولي ثابتًا، فإننا نرى أنها التماثلات الذاتية الوحيدة على $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$؛ إذن:

$$\{\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}\} = |G(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})| = 4$$

موضحًا النتيجة 7.50. ▲

نود أن نحدد شروطًا تؤدي إلى أنّ

$$|G(E/F)| = \{E:F\} = [E:F]$$

لامتداد منته E على F، هذا هو موضوعنا الآتي، وسنثبت في الفصل المقبل أنّ هذه المعادلة تتحقق دائمًا عندما يكون E حقل انشطار على الحقل F ذي المميز 0 ، أو عندما يكون F حقلًا منتهيًا. هذه المعادلة ليست بالضرورة صحيحة، عندما يكون F حقلًا غير منتهٍ ذا مميز $p \neq 0$.

9.50 مثال ليكن $\sqrt[3]{2}$ الجذر التكعيبي الحقيقي لـ 2، كالعادة، الآن x^3-2 لا تنشطر في $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$؛ لأن $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})<\mathbb{R}$ وهناك صفر حقيقي واحد فقط لـ x^3-2؛ إذن، x^3-2 تتحلل في $\left(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\right)[x]$ إلى عامل خطي $x-\sqrt[3]{2}$ وعامل تربيعي غير مختزل.

حقل الانشطار E لـ x^3-2 على $\mathbb{Q}$ هو لذلك من الدرجة 2 على $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$؛ إذن،

$$[E:\mathbb{Q}] = [E:\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = (2)(3) = 6$$

أثبتنا أنّ حقل الانشطار على $\mathbb{Q}$ لـ x^3-2 من الدرجة 6 على $\mathbb{Q}$، ويمكننا التحقق باستخدام التكعيب أنّ:

$$\sqrt[3]{2}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{2}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

هي الأصفار الأخرى لـ x^3-2 في $\mathbb{C}$؛ إذن، حقل الانشطار E لـ x^3-2 على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$. (هذا ليس الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i, \sqrt{3})$ ، الذي له درجة 12 على $\mathbb{Q}$). ستترك دراسة أخرى لهذا المثال المشوق إلى التمارين (انظر التمارين 7، 8، 9، 16، 21، 23). ▲

■ تمارين 50

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد درجة حقل الانشطار على $\mathbb{Q}$ لكثيرات الحدود المعطاة في $\mathbb{Q}[x]$.

1. x^2+3 **2.** x^4-1 **3.** $(x^2-2)\,(x^2-3)$

4. x^3-3 **5.** x^3-1 **6.** $(x^2-2)\,(x^3-2)$

ارجع إلى المثال 9.50 في التمارين من 7 إلى 9.

7. ما رتبة $G(\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)/\mathbb{Q})$؟

8. ما رتبة $G(\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q})$؟

9. ما رتبة $G(\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$؟

10. ليكن α صفرًا لـ x^3+x^2+1 على $\mathbb{Z}_2$. أثبت أنّ x^3+x^2+1 تنشطر في $\mathbb{Z}_2(\alpha)$. [مساعدة: يوجد ثمانية عناصر في $\mathbb{Z}_2(\alpha)$. أوجد صفرين لـ x^3+x^2+1 –إضافة إلى α – من هذه العناصر الثمانية. أو عوضًا عن ذلك استخدم نتائج الفصل 33].

مفاهيم

في التمرينين 11 و 12، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

11. ليكن $F \le E \le \overline{F}$ حيث $\overline{F}$ الإغلاق الجبري للحقل F. يكون الحقل E *حقل انشطار* على F إذا وفقط إذا كانت E تحوي الأصفار جميعها في $\overline{F}$ لكل كثيرة حدود في $F[x]$، التي لها صفر في E.

12. كثيرة الحدود $f(x)$ في $F[x]$ *تنشطر* في الامتداد الحقلي E لـ F، إذا وفقط إذا كانت تحلل إلى عوامل في $E[x]$، هي حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل.

13. لتكن $f(x)$ كثيرة حدود في $F[x]$ من الدرجة n، وليكن $E \le \overline{F}$ حقل الانشطار لـ $f(x)$ على F في $\overline{F}$. ما الحدود التي يمكن وضعها لـ $[E:F]$؟

14. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_______ أ. لتكن $\alpha, \beta \in E$، حيث $E \le \overline{F}$ حقل انشطار على F؛ إذن، يوجد تماثل ذاتي على E ويترك F ثابتًا، ويربط α بـ β ، إذا وفقط إذا كانت $\operatorname{irr}(\alpha,F) = \operatorname{irr}(\beta,F)$.

_______ ب. $\mathbb{R}$ حقل انشطار على $\mathbb{Q}$.

_______ جـ. $\mathbb{R}$ حقل انشطار على $\mathbb{R}$.

______ د. $\mathbb{C}$ حقل انشطار على $\mathbb{R}$.

______ هـ. $\mathbb{Q}(i)$ حقل انشطار على $\mathbb{Q}$.

______ و. $\mathbb{Q}(\pi)$ حقل انشطار على $\mathbb{Q}(\pi^2)$.

______ ز. لكل حقل انشطار E على F، حيث $E \le \overline{F}$ ، كل تماثل على E هو تماثل ذاتي على E.

______ ح. لكل حقل انشطار E على F، حيث $E \le \overline{F}$ ، كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ هو تماثل ذاتي على E.

______ ط. لكل حقل انشطار E على F، حيث $E \le \overline{F}$ ، كل تماثل على E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، هو تماثل ذاتي على E.

______ ي. يكون كل إغلاق جبري $\overline{F}$ للحقل F حقل انشطار على F.

15. أثبت مستخدمًا مثالاً أنّ النتيجة 6.50 لن تبقى صحيحة إذا أزيلت الكلمة «غير مختزل».

16. أ. هل $|G(E/F)|$ ضربية على الأبراج المنتهية للامتدادات المنتهية، أي هل صحيح أنّ:

$$|G(K/F)| = |G(K/E)||G(E/F)|$$

حيث $F \le E \le K \le \overline{F}$؟

لماذا نعم أو لماذا لا؟ [مساعدة: استخدم التمارين من 7 إلى 9].

ب. هل $|G(E/F)|$ ضربية على الأبراج المنتهية للامتدادات المنتهية التي كل منها حقل انشطار على الحقل الذي أسفل منه؟ لماذا نعم أو لماذا لا؟

براهين

17. أثبت أنه إذا كان الامتداد المنتهي E للحقل F حقل انشطار على F ، فإنّ E حقل انشطار لكثيرة حدود واحدة في $F[x]$.

18. أثبت أنه إذا كان $[E:F]=2$، فإنّ E حقل انشطار على F.

19. أثبت أنه إذا كان $F \le E \le \bar{F}$، فإنّ E حقل انشطار على F ، إذا وفقط إذا كان E يحوي المترافقات كلها على F في $\bar{F}$ لكل عنصر من عناصره.

20. أثبت أنّ لـ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ التماثل الذاتي المحايد فقط.

21. بالرجوع إلى المثال 9.50، أثبت أنّ:

$$G(\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}) / \mathbb{Q}(i\sqrt{3})) \simeq \langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$$

22. أ. أثبت أنّ التماثل الذاتي لحقل الانشطار E على F لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$. يكون تباديل على أصفار $f(x)$ في E.

ب. أثبت أنّ التماثل الذاتي لحقل الانشطار E على F لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$. يتعين تمامًا بالتباديل على أصفار $f(x)$ في E المعطاة في الفرع (أ).

جـ. أثبت أنه إذا كان E حقل انشطار على F لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$، فإنه يمكن النظر لـ $G(E/F)$ بطريقة طبيعية بوصفها زمرة تباديل.

23. ليكن E حقل الانشطار لـ x^3-2 على $\mathbb{Q}$، كما في المثال 9.50.

أ. ما رتبة $G(E/\mathbb{Q})$؟ [مساعدة: استخدم النتيجة 7.50 والنتيجة 4.49 المطبقة على البرج $E \ge \mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right) \ge \mathbb{Q}$].

ب. أثبت أنّ $G(E/\mathbb{Q}) = S_3$، زمرة التناظر على ثلاثة أحرف. [مساعدة: استخدم التمرين 22 مع الفرع (أ)].

24. أثبت أنه لأيّ عدد أولي p، تكون درجة حقل الانشطار على $\mathbb{Q}$ لـ $x^{p}-1$ هي $p-1$. [مساعدة: ارجع إلى النتيجة 17.23].

25. ليكن $\bar{F}$ و $\bar{F}'$ إغلاقين جبريين للحقل F، ولتكن $f(x) \in F[x]$، أثبت أنّ حقل الانشطار E على F لـ $f(x)$ في $\bar{F}$، يماثل حقل الانشطار E' على F لـ $f(x)$ في $\bar{F}'$. [مساعدة: استخدم النتيجة 5.49].

الفصل 51 الامتدادات القابلة للفصل Separable Extensions

تكرارات أصفار كثيرة الحدود

تذكر أننا الآن نفترض دائمًا أنّ الامتدادات الجبرية للحقل F قيد الدراسة جميعها محتواة في إغلاق جبري محدد $\bar{F}$ لـ F.

هدفنا الآتي هو تحديد الشروط الواجب توافرها – لامتداد منتهٍ E لـ F – لكي يكون $\{E:F\}=[E:F]$. مفتاح الإجابة عن هذا السؤال هو افتراض تكرار أصفار كثيرات الحدود.

1.51 تعريف ليكن $f(x) \in F[x]$. يكون العنصر α من $\bar{F}$ حيث $f(\alpha) = 0$ **صفرًا ذا تكرار v لـ $f(x)$** **(zero of $f(x)$ of multiplicity v)**، إذا كان v أكبر عدد صحيح، بحيث يكون $(x-\alpha)^v$ عاملًا من عوامل $f(x)$ في $\bar{F}[x]$. ■

تثبت المبرهنة الآتية أنّ تكرارات أصفار كثيرة حدود غير مختزلة ومعطاة على حقل، كلها متساوية. السهولة التي يمكننا بها إثبات هذه المبرهنة، هي دليل آخر على قوة تماثلات الترافق، وطريقتنا كلها في دراسة أصفار كثيرات الحدود هي عن طريق الدوال.

2.51 مبرهنة لتكن $f(x)$ غير مختزلة في $F[x]$. كل أصفار $f(x)$ في $\bar{F}$ لها التكرار نفسه.

البرهان لتكن α و β أصفارًا لـ $f(x)$ في $\bar{F}$ بحسب المبرهنة 3.48، يوجد تماثل ترافق. $\psi_{\alpha,\beta} : F(\alpha) \xrightarrow{\text{غامر}} F(\beta)$ بحسب النتيجة 4.49، يمكن تمديد $\psi_{\alpha\beta}$ إلى تماثل $\tau : \bar{F} \to \bar{F}$. يُنتج τ تماثلًا طبيعيًّا $\tau_x : \bar{F}[x] \to \bar{F}[x]$، حيث $\tau_x(x) = x$. الآن، τ_x تترك $\tau_x f(x)$ ثابتة؛ لأن $f(x) \in F[x]$ و $\psi_{\alpha\beta}$ تترك F ثابتة. ولكن

$$\tau_x((x-\alpha)^v) = (x-\beta)^v,$$

ما يثبت أنّ تكرار β في $f(x)$ أكبر أو يساوي تكرار α. بالطريقة نفسها يمكن الحصول على المتباينة العكسية؛ إذن، تكرار α يساوي تكرار β. ♦

3.51 نتيجة إذا كانت $f(x)$ غير مختزلة في $F[x]$، فيمكن تحليل $f(x)$ في $F[x]$ على الصورة:

$$a\prod_i (x-\alpha_i)^v,$$

حيث α_i الأصفار المختلفة لـ $f(x)$ في $\bar{F}$ و $a \in F$.

البرهان النتيجة مباشرة من المبرهنة 2.51. ♦

عند هذه النقطة، يحتمل أنه يتعيّن علينا الإثبات بمثال، أنّ ظاهرة الأصفار ذات التكرار أكبر من 1 لكثيرة حدود غير مختزلة، هي ظاهرة ممكنة الحدوث، وسوف نعرض لاحقًا في هذا الفصل، أنها يمكن أن تحدث فقط لكثيرة حدود في حقل غير منتهٍ ذي مميز $p \neq 0$.

4.51 مثال لتكن $E = \mathbb{Z}_p(y)$، حيث y غير معين. لتكن $t = y^p$، وليكن F الحقل الجزئي $\mathbb{Z}_p(t)$ من E. (انظر الشكل 5.51). الآن، $E = F(y)$ جبري على F؛ لأن y صفر لـ $(x^p - t) \in F[x]$. بحسب المبرهنة 13.29، $\mathrm{irr}(y,F)$ يجب أن تقسم $x^p - t$ في $F[x]$. [في الحقيقة، $\mathrm{irr}(y,F) = x^p - t$، وسنترك برهان هذا إلى التمارين انظر التمرين 10].

لأنَّ $F(y)$ لا يساوي F، فيجب أن تكون درجة $\mathrm{irr}(y, F) \geq 2$، ولكن لاحظ أنّ

$$x^p - t = x^p - y^p = (x - y)^p,$$

لأن E ذو مميز p (انظر المبرهنة 19.48 والملاحظة التي بعدها).

إذن، y صفر لـ $\mathrm{irr}(y,F)$ وذو تكرار > 1. في الحقيقة $x^p - t = \mathrm{irr}(y,F)$، ما يعني أنّ تكرار y يساوي p. ▲

$E = \mathbb{Z}_p(y) = F(y)$

$F = \mathbb{Z}_p(t) = \mathbb{Z}_p(y^p)$

$\mathbb{Z}_p$

الشكل 5.51

من الآن فصاعدًا، سنعتمد بصورة مكثفة على المبرهنة 7.49 ونتيجتها. تثبت المبرهنة 3.48 ونتيجتها أنه لامتداد جبري بسيط $F(\alpha)$ لـ F، يوجد تمديد واحد لتماثل العنصر المحايد i، الذي يربط F بـ F للأصفار المختلفة جميعها لـ $irr(\alpha,F)$، وهذه هي التمديدات الوحيدة لـ i؛ إذن، $\{F(\alpha):F\}$ يساوي عدد الأصفار المختلفة لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$.

بالنظر لعملنا في مبرهنة لاجرانج والمبرهنة 4.31، فيجب أن ندرك قوة مبرهنة مثل هذه المقبلة.

6.51 مبرهنة إذا كان E امتدادًا لـ F، فإنّ $\{E:F\}$ يقسم $[E:F]$.

البرهان بحسب المبرهنة 11.31، إذا كان E منتهيًا على F، فإنّ $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$، حيث $\alpha_i \in \overline{F}$. لتكن $\mathrm{irr}(\alpha_i, F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}))$ لها α_i بوصفه أحد أصفارها الـ n_i التي لها جميعها التكرار v_i بحسب المبرهنة 2.51؛ إذن:

$$[F(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1})] = n_i v_i = \{F(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) : F(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1})\} v_i .$$

بحسب المبرهنة 4.31 والنتيجة 10.49.

$$[E : F] = \prod_i n_i v_i$$

$$\{E : F\} = \prod_i n_i \quad \text{و}$$

إذن، $\{E:F\}$ تقسم $[E:F]$. ♦

الامتدادات القابلة للفصل

7.51 تعريف يسمى الامتداد المنتهي E لـ F **امتدادًا قابلاً للفصل على** F (**separable extension**)، إذا كان $\{E:F\}=[E:F]$. العنصر α في $\overline{F}$ **قابل للفصل على** F، إذا كان $F(\alpha)$ امتدادًا قابلًا للفصل على F. كثيرة الحدود غير المختزلة $f(x) \in F[x]$ **قابلة للفصل على** F، إذا كانت أصفار $f(x)$ في $\overline{F}$ جميعها **قابلة للفصل على** F. ■

8.51 مثال الحقل $E=\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ قابل للفصل على $\mathbb{Q}$؛ لأننا رأينا في المثال 8.50 أن $\{E:\mathbb{Q}\}=4=[E:\mathbb{Q}]$. ▲

ولجعل الأمور أكثر بساطة، سنحدد تعريفنا للامتدادت القابلة للفصل للحقل F على الامتدادات المنتهية E لـ F. للتعريف المقابل للامتدادات غير المنتهية، انظر التمرين 12.

نعلم أنّ $\{F(\alpha):F\}$ يساوي عدد الأصفار المختلفة لـ $\text{irr}(\alpha,F)$، وكذلك تكرار α في $\text{irr}(\alpha,F)$ مساوٍ لتكرار كل مرافق لـ α على F، بحسب المبرهنة 2.51.

إذن، α قابلة للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت $\text{irr}(\alpha,F)$ لها أصفار ذات تكرار 1، وهذا يخبرنا بأنّ كثيرة الحدود غير المختزلة $f(x) \in F[x]$ قابلة للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت أصفارها جميعها ذات تكرار 1.

9.51 مبرهنة إذا كان K امتدادًا منتهيًا لـ E، وكانت E امتدادًا منتهيًا لـ F، أي إنّ $F\le E\le K$، فإنّ K قابلة للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت K قابلة للفصل على E و E قابلة للفصل على F.

البرهان: الآن:

$$[K:F]=[K:E][E:F],$$

و

$$\{K:F\}=\{K:E\}\{E:F\}.$$

إذا كانت K قابلة للفصل على F، فإنّ $[K:F]=\{K:F\}$، وهذا يجب أن يؤدي إلى أنّ $[E:F]=\{E:F\}$ و $[K:E]=\{K:E\}$؛ لأنه في كل حالة يقسم الدليل الدرجة بحسب المبرهنة 6.51 إذن، إذا كانت K قابلة للفصل على F، فإنّ K قابلة للفصل على E و E قابلة للفصل على F.

في المقابل، لاحظ أنّ $[K:E]=\{K:E\}$ و $[E:F]=\{E:F\}$ يؤدي إلى:

$$[K:F]=[K:E][E:F]=\{K:E\}\{E:F\}=\{K:F\}. \qquad ♦$$

يمكن تعميم المبرهنة 9.51 بصورة واضحة – باستخدام الاستقراء الرياضي – إلى أيّ برج منته من الامتدادات المنتهية. الحقل الأعلى امتداد قابل للفصل على الحقل في الأسفل، إذا وفقط إذا كان كل حقل امتدادًا قابلًا للفصل على الحقل أسفله مباشرة.

10.51 نتيجة إذا كان E امتدادًا منتهيًا على F، فإنّ E قابل للفصل على F، إذا وفقط إذا كان كل α في E قابلًا للفصل على F.

البرهان افترض أنّ E قابل للفصل على F، ولتكن $\alpha \in E$. فإنّ

$$F \le F(\alpha) \le E,$$

وتثبت المبرهنة 9.51 أنّ $F(\alpha)$ قابل للفصل على F.

افترض – في الحالة المقابلة– أنّ كل $\alpha \in E$ قابلة للفصل على F، ولأنَّ E امتداد منتهٍ على F، فيوجد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، حيث:

$$F < F(\alpha_1) < F(\alpha_1, \alpha_2) < \cdots < E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

لأنَّ α_i قابلة للفصل على F، α_i قابلة للفصل على $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$؛ لأن

$$q(x) = \text{irr}(\alpha_i, F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}))$$

تقسم $\text{irr}(\alpha_i, F)$، وهذا يؤدي إلى أنّ α_i صفر لـ $q(x)$ ذو تكرار 1؛ إذن، $F(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ قابل للفصل على $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$؛ إذن، E قابل للفصل على F بحسب المبرهنة 9.51، معممة بالاستقراء الرياضي. ♦

الحقول الكاملة

نتحول الآن إلى إثبات أنّ α يمكن أن تفشل في أن تكون قابلة للفصل على F فقط، إذا كان F حقلًا غير منته ذا مميز $p \neq 0$، إحد الطرق هي تقديم المشتقات الشكلية لكثيرات الحدود، وعلى الرغم من أنها تقنية رائعة ومفيدة كذلك، فإننا – ورغبة في الاختصار– سنستخدم بدلاً منها التمهيدية الآتية، ستقدم المشتقات الشكلية في التمارين من 15 إلى 22.

11.51 تمهيدية ليكن $\bar{F}$ إغلاقًا جبريًّا لـ F، ولتكن:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

أي كثيرة حدود أحادية في $\bar{F}[x]$، فإذا كانت $(f(x))^m \in F[x]$ و $1 \neq 0$. m في F، فإن $f(x) \in F[x]$، أي إنّ كل $a_i \in F$.

البرهان يجب أن نثبت أنّ $a_i \in F$، سنعمل – باستخدام الاستقراء الرياضي على r– لإثبات أنّ $a_{n-r} \in F$. إذا كان $r = 1$

$$(f(x))^m = x^{mn} + (m \cdot 1)a_{n-1}x^{mn-1} + \cdots + a_0^m.$$

ولأنَّ $(f(x))^m \in F[x]$، فإننا نحصل وبوجه خاص على:

$$(m \cdot 1)a_{n-1} \in F$$

إذن، $a_{n-1} \in F$ ؛ لأنّ $1 \neq 0$. m في F.

بوصفها فرضية للاستقراء، افترض أنّ $a_{n-r} \in F$ و $r = 1, 2, \dots, k$؛ إذن، معامل $x^{mn-(k+1)}$ في $(f(x))^m$ يكون على الصورة:

$$(m \cdot 1)a_{n-(k+1)} + g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}),$$

حيث $g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ هي تعبير بكثيرة حدود شكلية في $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$. بحسب فرضية الاستقراء التي ذكرناها آنفًا، $g_{k+1}(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \in F$، وهكذا، فإنّ $a_{n-(k+1)} \in F$؛ لأن $m \cdot 1 \neq 0$ في F. ♦

نحن الآن في موضع معالجة الحقول F ذات المميز صفر، وإثبات أنه لامتداد منته E لـ F، فإنّ $[E:F]=\{E:F\}$. وبحسب التعريف، هذا يعادل إثبات أنّ كل امتداد منتهٍ لحقل ذيّ مميز صفر، يكون امتدادًا قابلًا للفصل، نعطي في البداية تعريفًا.

12.51 تعريف يكون الحقل كاملاً (**Perfect**) إذا كان كل امتداد منتهٍ قابلًا للفصل. ■

13.51 مبرهنة كل حقل مميزه صفر كامل.

البرهان ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F ذي المميز صفر، ولتكن $\alpha \in E$؛ إذن، تتحلل $f(x) = \mathrm{irr}(\alpha,F)$ في $\overline{F}[x]$ إلى $\prod_i (x-\alpha_i)^v$ ، حيث α_i الأصفار المختلفة لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ وافترض $\alpha = \alpha_1$؛ إذن:

$$f(x) = \left(\prod_i (x-\alpha_i)\right)^v$$

ولأن $v.\ 1 \neq 0$ في حقل F مميزه صفر، فيجب أن يكون:

$$\left(\prod_i (x-\alpha_i)\right) \in F[x]$$

بحسب التمهيدية 11.51؛ ولأن $f(x)$ غير مختزلة وذات درجة صغرى في $F[x]$ و α صفر لها، نرى أنّ $v = 1$؛ إذن، α قابلة للفصل على F لكل $\alpha \in E$. وهذا يعني، وبحسب النتيجة 10.51 أنّ E امتداد قابل للفصل على F. ♦

ستدخلنا التمهيدية 11.51 لحالة الحقول المنتهية على الرغم من أنّ برهانها أصعب قليلاً.

14.51 مبرهنة كل حقل منتهٍ كامل.

البرهان ليكن F حقلًا منتهيًا مميزه p، وليكن E امتدادًا منتهيًا لـ F، ولتكن $\alpha \in E$. نريد إثبات أنّ α قابلة للفصل على F. الآن، $f(x)=\mathrm{irr}(\alpha,F)$ تتحلل في $\overline{F}$ إلى $\prod_i (x-\alpha_i)^v$ ، حيث α_i الأصفار المختلفة لـ $f(x)$، وافترض أنّ $\alpha = \alpha_1$. لتكن $v = p^t e$ ،

حيث p لا تقسم e؛ إذن:

$$f(x) = \prod_i (x-\alpha_i)^v = \left(\prod_i (x-\alpha_i)^{p^t}\right)^e$$

تنتمي إلى $F[x]$، وبحسب التمهيدية 11.51 ، فإنّ $\prod_i (x-\alpha_i)^{p^t}$ تنتمي إلى $F[x]$؛ لأن $e.1 \neq 0$ في F، ولأن $f(x) = \mathrm{irr}(\alpha,F)$ ذات درجة صغرى على F و α صفر لها، فيجب أن يكون $e = 1$.

تثبت المبرهنة 19.48 والملاحظة اللاحقة لها أنّ:

$$f(x) = \prod_i (x-\alpha_i)^{p^t} = \left(\prod_i x^{p^t} - \alpha_t^{p^t}\right)$$

إذن، إذا افترضنا $f(x)$ مثل $g(x^{p^t})$، فيجب أن تكون $g(x) \in F[x]$. الآن، $g(x)$ قابلة للفصل على F وأصفارها المختلفة $\alpha_i^{p^t}$. افترض $F(\alpha_1^{p^t}) = F(\alpha^{p^t})$؛ إذن، $F\left(\alpha^{p^t}\right)$ قابل للفصل على F، ولأنّ $x^{p^t} - \alpha^{p^t} = (x-\alpha)^{p^t}$، فنرى أنّ α هو الصفر الوحيد لـ $x^{p^t} - \alpha^{p^t}$ في $\overline{F}$. يجب أن يكون كذلك حقلًا منتهيًا – لأنه فضاء متجهات منتهي البعد على حقل منتهٍ F– إذن، الدالة

$$\sigma_p : F(\alpha^{p^t}) \to F(\alpha^{p^t})$$

المعطاة بـ $\sigma_p(a) = a^p$، حيث $a \in F(\alpha^{p^t})$، تماثل ذاتي على حسب المبرهنة 19.48. وعليه، $(\sigma_p)^t$ تماثل ذاتي كذلك على، $F(\alpha^{p^t})$، و $(\sigma_p)^t(a) = a^{p^t}$

لأنّ التماثل الذاتي على $F(\alpha^{p^t})$ هو دالة غامرة، فيوجد $\beta \in F(\alpha^{p^t})$، بحيث $(\sigma_p)^t(\beta) = \alpha^{p^t}$. وهكذا، $\beta^{p^t} = \alpha^{p^t}$ وقد رأينا أن α هو الصفر الوحيد لـ $x^{p^t} - \alpha^{p^t}$؛ ولذلك، فيجب أن يكون $\beta = \alpha$. لأنّ $\beta \in F\left(\alpha^{p^t}\right)$، فإننا نحصل على $F(\alpha) = F\left(\alpha^{p^t}\right)$، ولأنَّ $F\left(\alpha^{p^t}\right)$ كانت قابلة للفصل على F، فإننا نرى الآن أنّ $F(\alpha)$ قابلة للفصل على F؛ لذلك، α قابلة للفصل على F و $t = 0$.

أثبتنا أنه لـ $\alpha \in E$، α قابلة للفصل على F؛ إذن وبحسب النتيجة 10.51، E امتداد قابل للفصل على F. ♦

لقد أكملنا هدفنا، الذي كان إثبات أنّ كل حقل مميزه 0 وكل حقل منتهٍ له فقط امتدادات منتهية قابلة للفصل، أي إنّ هذه الحقول كاملة، وللامتدادات المنتهية E لمثل هذه الحقول الكاملة F، يكون $[E:F]=\{E:F\}$.

مبرهنة العناصر البدائية

المبرهنة الآتية كلاسيكية في مبرهنة الحقول.

15.51 مبرهنة (**مبرهنة العناصر البدائية**): ليكن E امتدادًا منتهيًا قابلًا للفصل على الحقل F؛ إذن، يوجد $\alpha \in E$ بحيث $F = F(\alpha)$ (مثل هذا العنصر α يسمى **عنصرًا بدائيًا** (**Primitive element**))، بمعنى أنّ الامتداد المنتهي القابل للفصل لحقل يكون امتدادًا بسيطًا.

البرهان: إذا كان F حقلًا منتهيًا، فإنّ E حقل منتهٍ كذلك، لتكن α مولدة للزمرة الدورية E^* من العناصر غير الصفرية في E بالنسبة إلى الضرب. (انظر المبرهنة 5.33). من الواضح أنّ $E=F(\alpha)$، وهكذا فإنّ α عنصر بدائي في هذه الحالة.

نفترض الآن أنّ F غير منتهٍ، ونثبت مبرهنتنا في حالة $E=F(\beta,\gamma)$، فالمناقشة بالاستدلال الرياضي من هنا إلى الحالة العامة واضحة. لتكن $\mathrm{irr}(\beta, F)$ لها أصفار مختلفة $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_n$، ولتكن $\mathrm{irr}(\gamma, F)$ لها أصفار مختلفة $\gamma = \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ في $\overline{F}$، حيث الأصفار جميعها ذات تكرار 1؛ لأن E امتداد قابل للفصل على F، ولأنّ F غير منتهٍ، فنستطيع أن نجد $a \in F$، بحيث:

$$a \neq (\beta_i - \beta)/(\gamma - \gamma_j)$$

لكل i و j حيث $j \neq 1$ ، بمعنى أنّ $a(\gamma - \gamma_j) \neq \beta_i - \beta$ ، وبجعل $\alpha = \beta + a\gamma$، فإننا نحصل على $\alpha = \beta + a\gamma \neq \beta_i + a\gamma_j$؛ إذن،

$$\alpha - a\gamma_j \neq \beta_i$$

لكل i ولكل $j \neq 1$. لتكن $f(x) = \text{irr}(\beta, F)$، وافترض

$$h(x) = f(\alpha - ax) \in (F(\alpha))[x].$$

الآن، $h(\gamma) = f(\beta) = 0$، على أيّ حال، $h(\gamma_j) \neq 0$ لكل $j \neq 1$ بالتعريف؛ لأن β_i هي الأصفار الوحيدة لـ $f(x)$؛ إذن، $h(x)$ و $g(x) = \text{irr}(\gamma, F)$ لهما عامل مشترك في $(F(\alpha)[x])$، وهو $\text{irr}(\gamma, F(\alpha))$ الذي يجب أن يكون خطيًّا؛ لأن γ هو الصفر الوحيد المشترك لـ $g(x)$ و $h(x)$؛ إذن، $\gamma \in F(\alpha)$؛ ولذلك، $\beta = \alpha - a\gamma$ تنتمي لـ $F(\alpha)$؛ إذن، $F(\beta, \gamma) = F(\alpha)$. ♦

16.51 نتيجة يكون الامتداد المنتهي لحقل مميزه صفر امتدادًا بسيطًا.

البرهان تثبت النتيجة مباشرة من المبرهنتين 13.51 و 15.51. ♦

نرى أنّ الاحتمال الوحيد "للحالة السيئة" حيث يمكن أن يكون الامتداد المنتهي غير بسيط هو الامتداد المنتهي لحقل غير منتهٍ مميزه $p \neq 0$.

■ تمارين 51

حسابات

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد α بحيث يكون الحقل المعطى $\mathbb{Q}(\alpha)$، وأثبت أنّ α هي بالتأكيد في الحقل المعطى، تحقق مستخدمًا الحسابات المباشرة أنّ المولدات المعطاة للامتداد على $\mathbb{Q}$ ، يمكن بالتأكيد التعبير عنها بوصفها كثيرة حدود شكلية باستخدام α ومعاملات من $\mathbb{Q}$.

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ **2.** $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{2})$

3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ **4.** $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{2})$

مفاهيم

في التمرينين 5 و 6، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب، – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

5. ليكن $\overline{F}$ الإغلاق الجبري للحقل F، تكرار الصفر $\alpha \in F$ لكثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$ هو $\nu \in \mathbb{Z}^+$، إذا وفقط إذا كان $(x-\alpha)^\nu$ هو أعلى قوة لـ $x-\alpha$ ، وتكون عاملًا لـ $f(x)$ في $F[x]$.

6. ليكن $\overline{F}$ إغلاقًا جبريًّا لـ F. العنصر α في $\overline{F}$ قابل للفصل على F ، إذا وفقط إذا كانت α صفرًا ذا تكرار 1 لـ $\text{irr}(\alpha,F)$.

7. أعطِ مثالاً على $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ لا أصفار لها في $\mathbb{Q}$ ، ولكن أصفارها في $\mathbb{C}$ لها تكرار 2. فسّر كيف يتوافق هذا مع المبرهنة 13.51، التي تثبت أنّ $\mathbb{Q}$ حقل كامل.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. كل امتداد منتهٍ لأيّ حقل F قابل للفصل على F.

______ ب. كل امتداد منتهٍ لأيّ حقل منتهٍ F قابل للفصل على F.

______ جـ. كل حقل ذي مميز 0 كامل.

______ د. كل كثيرة حدود من الدرجة n على أيّ حقل F، لها دائمًا n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$.

______ هـ. كل كثيرة حدود من الدرجة n على أيّ حقل كامل F ، لها دائمًا n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$.

______ و. كل كثيرة حدود غير مختزلة من الدرجة n على أيّ حقل كامل F ، لها دائمًا n من الأصفار المختلفة في $\overline{F}$.

______ ز. كل حقل مغلق جبريًّا كامل.

______ ح. كل حقل F له امتداد جبري E بحيث يكون كاملاً.

______ ط. إذا كان الحقل E امتداد انشطار منتهيًا قابلًا للفصل على F، فإنّ $|G(E/F)| = [E : F]$.

______ ي. إذا كان الحقل E امتداد انشطار منتهيًا لـ F، فإنّ $|G(E/F)|$ يقسم $[E:F]$.

براهين

9. أثبت أنه إذا كان كلا $\alpha, \beta \in \overline{F}$ قابلين للفصل على F، فإنّ $\alpha \pm \beta$ ،$\alpha\beta$ و α/β، إذا كانت $\beta \neq 0$ كلها قابلة للفصل على F.

[مساعدة: استخدم المبرهنة 9.51 ونتيجتها].

10. أثبت أنّ $\{1, y, \ldots, y^{p-1}\}$ أساس لـ $\mathbb{Z}_p(y)$ على $\mathbb{Z}_p(y^p)$، حيث y غير معينة. بالرجوع إلى المثال 4.51، استنتج بمناقشة الدرجة أنّ $x^p - t$ غير مختزلة على $\mathbb{Z}_p(t)$، حيث $t = y^p$.

11. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا لحقل كامل F، فإنّ E كامل.

12. الامتداد الجبري – الذي يمكن أن يكون غير منته– E على الحقل F **امتداد قابل للفصل على** F (**Separable extension**)، إذا كان لكل $\alpha \in E$. $F(\alpha)$ امتداد قابل للفصل على F، بالمعنى المعرّف في الكتاب. أثبت أنّ E امتداد يمكن أن يكون غير منته – قابل للفصل على F و K امتداد – يمكن أن يكون غير منته – قابل للفصل على E، فإنّ K امتداد قابل للفصل على F.

13. ليكن E امتدادًا جبريًّا للحقل F. أثبت أنّ مجموعة عناصر E جميعها القابلة للفصل على F تشكل حقلًا جزئيًّا من E، **الإغلاق القابل للفصل لـ** F في E (**Separable Closure**). [مساعدة: استخدم التمرين 9].

14. ليكن E حقلًا منتهيًا من الرتبة p^n.

أ. أثبت أنّ التماثل الذاتي لفروبينس σ_p له رتبة n.

ب. استنتج من الفرع (أ) أنّ $G(E/\mathbb{Z}_p)$ دورية من الرتبة n ومولدة بـ σ_p.

[مساعدة: تذكر أنّ $|G(E/F)| = \{E : F\} = [E : F]$ لامتداد الانشطار المنتهي القابل للفصل E على F].

تقدم التمارين من 15 إلى 22 المشتقات الشكلية في $F[x]$.

15. ليكن F أيّ حقل، ولتكن $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_n x^n$ في $F[x]$. **المشتقة** $f'(x)$ لـ $f(x)$ (**derivative**) هي كثيرة الحدود

$$f'(x) = a_1 + \cdots + (i \cdot 1) a_i x^{i-1} + \cdots + (n \cdot 1) a_n x^{n-1}$$

حيث $i.1$ لها معناها الطبيعي لـ $i \in \mathbb{Z}^+$ و $1 \in F$. هذه مشتقات شكلية؛ لا «نهايات» متطلبة هنا.

أ. أثبت أنّ الدالة $D: F[x] \to F[x]$ المعطاة بـ $D(f(x)) = f'(x)$، تشاكل على $\langle F[x], +\rangle$.

ب. أوجد نواة D في حالة مميز F يساوي 0.

جـ. أوجد نواة D في حالة مميز F يساوي $p \neq 0$.

16. استكمالاً لأفكار التمرين 15، أثبت أنّ:

أ. $D(\alpha f(x)) = \alpha D(f(x))$ لكل $f(x) \in F[x]$ و $\alpha \in F$.

ب. $D(f(x) g(x)) = f(x) g'(x) + f'(x) g(x)$ لكل $f(x), g(x) \in F[x]$. [مساعدة: استخدم الفرع (أ) من هذا التمرين والتمرين السابق، ثم أكمل مستخدمًا الاستقراء الرياضي على درجة $f(x)g(x)$].

جـ. $D((f(x))^m) = (m \cdot 1) f(x)^{m-1} f'(x)$ **لكل** $f(x) \in F[x]$. [**مساعدة: استخدم الفرع (ب)**].

17. لتكن $f(x) \in F[x]$، وليكن $a \in \overline{F}$ صفرًا لـ $f(x)$ تكراره ν، فأثبت أنّ $\nu > 1$ إذا وفقط إذا كانت α صفرًا كذلك لـ $f'(x)$.

[مساعدة: طبّق الفرع (ب) و(جـ) في التمرين 16 على التحليل $f(x) = (x - \alpha)^\nu g(x)$ لـ $f(x)$ في الحلقة].

18. أثبت مستخدمًا التمرين 17، أنّ كل كثيرة حدود غير مختزلة على حقل F مميزه 0 قابلة للفصل.

[مساعدة: استخدم حقيقة أنّ $\operatorname{irr}(\alpha, F)$ كثيرة حدود ذات درجة صغرى لـ α على F].

19. أثبت مستخدمًا التمرين 17 ، أنّ كثيرة الحدود غير المختزلة $q(x)$ على حقل F مميزه $p \neq 0$ غير قابلة للفصل، إذا وفقط إذا كان كل أسّ لكل حدّ في $q(x)$ يقسم بـ p.

20. عمّم التمرين 17، بإثبات أنّ $f(x) \in F[x]$ لا أصفار لها بتكرار > 1 ، إذا وفقط إذا كانت $f(x)$ و $f'(x)$ بلا قواسم مشتركة في $\overline{F}[x]$ من درجة > 0.

21. بجعل العمل أكثر صعوبة من العمل في التمرين 20، أثبت أنّ $f(x) \in F[x]$ لا أصفار لها بتكرار > 1، إذا وفقط إذا كانت $f(x)$ و $f'(x)$ بلا قواسم مشتركة غير ثابتة في $F[x]$. [مساعدة: استخدم المبرهنة 9.46 في إثبات أنه إذا كان 1 هو القاسم المشترك الأكبر لـ $f(x)$ و $f'(x)$ في $F[x]$، فإنه القاسم المشترك الأكبر لهما في $\overline{F}[x]$ كذلك].

22. صف إجراءً حسابيًّا عمليًّا لتحديد ما إذا كانت $f(x) \in F[x]$ لها أصفار تكرارها > 1، من غير إيجاد أصفار $f(x)$ فعليًّا. [مساعدة: استخدم التمرين 21].

الفصل 52 الامتدادات غير القابلة للفصل كليًّا[1] Totally Inseparable Extensions

يثبت هذا الفصل أنّ الامتداد المنتهي E للحقل F يمكن أن يقسم إلى مرحلتين، هما: امتداد قابل للفصل K على F، متبوعًا بامتداد آخر لـ K إلى E، الذي يكون أبعد عن أنّه قابل للفصل بوصفه أبعد ما يمكن أن يتخيله المرء.

سنطور نظريتنا عن الامتدادات غير القابلة للفصل كليًّا بطريقة موزاية لطريقة تطوير الامتدادات القابلة للفصل.

1.52 تعريف يكون الامتداد المنتهي E للحقل F **غير قابل للفصل كليًّا على** F **(totally inseparable extension)**، إذا كان $\{E:F\} = 1 < [E:F]$، ويكون العنصر a في $\overline{F}$ **غير قابل للفصل كليًّا على** F، إذا كان $F(a)$ غير قابل للفصل كليًّا على F. ■

نعلم أنّ $\{F(\alpha):F\}$ يساوي عدد الأصفار المختلفة لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$؛ إذن، α غير قابلة للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا كانت $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ لها صفر واحد تكراره > 1.

2.52 مثال بالعودة إلى المثال 5.51، نرى أنّ $\mathbb{Z}_p(y)$ غير قابل للفصل كليًّا على $\mathbb{Z}_p(y^p)$، حيث y غير معينة. ▲

3.52 مبرهنة (نظيرة المبرهنة 9.51): إذا كان K امتدادًا منتهيًا لـ E، وكان E امتدادًا منتهيًا لـ F، و$F \le E \le K$، فإنّ K غير قابل للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا كان K غير قابل للفصل كليًّا على E، وE غير قابل للفصل كليًّا على F.

البرهان لأنَّ $F < E < K$، فإننا نحصل على $[K:E] > 1$ و$[E:F] > 1$. افترض أنّ K غير قابل للفصل كليًّا على F؛ إذن، $\{K:F\} = 1$، و $\{K:F\} = \{K:E\}\{E:F\}$,

إذن، يجب أن نحصل على:

$$\{K:E\} = 1 < [E:F] \quad \text{و} \quad \{E:F\} = 1 < [K:E]$$

وبذلك، K غير قابل للفصل كليًّا على E، وE غير قابل للفصل كليًّا على F.

في المقابل، إذا كان K غير قابل للفصل كليًّا على E، و E غير قابل للفصل كليًّا على F، فإنّ:

$$\{K:F\} = \{K:E\}\{E:F\} = (1)(1) = 1,$$

و$[K:F] > 1$؛ إذن K غير قابل للفصل كليًّا على F. ◆

4.52 نتيجة (نظيرة النتيجة **10.51**): إذا كان E امتدادًا منتهيًا لـ F، فإنّ E غير قابل للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا كانت كل α في E و$\alpha \notin F$ غير قابلة للفصل كليًّا على F.

البرهان افترض أنّ E غير قابل للفصل على F، ولتكن $\alpha \in E$ و $\alpha \notin F$، فإنّ

$$F < F(\alpha) \le E$$

إذا كان $F(\alpha) = E$، نكون قد انتهينا، بحسب تعريف α غير قابلة للفصل كليًّا على F.

إذا كان $F < F(\alpha) < E$، فإنّ المبرهنة 3.52 تثبت ذلك؛ ولأن E غير قابل للفصل كليًّا على F، فإنّ $F(\alpha)$ غير قابل للفصل كليًّا على F.

---

[1] لن يستخدم هذا الفصل فيما تبقى من الكتاب

في المقابل، افترض أنه لكل $\alpha \notin F, \alpha \in E$ و α غير قابلة للفصل كليًّا على F. لأنَّ E منتهٍ على F، فيوجد $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$، بحيث:

$$F < F(\alpha_1) < F(\alpha_1, \alpha_2) < \cdots < E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

ولأنَّ كل α_i غير قابلة للفصل كليًّا على F، α_i غير قابلة للفصل كليًّا على $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$؛ لأن $q(x) = \text{irr}(\alpha_i, F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}))$ تقسم $\text{irr}(\alpha_i,F)$ بحيث α_i هو الصفر الوحيد لـ $q(x)$ وله تكرار > 1؛ إذن، $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ غير قابل للفصل كليًّا على $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1})$، و E غير قابل للفصل كليًّا على F، بحسب المبرهنة 3.52 معممة باستخدام الاستقراء الرياضي. ♦

لقد قمنا بعمل موازٍ لعملنا في الفصل 51، بحيث نستطيع التعامل مع هذه الأفكار معًا.

الإغلاقات القابلة للفصل

نأتي الآن للسبب الرئيس لإدراج هذه المادة.

5.52 مبرهنة ليكن F ذا مميز $p \neq 0$، وليكن E امتدادًا منتهيًا لـ F؛ إذن، $\alpha \in E$ و $\alpha \notin F$ غير قابلة للفصل كليًّا على F، إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح $t \geq 1$، بحيث $\alpha^{p^t} \in F$.

وكذلك يوجد امتداد وحيد K لـ F، بحيث $F \leq K \leq E$ و K قابل للفصل على F، وإما $E = K$ أو E غير قابل للفصل كليًّا على K.

البرهان لتكن $\alpha \in E$، $\alpha \notin F$، غير قابلة للفصل كليًّا على F؛ إذن، يوجد صفر وحيد α لـ $\text{irr}(\alpha,F)$ (تكراره > 1)، وكما جاء في إثبات المبرهنة 14.51، يجب أن تكون $\text{irr}(\alpha,F)$ على الصورة:

$$x^{p^t} - \alpha^{p^t}.$$

إذن، $\alpha^{p^t} \in F$، حيث $t \geq 1$.

في المقابل، إذا كانت $\alpha^{p^t} \in F$ حيث $t \geq 1$ و $\alpha \in E$، $\alpha \notin F$ فإنّ:

$$x^{p^t} - \alpha^{p^t} = (x - \alpha)^{p^t}$$

و $(x^{p^t} - \alpha^{p^t}) \in F[x]$، مثبتًا أنّ $\text{irr}(\alpha,F)$ تقسم $(x - \alpha)^{p^t}$؛ إذن، α هو الصفر الوحيد لـ $\text{irr}(\alpha,F)$، وهذا الصفر تكراره > 1، ما يعني أنّ α غير قابلة للفصل كليًّا على F.

للجزء الثاني من المبرهنة، لتكن $E = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$؛ إذا كان

$$\text{irr}(\alpha_i, F) = \prod_j \left(x^{p^{t_i}} - \alpha_{ij}{}^{p^{t_i}}\right)$$

حيث $\alpha_{i1} = \alpha_i$، لتكن $\beta_{ij} = \alpha_{ij}{}^{p^{t_i}}$، نحصل على $F(\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{n1}) \leq E$، و β_{i1} صفر لـ

$$f_i(x) = \prod_j \left(x - \beta_{ij}\right)$$

حيث $f_i(x) \in F[x]$؛ لأنَّ الرفع للقوة p يعطي التماثل σ_p من E إلى حقل جزئي من E، الرفع إلى القوة p^t هو دالة التماثل $(\sigma_p)^t$ من E إلى حقل جزئي من E، ولأنَّ α_{ij} كلها مختلفة لـ i محددة، فكذلك ألـ β_{ij} لـ i محددة؛ لذلك، β_{ij} قابلة للفصل على F،

لأنه صفر لكثيرة الحدود $f_i(x)$ في $F[x]$، التي أصفارها ذات تكرار 1؛ إذن:

$$K = F(\beta_{11}, \beta_{21}, \cdots, \beta_{n1})$$

قابل للفصل على F، بحسب برهان النتيجة 10.51.

إذا كانت كل ألـ $p^{t_i} \neq 1$، فإنّ $K=E$، أمّا إذا كان بعض ألـ $p^{t_i} \neq 1$، فإنّ $K \neq E$، و $\alpha_i^{p^{t_i}} = \beta_{i1}$ عنصر في K، ما يثبت أنّ كل $\alpha_i \notin K$ غير قابل للفصل كليًّا على K – بحسب الجزء الأول من هذه المبرهنة –.

إذن، $E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ غير قابلة للفصل كليًّا على K – بحسب برهان النتيجة 4.52.

ينتج من النتيجتين 10.51 و 4.52 أنّ الحقل K يتكوّن من العناصر α جميعها في E القابلة للفصل على F؛ إذن K وحيد. ◆

6.52 تعريف يسمى الحقل الوحيد K في المبرهنة 5.52 **الإغلاق القابل للفصل** لـ F في E **(separable closure)**. ■

تعرض المبرهنة السابقة التركيب الدقيق للامتدادات غير القابلة للفصل كليًّا لحقل مميزه $p \neq 0$. يمكن الحصول على هذا الامتداد بتكرار إضافة الأصفار التي ترتيبها p لعناصر ليست قوًى لـ p.

نشير إلى أنّ المبرهنة 5.52 صحيحة للامتدادات الجبرية غير المنتهية E لـ F. إثبات الجزء الأول من المبرهنة صحيح كذلك في حالة الامتدادات غير المنتهية، أما الجزء الثاني، فلأنَّ $\alpha \pm \beta$، $\alpha\beta$، و α/β، عندما $\beta \neq 0$ كلها محتواة في الحقل $F(\alpha,\beta)$، فإنّ عناصر E جميعها القابلة للفصل على F تشكل حقلًا جزئيًّا K من E – **الإغلاق القابل للفصل** لـ F في E، ما يؤدي إلى أنّ $\alpha \in E$ و $\alpha \notin K$ غير قابلة للفصل كليًّا على K؛ لأن α ومعاملات $\operatorname{irr}(\alpha, K)$ جميعها محتواة في امتداد منتهٍ لـ F، وعليه، يمكن تطبيق المبرهنة 5.52.

■ تمارين 52

مفاهيم

1. لتكن y و z غير معينة، ولتكن $u = y^{12}$ و $v = z^{18}$. صف الإغلاق القابل للفصل لـ $\mathbb{Z}_3(u, v)$ في $\mathbb{Z}_3(y, z)$.

2. لتكن y و z غير معينة، ولتكن $u = y^{12}$ و $v = y^2z^{18}$. صف الإغلاق القابل للفصل لـ $\mathbb{Z}_3(u, v)$ في $\mathbb{Z}_3(y, z)$.

3. بالرجوع إلى التمرين 1، صف الإغلاق غير القابل للفصل كليًّا (انظر التمرين 6) لـ $\mathbb{Z}_3(u,v)$ في $\mathbb{Z}_3(y,z)$.

4. بالرجوع إلى التمرين 2، صف الإغلاق غير القابل للفصل كليًّا لـ $\mathbb{Z}_3(u, v)$ في $\mathbb{Z}_3(y, z)$. (انظر التمرين 6).

5. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. لا يوجد امتداد جبري فعلي لحقل غير منتهٍ مميزه $p \neq 0$، يمكن أن يكون امتدادًا قابلًا للفصل.

______ ب. إذا كان $F(\alpha)$ غير قابل للفصل كليًّا على F ذي المميز $p \neq 0$، فإنّ $\alpha^{p^t} \in F$ حيث $t > 0$.

______ جـ. لغير المعين y، $\mathbb{Z}_5(y)$، قابل للفصل على $\mathbb{Z}_5(y^5)$.

______ د. لغير المعين y، $\mathbb{Z}_5(y)$، قابل للفصل على $\mathbb{Z}_5(y^{10})$.

______ هـ. لغير المعين y، $\mathbb{Z}_5(y)$، غير قابل للفصل كليًّا على $\mathbb{Z}_5(y^{10})$.

______ و. إذا كان F حقلًا و α جبرية على F، فإنّ α إما قابلة للفصل أو غير قابلة للفصل كليًّا على F.

______ ز. إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ لـ F إغلاقًا قابلًا للفصل في E.

______ ح. إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ E غير قابل للفصل كليًّا على الإغلاق القابل للفصل لـ F في E.

______ ط. إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، و E ليس امتدادًا قابلًا للفصل على F، فإنّ E غير قابل للفصل كليًّا على الإغلاق القابل للفصل لـ F في E.

______ ي. إذا كانت α غير قابلة للفصل كليًّا على F، فإنّ α هو الصفر الوحيد لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$.

براهين

6. أثبت أنه إذا كان E امتدادًا جبريًّا للحقل F، فإنّ اتحاد F ومجموعة عناصر E غير القابلة للفصل كليًّا على F، تشكل حقلًا جزئيًّا من E، **الإغلاق غير القابل للفصل كليًّا لـ F في E (totally inseparable closure)**.

7. أثبت أنّ الحقل F ذا المميز $p \neq 0$ كامل إذا وفقط إذا كان $F^p = F$، بمعنى أنّ كل عنصر في F هو القوة p لعنصر في F.

8. ليكن E امتدادًا منتهيًا للحقل F ذي المميز p. باستخدام مصطلحات التمرين 7، أثبت أنّ $E^p = E$ إذا وفقط إذا كان $E^p = E$. [مساعدة: الدالة $\sigma_p: E \to E$ المعرفة بـ $\sigma_p(\alpha) = \alpha^p$، حيث $\alpha \in E$ تماثل إلى حقل جزئي من E. افترض المخطط في الشكل 7.52 ثم ناقش الدرجة].

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dd, dash] \\
E^p \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash] & \\
 & F \\
E^p \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

الشكل 7.52

الفصل 53 مبرهنة جالوا Galois Theory

ملخّص

هذا الفصل ربما يكون ذروة مادة البحث في كل الكتاب، حيث تعطي مبرهنة جالوا التفاعل الجميل بين نظريتي الزمر والحقول، وقد كان عملنا يقصد هذا الهدف بدءًا من الفصل 48، وسنبدأ باستذكار النتائج الرئيسة التي طوّرناها، حيث يتعيّن أن تكون في الذاكرة تمامًا:

1. ليكن $F \leq E \leq \overline{F}$ ، $\alpha \in E$ ، ولتكن β مرافقة لـ α على F بمعنى أنّ β صفر كذلك لـ $\operatorname{irr}(\alpha, F)$؛ إذن، يوجد تماثل $\psi_{\alpha,\beta}$ يربط $F(\alpha)$ بصورة غامرة مع $F(\beta)$، ويترك F ثابتة، ويربط α بـ (β).
2. إذا كان $F \leq E \leq \overline{F}$ و $\alpha \in E$ ، فإنّ التماثل الذاتي σ على $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يجب أن يربط α بأحد مرافقات α على F.
3. إذا كانت $F \leq E$، تشكل مجموعة التماثلات الذاتية على E التي تترك F ثابتة الزمرة $G(E/F)$، فلأيّ مجموعة جزئية S من $G(E/F)$، تشكل مجموعة عناصر E جميعها التي تُترك ثابتة بعناصر S كلها، حقلًا E_S، وكذلك فإنّ $F \leq E_{G(E/F)}$.
4. يكون الحقل E، $F \leq E \leq \overline{F}$، حقل انشطار على F ، إذا وفقط إذا كان كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، تماثل ذاتي على E، وإذا كان E امتدادًا منتهيًا وحقل انشطار على F، فإنّ $\{F : E\} = |G(F/E)|$.
5. إذا كان E امتدادًا منتهيًا لـ F، فإنّ $\{E: F\}$ يقسم $[E: F]$، وإذا كان E قابلًا للفصل على F كذلك، فإنّ $\{E : F\} = [E : F]$، وكذلك فإنّ E قابل للفصل على F، إذا وفقط إذا كانت أصفار $\operatorname{irr}(\alpha,F)$ جميعها تكرارها 1، لكل $\alpha \in E$.
6. إذا كان E امتدادًا منتهيًا على F وقابلًا للفصل وحقل انشطار على F، فإنّ:
$$|G(E/F)| = \{E : F\} = [E : F].$$

الامتدادات الناظمية

سنكون مهتمين بالامتدادات المنتهية K لـ F ، بحيث إنّ كل تماثل من K إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يكون تماثلًا ذاتيًا على K، ويحقق:

$$[K : F] = \{K : F\}.$$

بالنظر إلى النتيجتين 4 و5، هذه هي الامتدادات المنتهية لـ F التي تكون قابلة للفصل وحقول انشطار على F.

1.53 تعريف يكون الامتداد المنتهي K لـ F امتدادًا ناظميًا منتهيًا لـ F **(finite normal extension)** ، إذا كان K قابلًا للفصل وحقل انشطار على F. ■

افترض أنّ K امتداد منته ناظمي على F، حيث $F \leq K$ –كالعادة– إذن وبحسب النتيجة 4، كل تماثل على $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، ينتج تماثلًا ذاتيًا على K، وكما في السابق نترك $G(K/F)$ لتكون زمرة التماثلات الذاتية جميعها المعرفة على K وتترك F ثابتة، إذ سنكون جاهزين بعد خطوة واحدة أخرى لتوضيح المبرهنة الأساسية .

2.53 مبرهنة ليكن K امتدادًا منتهيًا ناظميًا على F، وليكن E امتدادًا لـ F، بحيث $F \leq E \leq K \leq \overline{F}$ ؛ إذن، K امتداد منتهٍ ناظمي على E، و $G(K/E)$ هو بالتحديد الزمرة الجزئية.

من $G(K/F)$ المكوّنة من التماثلات الذاتية التي تترك E ثابتة. إضافة إلى ذلك، يولد التماثلان الذاتيان σ و τ من $G(K/F)$ التماثل نفسه من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$، إذا وفقط إذا كانا في المجموعة المشاركة اليسرى نفسها لـ $G(K/E)$ في $G(K/F)$.

البرهان إذا كان K حقل انشطار للمجموعة $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ من كثيرات الحدود في $F[x]$، فإنّ K حقل انشطار على E لهذه المجموعة نفسها من كثيرات الحدود معتبرة بوصفها عناصر في $E[x]$، حيث تثبت المبرهنة 9.51 أنّ K قابل للفصل على E؛ لأنه قابل للفصل على F؛ إذن،K امتداد ناظمي على E، وهذا يبرهن الزعم الأول.

الآن كل عنصر في $G(K/E)$ هو تماثل ذاتي على K ويترك F ثابتة؛ لأنها تترك الحقل الأكبر E ثابتًا؛ إذن، يمكن النظر إلى $G(K/E)$ بوصفها مجموعة جزئية من $G(K/F)$، ولأنَّ $G(K/E)$ زمرة مع عملية تركيب الدوال كذلك، فإننا نرى أنّ $G(K/E) \leq G(K/F)$.

أخيرًا، لـ σ وτ في $G(K/E)$، تقع σ وτ في المجموعة المشاركة اليسرى نفسها لـ $G(K/E)$، إذا وفقط إذا كان $\tau^{-1}\sigma \in G(K/E)$، أو إذا وفقط إذا كان $\sigma = \tau\mu$، حيث $\mu \in G(K/E)$؛ ولكن، إذا كان $\sigma = \tau\mu$، حيث $\mu \in G(K/E)$، فإنه لكل $\alpha \in E$

$$\sigma(\alpha) = (\tau\mu)(\alpha) = \tau(\mu(\alpha)) = \tau(\alpha),$$

لأن $\mu(\alpha) = \alpha$ لكل $\alpha \in E$. في المقابل، إذا كان $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha)$ لكل $\alpha \in E$، فإنّ

$$(\tau^{-1}\sigma)(\alpha) = \alpha$$

لكل $\alpha \in E$، وهذا يعني أنّ $\tau^{-1}\sigma$ تترك E ثابتة، و$\mu = \tau^{-1}\sigma$ لذلك تنتمي إلى $G(K/E)$. ♦

تثبت المبرهنة السابقة أنّ هناك تقابلًا بين المجموعات المشاركة اليسرى لـ $G(K/E)$ في $G(K/F)$، والتماثلات من E إلى حقل جزئي من K وتترك F ثابتة. لاحظ أننا لا نستطيع القول: إنّ هذه المجموعات المشاركة اليسرى تقابل تماثلات ذاتية من E على F؛ لأن E قد لا يكون حقل انشطار على F. بالطبع، لو كان E امتدادًا ناظميًّا على F، فإنّ هذه التماثلات ستصبح تماثلات ذاتية من E على F، حيث يمكننا أن نظن أنّ هذا سيحدث، إذا وفقط إذا كان $G(K/E)$ زمرة جزئية ناظمية من $G(K/F)$، وهذه هي الحالة حقًّا.

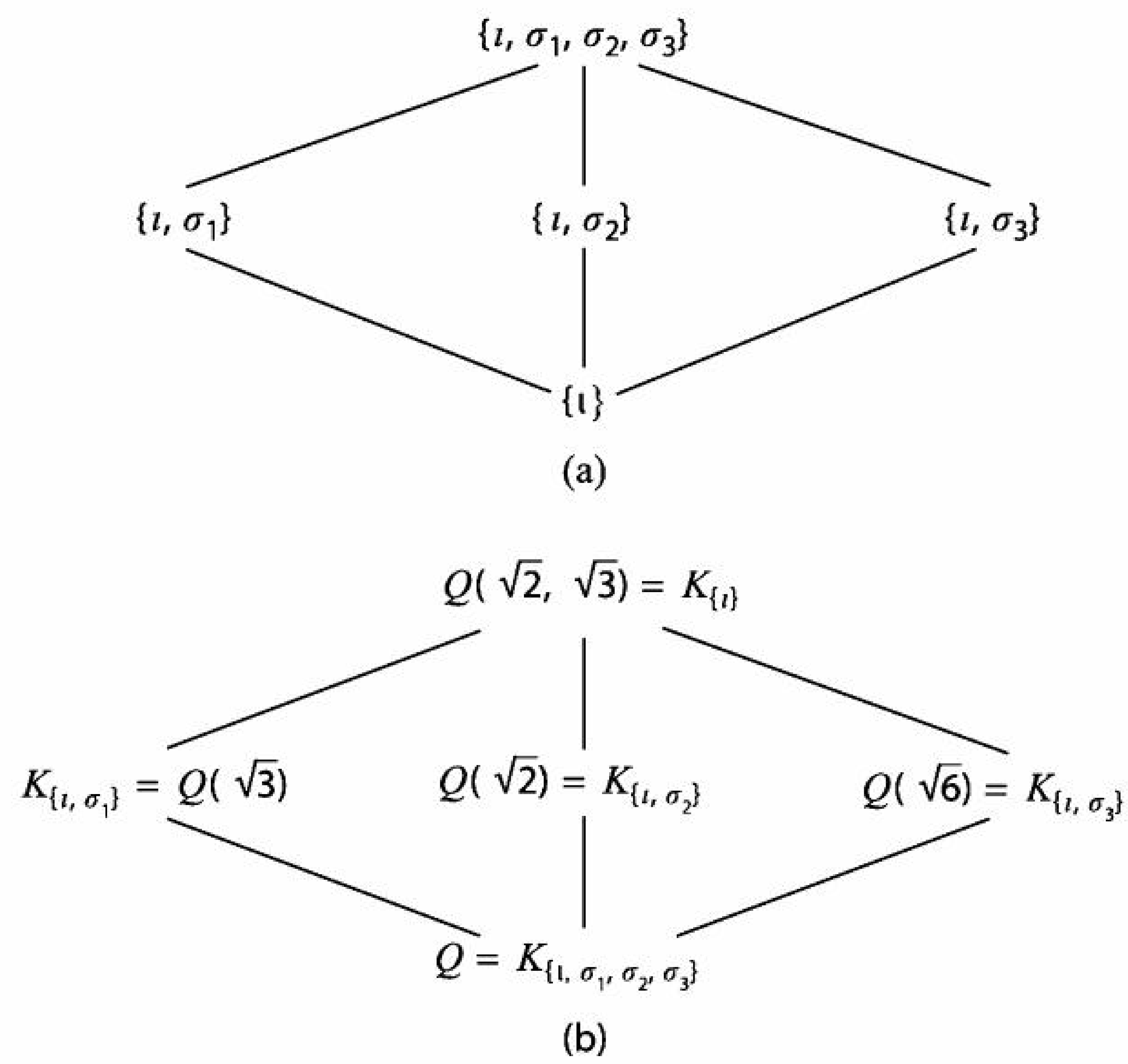
بمعنى أنّ الاستخدامين المختلفين لكلمة ناظمي وثيق الصلة بصورة حقيقية؛ إذن، إذا كان E امتدادًا ناظميًّا لـ F، فإنّ المجموعات المشاركة اليسرى لـ $G(K/E)$ في $G(K/F)$ يمكن النظر إليها بوصفها عناصر في زمرة العامل $G(K/F)/G(K/E)$، وهي زمرة التماثلات الذاتية المؤثرة في E وتترك F ثابتة، سوف نثبت أنّ زمرة العامل هذه تماثل $G(E/F)$.

المبرهنة الأساسية

تنصّ المبرهنة الأساسية في مبرهنة جالوا على أنه لامتداد ناظمي منتهٍ K للحقل F، يوجد تقابل بين الزمر الجزئية لـ $G(K/F)$ والحقول المتوسطة E، حيث $F \leq E \leq K$.

هذا التقابل يربط بكل حقل متوسط E الزمرة الجزئية $G(K/E)$. ويمكننا كذلك الانتقال للجهة الأخرى، والبدء بالزمرة الجزئية H من $G(K/F)$، ونقابل H بالحقل الثابت K_H. سنوضح هذا بمثال، ثمّ نقدّم نصّ المبرهنة، ونناقش إثباتها.

3.53 مثال ليكن $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ الآن K امتداد ناظمي لـ $\mathbb{Q}$، ويثبت المثال 17.48 أنه يوجد أربعة تماثلات ذاتية على K وتترك $\mathbb{Q}$ ثابتة، نُذكّر بها بإعطاء قيمها على الأساس $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\}$ لـ K على $\mathbb{Q}$.



الشكل 4.53 (أ) مخطط الزمر (ب) مخطط الحقول

τ : الدالة المحايدة.

σ_1: تربط $\sqrt{2}$ بـ $-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{6}$ بـ $-\sqrt{6}$ وتترك الباقي ثابتًا.

σ_2: تربط $\sqrt{3}$ بـ $-\sqrt{3}$ ، $\sqrt{6}$ بـ $-\sqrt{6}$ وتترك الباقي ثابتًا.

σ_3: تربط $\sqrt{2}$ بـ $-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ بـ $-\sqrt{3}$ وتترك الباقي ثابتًا.

رأينا أنّ $\{\iota, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ تماثل زمرة كلاين الرباعية، والقائمة الكاملة للزمر الجزئية، ومقرونة بكل زمرة جزئية الحقل المتوسط الذي تتركه ثابتًا، هي كما يأتي:

$$\{i,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\leftrightarrow\mathbb{Q},$$
$$\{i,\sigma_1\}\leftrightarrow\mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$
$$\{i,\sigma_2\}\leftrightarrow\mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
$$\{i,\sigma_3\}\leftrightarrow\mathbb{Q}(\sqrt{6}),$$
$$\{i\}\leftrightarrow\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}).$$

الزمر الجزئية كلها من الزمرة الإبدالية $\{\iota, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ زمر جزئية ناظمية، والحقول المتوسطة كلها امتدادات ناظمية لـ $\mathbb{Q}$، أليس هذا رائعًا؟!

لاحظ أنه إذا كانت إحدى الزمر الجزئية محتواة في أخرى، فإنّ الأكبر من هاتين الزمرتين الجزئيتين تقابل الأصغر من الحقلين الثابتين المقابلين، فكلما كبرت الزمرة الجزئية، أي كلما زاد عدد التماثلات الذاتية صغر الحقل الثابت، أي قلّ عدد العناصر المتروكة ثابتة، لقد أعطينا في الشكل 4.53 الرسومات المتقابلة للزمر الجزئية والحقول المتوسطة، و لاحظ مرة ثانية أنّ الزمر قرب القمة تقابل الحقول قرب القاع، بمعنى أنّ أحد الرسمين يشبه الآخر مقلوبًا رأسًا على عقب، ولأنَّ الرسم هنا في الحقيقة يشبه نفسه مقلوبًا رأسًا على عقب، فإنه ليس مثالاً جيدًا لنا.

لتوضيح المبدأ المقابل، تقدّم إلى الأمام للشكل 6.54 لترى الرسم الذي لا يشبه معكوسه. ▲

5.53 تعريف إذا كان K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا للحقل F، فإنّ $G(K/F)$ **زمرة جالوا** لـ K على F (**Galois group**). ■

سنذكر الآن نصّ المبرهنة الرئيسة، ثم نعطي مثالاً آخر، وأخيرًا نكمل إثبات المبرهنة الأساسية.

6.53 مبرهنة **(المبرهنة الرئيسة في مبرهنة جالوا):** ليكن K امتدادًا منتهيًا ناظميًّا على الحقل F، مع زمرة جالوا $G(K/F)$. لأيّ حقل E، حيث $F \leq E \leq K$، لتكن $\lambda(E)$ الزمرة الجزئية من $G(K/E)$ التي تترك E ثابتة؛ إذن، λ دالة تقابل من مجموعة هذه الحقول المتوسطة E إلى مجموعة الزمر الجزئية من $G(K/F)$، حيث تتحقق الخصائص الآتية لـ λ:

1. $\lambda(E) = G(K/E)$

2. $E = K_{G(K/E)} = K_{\lambda(E)}$

3. إذا كانت $H \leq G(K/F)$ ، فإنّ $\lambda(E_H) = H$:

4. $[K : E] = |\lambda(E)|$ و $[E : F] = (G(K/F) : \lambda(E))$، عدد المجموعات المشاركة اليسرى لـ $\lambda(E)$ في $G(K/F)$.

5. E امتداد ناظمي على F ، إذا وفقط إذا كانت $\lambda(E)$ زمرة جزئية ناظمية من $G(K/F)$، وعندما تكون $\lambda(E)$ زمرة جزئية ناظمية في $G(K/F)$، فإن:

$$G(E/F) \simeq G(K/F)/G(K/E).$$

6. الرسم البياني للزمر الجزئية من $G(K/F)$ ، هو معكوس الرسم البياني للحقول المتوسطة من K على F.

ملاحظات على البرهان: في الحقيقة أثبتنا توًّا جزءًا كبيرًا من هذه المبرهنة، لنرَ كم تبقى علينا لنثبته.

الخاصية 1 هي مجرد تعريف λ المذكور في نصّ المبرهنة، وتثبت المبرهنة 15.48 للخاصية 2 أنّ:

$$E \leq K_{G(K/E)}.$$

لتكن $\alpha \in K$، حيث $\alpha \notin E$، ولأنَّ K امتداد ناظمي على E، وباستخدام تماثل الترافق ومبرهنة تمدد التماثلات، فيمكننا أن نجد تماثلًا ذاتيًا على K، ويترك E ثابتة، ويربط α بالأصفار المختلفة لـ $\operatorname{irr}(\alpha, F)$، وهذا يؤدي إلى أنّ:

$$K_{G(K/E)} \leq E,$$

إذن، $E = K_{G(K/E)}$، وهذا يثبت الخاصية 2، ويخبرنا كذلك بأنّ λ أحادية؛ لأنه إذا كان $\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$، فإننا وبحسب الخاصية 2 نحصل على:

$$E_1 = K_{\lambda(E_1)} = K_{\lambda(E_2)} = E_2$$

الآن، ستكون الخاصية 3 عملنا الأساسي، وهذا يعادل تمامًا إثبات أنّ λ دالة غامرة. بالطبع، إذا كانت $H \leq G(K/F)$، فإنّ $H \leq \lambda(K_H)$؛ لأن H متضمنة بالتأكيد في مجموعة التماثلات الذاتية كلها التي تترك K_H ثابتة، حيث سنستخدم هنا بقوة خاصيتنا $[K : E] = \{K : E\}$.

نستنتج الخاصية 4 من $[K : E] = \{K : E\}, [E : F] = \{E : F\}$، والعبارة الأخيرة في المبرهنة 2.53.

سيبقى علينا إثبات أنّ المعنيين لكلمة ناظمي تتقابل في الخاصية 5،

وقد أثبتنا توًّا الخاصية 6 في المثال 3.53؛ إذن، يبقى علينا إثبات الخاصيتين 3 و 5.

المبرهنة الرئيسة لمبرهنة جالوا أداة قوية لدراسة أصفار كثيرات الحدود. فإذا كانت $f(x) \in F[x]$، بحيث إنّ كل عامل غير مختزل لـ $f(x)$ قابل للفصل على F، فإنّ حقل الانشطار K لـ$f(x)$ على F امتداد ناظمي لـ F. زمرة جالوا $G(K/F)$ هي **زمرة كثيرة الحدود** $f(x)$ على F، ويمكن أن تعطى بنية هذه الزمرة معلومات ذات فائدة بخصوص أصفار $f(x)$، سيُوضَّح هذا بصورة مدهشة في الفصل 56 عندما نحقق هدفنا النهائي.

زمر جالوا على الحقول المنتهية

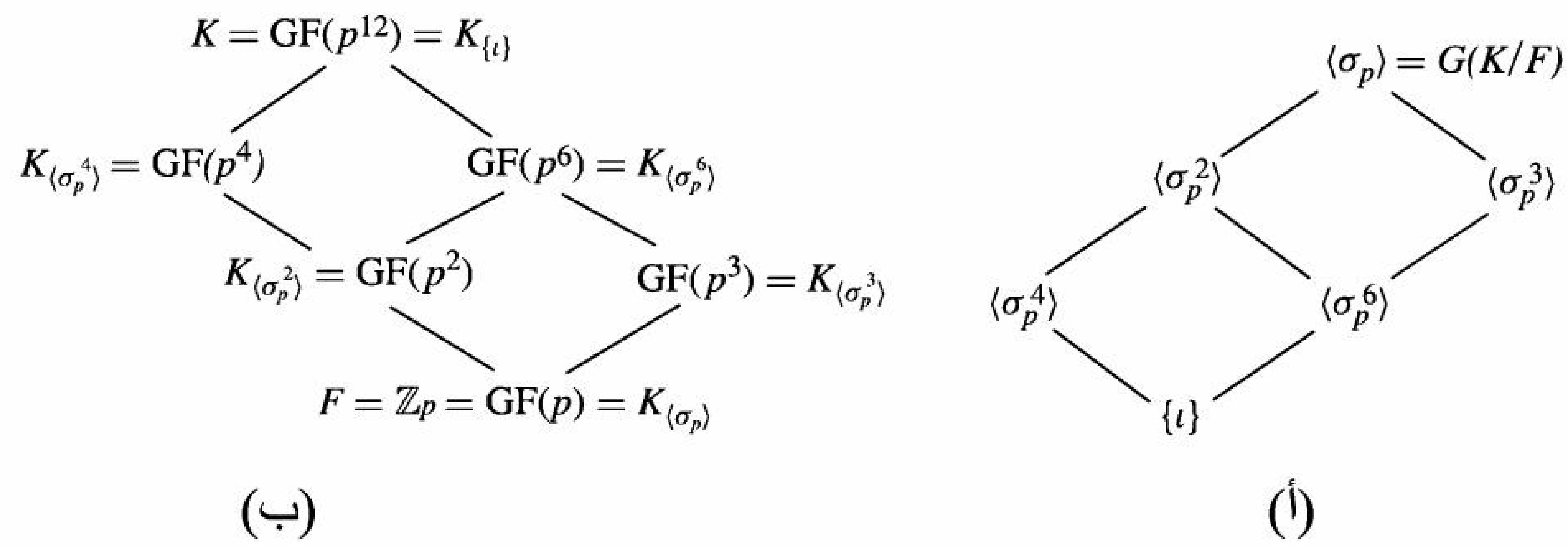
ليكن K امتدادًا منتهيًا للحقل المنتهي F، لقد رأينا أنّ K امتداد قابل للفصل على F (الحقل المنتهي كامل). افترض أنّ رتبة F هي p^r و$n = [K : F]$، إذن، رتبة K تساوي p^{rn}، وقد رأينا أنّ K هو حقل الانشطار لـ $x^{p^{rn}} - x$ على F؛ إذن، K امتداد ناظمي على F.

الآن أحد التماثلات الذاتية التي تترك F ثابتة σ_{p^r}، حيث لكل $\alpha \in K$، $\sigma_{p^r}(\alpha) = \alpha^{p^r}$. لاحظ أنّ $(\sigma_{p^r})^i(\alpha) = \alpha^{p^{ri}}$، ولأنَّ كثيرة الحدود من الدرجة p^{ri} يمكن أن يكون لها على الأكثر p^{ri} من الأصفار في الحقل، فإننا نرى أنّ أصغر أس لـ σ_{p^r} التي يمكن أن تترك كل الـ p^{rn} عنصرًا في K ثابتة، هي القوة n. بمعنى أنّ رتبة العنصر σ_{p^r} في $G(K/F)$ هي على الأقل n؛ ولذلك، لأنَّ $|G(K/F)| = [K : F] = n$، فيجب أن تكون $G(K/F)$ دورية ومولدة بـ σ_{p^r}. نلخّص هذه الخطوات في مبرهنة.

7.53 مبرهنة ليكن K امتدادًا منتهيًا من الدرجة n للحقل المنتهي F، الذي يحوي p^r من العناصر؛ إذن، $G(K/F)$ دورية من الرتبة n، ومولدة بـ σ_{p^r}، حيث $\sigma_{p^r}(\alpha) = \alpha^{p^r}$ لكل $\alpha \in K$

نستخدم هذه المبرهنة في إعطاء توضيح آخر للمبرهنة الرئيسة في مبرهنة جالوا.

8.53 مثال ليكن $F = \mathbb{Z}_p$ ، ولتكن $K = \mathrm{GF}(p^{12})$؛ إذن، $[K : F] = 12$، هذا يؤدي إلى أنّ $G(K/F)$ تماثل الزمرة الدورية $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ، إذ إنّ الرسم البياني للزمر الجزئية والحقول المتوسطة معطًى في الشكل 9.53، ومرة أخرى، كل رسم ليس معكوس الآخر فقط ، بل للأسف، يشبه معكوس نفسه، ستُعطى أمثلة في الفصل 54، حيث الرسوم البيانية لا تشبه معكوسها، إضافة إلى أن نصف الزمر الجزئية الدورية



الشكل 9.53 **(أ) مخطط الزمر** **(ب) مخطط الحقول**

من $G(K/F) = \langle \sigma_p \rangle$ بإعطاء مولداتها، على سبيل المثال:

$$\langle \sigma_p^{\ 4} \rangle = \{\iota, \sigma_p^{\ 4}, \sigma_p^{\ 8}\}$$ ▲

إتمام إثبات المبرهنة الرئيسة

رأينا أنّ الخاصيتين 3 و 5 ، هما كل ما تبقى لإثباته في المبرهنة الرئيسة في مبرهنة جالوا.

البرهان بالعودة إلى الخاصية 3، يجب أن تثبت أنه لـ $H \le G(K/F)$ ، $\lambda(K_H) = H$.

نعلم أنّ $H \le \lambda(K_H) \le G(K/F)$؛ إذن، ما يجب علينا في الحقيقة إثباته، أنه من المستحيل أن تكون H زمرة جزئية فعلية من $\lambda(K_H)$. سنفرض أنّ:

$$H < \lambda(K_H)$$

ثم نجد تناقضًا، وبوصفه امتدادًا منتهيًا قابلًا للفصل، $K = K_H(\alpha)$ حيث $\alpha \in K$، بحسب المبرهنة 15.51، ولتكن:

$$n = [K : K_H] = \{K : K_H\} = |G(K/K_H)|.$$

إذن، $H < G(K/K_H)$ يؤدي إلى أنّ $n = |G(K/K_H)| < |H|$، ما يعني أنّ: $n = [K : K_H] < |H|$ لتكن عناصر H $\sigma_1, \ldots, \sigma_{|H|}$ ، وافترض كثيرة الحدود

$$f(x) = \prod_{i=1}^{|H|} \left(x - \sigma_i(\alpha)\right).$$

إ

إذن، درجة $f(x)$ تساوي $n > |H|$ ، وتكون معاملات كل قوة لـ x في $f(x)$ تعابير متماثلة في $\sigma_I(\alpha)$، على سبيل المثال: معامل $x^{|H|-1}$ يساوي $-\sigma_1(\alpha) - \sigma_2(\alpha) - \cdots - \sigma_{|H|}(\alpha)$ إذن، لا تتغير هذه المعاملات تحت أيّ تماثل $\sigma_i \in H$؛ لأنه إذا كانت $\sigma \in H$، فإنّ:

$$\sigma\sigma_1, \cdots, \sigma\sigma_{|H|}$$

هي مرة أخرى المتتالية $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{|H|}$، ما عدا طبعًا الترتيب؛ لأنّ H زمرة؛ إذن، تنتمي معاملات $f(x)$ إلى K_H، ولأنّ إحدى σ_i هي i، نرى أنّ $\sigma_i(\alpha)$ هي α، وهكذا $f(\alpha) = 0$؛ إذن، نحصل على:

$$\deg(\alpha, K_H) \leq |H| < n = [K : K_H] = [K_H(\alpha) : K_H].$$

وهذا مستحيل، وهكذا نكون قد أثبتنا الخاصية 3.

نتوجه الآن للخاصية 5. كل امتداد E لـ F، $F \leq E \leq K$ يكون قابلًا للفصل بحسب المبرهنة 9.51؛ إذن، E ناظمي على F ، إذا وفقط إذا كان E حقل انشطار على F، وبحسب مبرهنة تمديد التماثل، كل تماثل من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي على K؛ لأن K ناظمي على F؛ إذن، التماثلات الذاتية في كلها تنتج التماثلات الممكنة من E إلى حقل جزئي من $\overline{F}$ وتترك F ثابتة، وبحسب المبرهنة 3.50، فإنّ هذا يثبت أنّ E حقل انشطار على F؛ ولذا، فهو ناظمي على F ، إذا وفقط إذا كان لكل $\sigma \in \mathrm{G}(K / F)$ و $\alpha \in E$ ،

$$\sigma(\alpha) \in E$$

بحسب الخاصية 2، E هو الحقل الثابت لـ $G(K/E)$؛ وإذن، $\sigma(\alpha) \in E$، إذا وفقط إذا كان لكل $\tau \in G(K/E)$.

$$\tau(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha).$$

وهذا بدوره يتحقق إذا وفقط إذا كان:

$$(\sigma^{-1}\tau\sigma)(\alpha) = \alpha$$

لكل $\alpha \in E$ ، $\sigma \in G(K/F)$ و $\tau \in G(K/E)$ ، ولكن هذا يعني أنه لكل $\sigma \in G(K/F)$ و $\tau \in G(K/E)$ ، $\sigma^{-1}\tau\sigma$ تترك كل عنصر في E ثابتًا، أي:

$$(\sigma^{-1}\tau\sigma) \in G(K/E).$$

هذا بالتحديد شرط أنّ $G(K/F)$ زمرة جزئية ناظمية في $G(K/F)$.

بقي علينا إثبات أنه عندما يكون E امتدادًا ناظميًّا لـ F ، فإنّ: $G(E/F) \simeq G(K/F)/G(K/E)$. إذا كانت $\sigma \in G(K/F)$، دع σ_E تكون التماثل الذاتي على E المتولد من σ (نفترض أنّ E امتداد ناظمي لـ F)؛ إذن، $\sigma_E \in G(E/F)$. الدالة $\phi : G(K/F) \to G(K/F)$ المعطاة بـ

$$\phi(\sigma) = \sigma_E$$

حيث $\sigma \in G(K/F)$، تمثل تشاكلًا بحسب مبرهنة تمديد التماثل، كل تماثل ذاتي على E ويترك F ثابتة، يمكن تمديده إلى تماثل ذاتي على K، أي إنه τ_E حيث $\tau \in G(K/F)$؛ إذن، ϕ غامر لـ $G(K/F)$ ، ونواة ϕ هي $G(K/E)$. وهكذا وبحسب المبرهنة الأساسية للتماثل،

$G(E/F) \simeq G(K/F)/G(K/E)$ إضافة إلى ذلك، هذا التماثل طبيعي. ♦

■ تمارين 53

حسابات

الحقل $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ امتداد ناظمي منته على $\mathbb{Q}$. يمكن إثبات أنّ $[K : \mathbb{Q}]=8$ في التمارين 1 إلى 8، احسب الكمية العددية المطلوبة. استُخدمت الرموز في المبرهنة 6.53.

1. $\{K : \mathbb{Q}\}$
2. $|G(K / \mathbb{Q})|$
3. $|\lambda(\mathbb{Q})|$
4. $|\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}))|$
5. $|\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{6}))|$
6. $|\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{30}))|$
7. $|\lambda(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{6}))|$
8. $|\lambda(K)|$

9. صف زمرة كثيرة الحدود $(x^4 - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$.

10. أوجد الرتبة، وصف المولد للزمرة $G(GF(729)/GF(9))$.

11. ليكن K حقل انشطار $x^3 - 2$ على $\mathbb{Q}$. (ارجع للمثال 9.50).

أ. صف العناصر الستة لـ $G(K/\mathbb{Q})$ بإيجاد قيمها على $\sqrt[3]{2}$ و $i\sqrt{3}$. (بحسب المثال 9.50 $(K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$).

ب. أيّ الزمر التي رأيناها سابقًا تماثل $G(K/\mathbb{Q})$؟

جـ. باستخدام الرموز المعطاة لإجابة الفرع (أ) في نهاية الكتاب، أوجد الرسم البياني للحقول الجزئية من K والزمر الجزئية من $G(K/\mathbb{Q})$، مظهرًا الحقول المتوسطة والزمر الجزئية المتقابلة، كما فعلنا في الشكل 4.53.

12. صف زمرة كثيرة الحدود $(x^4 - 5x^2 + 6) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$.

13. صف زمرة كثيرة الحدود $(x^3 - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$.

مفاهيم

14. أعط مثالاً على امتدادين ناظميين منتهيين K_1 و K_2 للحقل F نفسه، بحيث K_1 لا يماثل K_2، ولكن: $G(K_1/F) \simeq G(K_2/F)$.

15. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_______ أ. يمكن أن يكون لزمرتين جزئيتين مختلفتين من زمرة جالوا الحقل الثابت نفسه.

_______ ب. برموز المبرهنة 6.53، إذا كان $F \leq E < L \leq K$، فإنّ $\lambda(E) < \lambda(L)$.

_______ جـ. إذا كان K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا لـ F، فإنّ K امتداد ناظمي لـ E حيث $F \leq E \leq K$.

_______ د. إذا كان للامتدادين الناظميين المنتهيين E و L للحقل F زمرتي جالوا متماثلتين، فإنّ: $[E : F] = [L : F]$.

_______ هـ. إذا كان E امتدادًا ناظميًّا منتهيًا لـ F و H زمرة جزئية ناظمية لـ $G(E/F)$، فإنّ E_H امتداد ناظمي لـ F.

_______ و. إذا كان E امتدادًا بسيطًا ناظميًّا منتهيًا للحقل F، فإنّ زمرة جالوا $G(E/F)$ زمرة بسيطة.

_______ ز. زمرة جالوا لا تكون بسيطة.

_______ ح. زمرة جالوا لامتداد منتهٍ لحقل منتهٍ إبدالية.

______ ط. الامتداد E ذو الدرجة 2 على الحقل F ، يكون دائمًا امتدادًا ناظميًّا لـ F.

______ ي. الامتداد E ذو الدرجة 2 على الحقل F ، يكون دائمًا امتدادًا ناظميًّا لـ F ، إذا كان مميز F ليس 2.

براهين

16. يسمى الامتداد المنتهي الناظمي K للحقل F إبداليًّا على F ، إذا كانت $G(E/F)$ زمرة إبدالية. أثبت أنه إذا كان K إبداليًّا على F ، وكان E امتدادًا ناظميًّا لـ F، بحيث $F \leq E \leq K$، فإنّ K إبدالي على E و E إبدالية على F.

17. ليكن K امتدادًا ناظميًّا منتهيًا للحقل F. أثبت أنه لكل $\alpha \in K$، فإنّ معيار α على F **(norm of α over F)** المعطى بـ:

$$N_{K/F}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G(K/F)} \sigma(\alpha)$$

وأثر α في F **(trace of α)** المعطى بـ:

$$Tr_{K/F}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G(K/F)} \sigma(\alpha),$$

تكون عناصر في F.

18. افترض $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i\sqrt{3})$. بالرجوع إلى التمرين 17، احسب كلًّا مما يأتي (انظر المثال 3.53):

أ. $N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$ ب. $N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

جـ. $N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{6})$ د. $N_{K/\mathbb{Q}}(2)$

هـ. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$ و. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

ز. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt{6})$ ح. $Tr_{K/\mathbb{Q}}(2)$

19. ليكن K امتدادًا ناظميًّا لـ F، ولتكن $K = F(\alpha)$، ولتكن:

$$\operatorname{irr}(\alpha, F) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

بالرجوع إلى التمرين 17، أثبت أنّ:

أ. $N_{K/F}(\alpha) = (-1)^n a_0$، ب. $Tr_{K/F}(\alpha) = -a_{n-1}$.

20. لتكن $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود من الدرجة n ، بحيث إنّ كل عامل غير مختزل لها قابل للفصل على F. أثبت أنّ رتبة زمرة $f(x)$ على F تقسم $n!$.

21. لتكن $f(x) \in F[x]$ كثيرة حدود، بحيث إنّ كل عامل غير مختزل لـ $f(x)$ كثيرة حدود قابلة للفصل على F. أثبت أنّ زمرة $f(x)$ على F يمكن أن تُعدّ بصورة طبيعية زمرة تباديل أصفار $f(x)$ في $\overline{F}$.

22. ليكن F حقلًا، ولتكن ζ جذرًا بدائيًّا من الرتبة n للواحد في $\overline{F}$ ، حيث مميز F يساوي 0 أو لا يقسم n.

أ. أثبت أنّ $F(\zeta)$ امتداد ناظمي على F.

ب. أثبت أنّ $G(F(\zeta)/F)$ إبدالية. [مساعدة: كل $\sigma \in G(F(\zeta)/F)$ تربط ζ بأحد ζ^r وتتحدد تمامًا بهذه القيمة r].

23. يسمى الامتداد الناظمي المنتهي K للحقل F دوريًّا على F **(cyclic)**، إذا كانت $G(K/F)$ زمرة دورية.

أ. أثبت أنه إذا كان K دوريًّا على F، وكان E امتدادًا ناظميًّا على F، بحيث $F \leq E \leq K$ ، فإنّ E دوري على F و K دوري على E.

ب. أثبت أنه إذا كان K دوريًا على F، فإنه يوجد بالضبط حقل واحد E، $F \leq E \leq K$ ، من الدرجة d على F لكل قاسم d لـ $[K:F]$.

24. ليكن K امتدادًا ناظميًا منتهيًا لـ F.

أ. لـ $\alpha \in K$، أثبت أنّ:

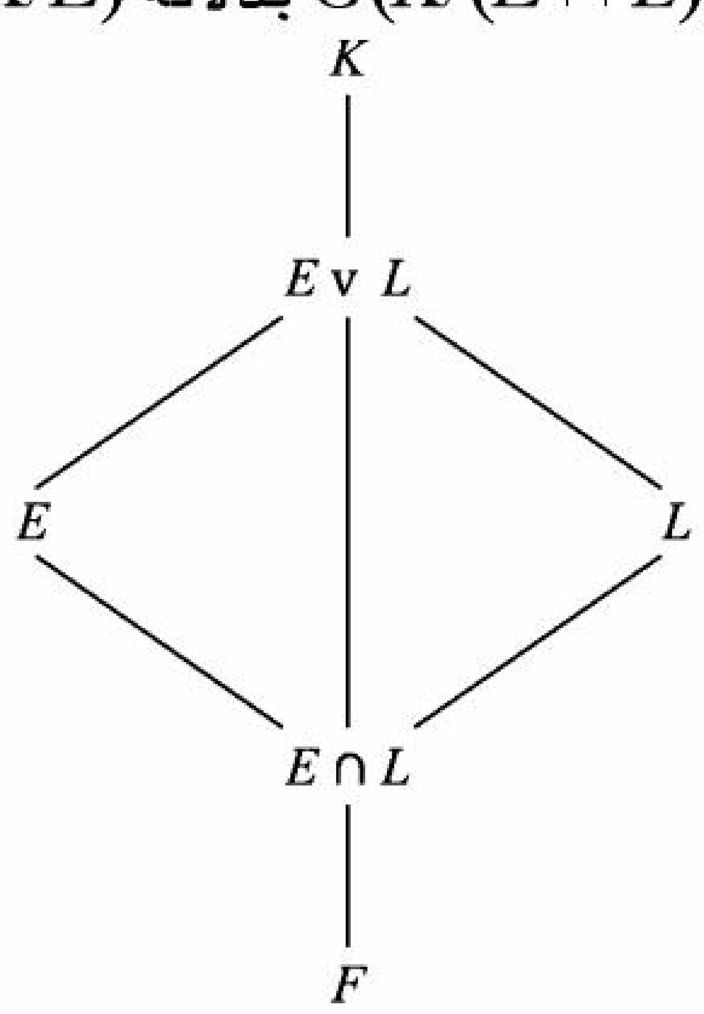
$$f(x) = \prod_{\sigma \in G(K/F)} \left(x - \sigma(\alpha)\right)$$

عنصر في $F[x]$

ب. بالإشارة إلى الفرع (أ)، أثبت أنّ $f(x)$ قوة لـ $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ ، و $f(x) = \mathrm{irr}(\alpha,F)$، إذا وفقط إذا كان $K = F(\alpha)$.

25. الموصل **(join)** $E \vee L$ للامتدادين E و L للحقل F في $\overline{F}$، هو أصغر حقل جزئي من $\overline{F}$ ويحوي كلًّا من E و L، بمعنى أنّ $E \vee L$ هو تقاطع الحقول الجزئية كلها من $\overline{F}$ التي تحوي كلًّا من E و L. ليكن K امتدادًا ناظميًا منتهيًا للحقل F، وليكن E و L امتدادين لـ F محتويين في K، كما هو موضح في الشكل 10.53 ، صف $G(K/(E \vee L))$ بدلالة $G(K/E)$ و $G(K/L)$.

26. بالإشارة إلى الوضع في التمرين 25، صف $G(K/(E \cap L))$ بدلالة $G(K/E)$ و $G(K/L)$.



الشكل 9.53

الفصل 54 توضيحات على مبرهنة جالوا Illustrations of Galois Theory

الدوال المتناظرة

ليكن F حقلًا، ولتكن $y_1, \ldots y_n$ غير معينات، هناك تماثلات ذاتية طبيعية على $F(y_1, \ldots y_n)$ تترك F ثابتة – يعني – تلك المعرفة بوصفها تباديل على $\{y_1, \ldots y_n\}$. لنكن أكثر وضوحًا، لتكن σ تبديلة على $\{1, \ldots, n\}$ أي $\sigma \in S_n$؛ إذن، تعمّم σ إلى دالة طبيعية $\sigma : F(y_1, \cdots, y_n) \to F(y_1, \cdots, y_n)$ المعطاة بـ:

$$\overline{\sigma}\left(\frac{f(y_1,\ldots,y_n)}{g(y_1,\ldots,y_n)}\right)=\frac{f\left(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n)}\right)}{g\left(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n)}\right)}$$

حيث $f(y_1, \ldots y_n), g(y_1, \ldots, y_n) \in F[y_1, \ldots, y_n]$ و $g(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. نستنتج على الفور أنّ $\overline{\sigma}$ تماثل ذاتي على $F(y_1, \ldots y_n)$ يترك F ثابتة، وعناصر $F(y_1, \ldots, y_n)$ التي تترك ثابتة بكل $\overline{\sigma}$، لكل $\sigma_n \in S$، هي الدوال النسبية المتناظرة في غير المعينات $y_1, \ldots y_n$.

1.54 تعريف يسمى العنصر في الحقل $F(y_1, \ldots y_n)$ **دالة متناظرة في** $y_1, \ldots y_n$ **على** F **(Symmetric function)**، إذا تُركت ثابتة بتباديل $y_1, \ldots y_n$ كلها، بالمعنى الذي شرحناه توًا. ■

لتكن $\overline{S}_n$ زمرة التماثلات الذاتية $\overline{\sigma}$ كلها، حيث $\sigma_n \in S$ ، لاحظ أنّ $\overline{S}_n$ تماثل S_n بصورة طبيعية. ليكن K الحقل الجزئي من $F(y_1, \ldots y_n)$ الذي يترك ثابتًا بـ $\overline{S}_n$. افترض كثيرة الحدود.

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-y_i)$$

تسمى كثيرة الحدود $f(x) \in (F(y_1, \ldots, y_n))[x]$ **كثيرة الحدود العامة من الدرجة n** **(general polynomial of degree n)**: لتكن $\overline{\sigma}_x$ تمديدًا لـ $\overline{\sigma}$ – بصورة طبيعية – إلى $(F(y_1, \ldots, y_n))[x]$ ، حيث $\overline{\sigma}_x(x)=x$. الآن، تترك $f(x)$ ثابتة بكل دالة $\overline{\sigma}_x$ ، حيث $\sigma \in S_n$. بمعنى أنّ:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x-y_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-y_{\sigma(i)}\right).$$

إذن، معاملات $f(x)$ في K؛ إنها **الدوال المتناظرة الابتدائية في** $y_1, \ldots, y_n$ ، وبوصفه توضيحًا، لاحظ أنّ الحدّ الثابت في $f(x)$ هو:

$$(-1)^n y_1 y_2 \cdots y_n,$$

معامل x^{n-1} هو $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$، وهكذا. هذه دوال متناظرة في $y_1, \ldots, y_n$، وأول دالة متناظرة ابتدائية في $y_1, \ldots, y_n$ ، هي:

$$s_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

والثانية هي: $s_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n$، وهكذا، والدالة التي ترتيبها n، هي $s_n = y_1 y_2 \cdots y_n$.

افترض الحقل $E = F(s_1, \ldots, s_n)$. بالطبع $E \leq K$، حيث K حقل الدوال المتناظرة جميعها في $y_1, \ldots, y_n$ على F. ولكن $F(y_1, \ldots, y_n)$ امتداد ناظمي منتهٍ لـ E – تحديدًا – حقل الانشطار لـ

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-y_i)$$

على E. لأنَّ درجة $f(x)$ هي n، فإننا نحصل مباشرة على:

$$[F(y_1, \cdots, y_n) : E] \leq n!$$

(انظر التمرين 13، في الفصل 50). وعلى أيّ حال، لأنَّ K هو الحقل الثابت بـ $\overline{S}_n$

و

$$|\overline{S}_n| = |S_n| = n!,$$

نحصل كذلك على:

$$n! \leq \{F(y_1, \cdots, y_n) : K\} \leq [F(y_1, \cdots, y_n) : K].$$

ولذلك:

$$n! \leq [F(y_1, \cdots, y_n) : K] \leq [F(y_1, \cdots, y_n) : E] \leq n!,$$

إذن:

$$K = E.$$

لذلك، فإنّ زمرة جالوا الكاملة لـ $F(y_1, \ldots, y_n)$ على E هي $\overline{S}_n$، وحقيقة أنّ $K = E$ تثبت أنه يمكن التعبير عن الدوال المتناظرة جميعها بدوال نسبية من الدوال المتناظرة الابتدائية $s_1, \ldots, s_n$. نلخص هذه النتائج في مبرهنة.

2.54 مبرهنة لتكن $s_1, \ldots, s_n$ الدوال المتناظرة الابتدائية في غير المعينات $y_1, \ldots, y_n$. كل دالة متناظرة في $y_1, \ldots, y_n$ على F، هي دالة نسبية في الدوال المتناظرة الابتدائية، كذلك $F(y_1, \ldots, y_n)$ امتداد ناظمي منتهٍ من الدرجة $n!$ على $F(s_1, \ldots, s_n)$، وزمرة جالوا لهذا الامتداد تماثل S_n بصورة طبيعية.

بالنظر في مبرهنة كيلي 16.8، يمكن الاستنتاج من المبرهنة 2.54 أنّ أيّ زمرة منتهية يمكن أن تظهر بوصفها زمرة جالوا (تبعًا للتماثل). (انظر التمرين 11).

أمثلة

لنعطي المثال الذي وعدنا به عن امتداد ناظمي منتهٍ له زمرة جالوا، بحيث يكون الرسم البياني لزمرها الجزيئة لا يظهر بوصفه معكوسًا لنفسه.

3.54 مثال افترض حقل الانشطار في $\mathbb{C}$ لـ x^4-2 على $\mathbb{Q}$، x^4-2 غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ – حسب معيار إيزنستين، حيث $p=2$ – لتكن $\alpha = \sqrt[4]{2}$ الصفر الحقيقي الموجب لـ x^4-2، والأصفار الأربعة لـ x^4-2 في $\mathbb{C}$. هي α، $-\alpha$، $i\alpha$، و $-i\alpha$ ، حيث i هو الصفر المعروف لـ x^2+1 في $\mathbb{C}$، وحقل الانشطار K لـ x^4-2 على $\mathbb{Q}$ يحتوي على $i = (i\alpha)/\alpha$. لأنَّ α عدد حقيقي، $\mathbb{Q}(\alpha) < \mathbb{R}$؛ إذن، $\mathbb{Q}(\alpha) \neq K$. على أيّ حال، لأنَّ $\mathbb{Q}(\alpha, i)$ تحوي أصفار x^4-2 جميعها، فنرى أنّ $\mathbb{Q}(\alpha, i)=K$. لتكن $E = \mathbb{Q}(\alpha)$، نحصل على الرسم البياني في الشكل 4.54.

الآن، $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ أساس لـ E على $\mathbb{Q}$ ، و $\{1, i\}$ أساس لـ K على E؛ إذن:

$$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, i, i\alpha, i\alpha^2, i\alpha^3\}$$

أساس لـ K على $\mathbb{Q}$، ولأنّ $[K : \mathbb{Q}] = 8$، فيجب أن نحصل على $|G(K/\mathbb{Q})| = 8$؛ لذا، نحتاج إلى أن نجد ثمانية تماثلات ذاتية على K تترك $\mathbb{Q}$ ثابتة. نعرف أنّ أيّ تماثل ذاتي σ يتحدد تمامًا بقيمه على عناصر الأساس $\{1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,i,i\alpha,i\alpha^2,i\alpha^3\}$، وهذه القيم بدورها تتحدد بـ $\sigma(\alpha)$ و $\sigma(i)$؛ ولكن $\sigma(\alpha)$ يجب أن تكون دائمًا مرافقًا لـ α على $\mathbb{Q}$، أي أحد الأصفار الأربعة لـ $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4-2$. وكذلك $\sigma(i)$ يجب أن تكون صفرًا لـ $\mathrm{irr}(i, \mathbb{Q}) = x^2 + 1$؛ إذن، الاحتمالات الأربعة لـ $\sigma(\alpha)$، منضمة لاحتمالي $\sigma(i)$، يجب أن تعطي التماثلات الذاتية الثمانية. نصفها في الجدول 5.54، على سبيل المثال: $\rho_3(\alpha) = i\alpha$ و $\rho_3(i) = i$، بينما ρ_0 هو التماثل الذاتي المحايد. الآن،

$$K = \mathbb{Q}(\alpha, i)$$
$$|$$
$$E = \mathbb{Q}(\alpha)$$
$$|$$
$$\mathbb{Q}$$

الشكل 4.54

$$(\mu_1 p_1)(\alpha) = \mu_1(p_1(\alpha)) = \mu_1(i\alpha) = \mu_1(i)\mu_1(\alpha) = -i\alpha$$

وبالمثل كذلك

$$(\mu_1 p_1)(i) = -i,$$

إذن، $\mu_1 \rho_1 = \delta_2$، وتثبت حسابات مشابهة أنّ

$$(\rho_1\mu_1)(\alpha) = i\alpha \quad \text{و} \quad (p_1\mu_1)(i) = -i.$$

إذن، $\rho_1\mu_1 = \delta_1$ ، ما يعني أنّ $\rho_1\mu_1 \neq \mu_1 \rho_1$ و $G(K/\mathbb{Q})$ ليست إبدالية؛ لذلك، يجب أن تكون $G(K/\mathbb{Q})$ تماثل أحد الزمرتين غير الإبداليتين من الرتبة 8 الموصوفة في المثال 6.40.

بالحساب من الجدول 5.54، نرى أنّ رتبة ρ_1 تساوي 4، و μ_1 من الرتبة 2، $\{\rho_1, \mu_1\}$ تولد $G(K/\mathbb{Q})$، و $\rho_1\mu_1 = \mu_1 \rho_1^3 = \delta_1$ ؛ إذن، $G(K/\mathbb{Q})$ تماثل الزمرة G_1 في المثال 6.40، الزمرة الثمانية.

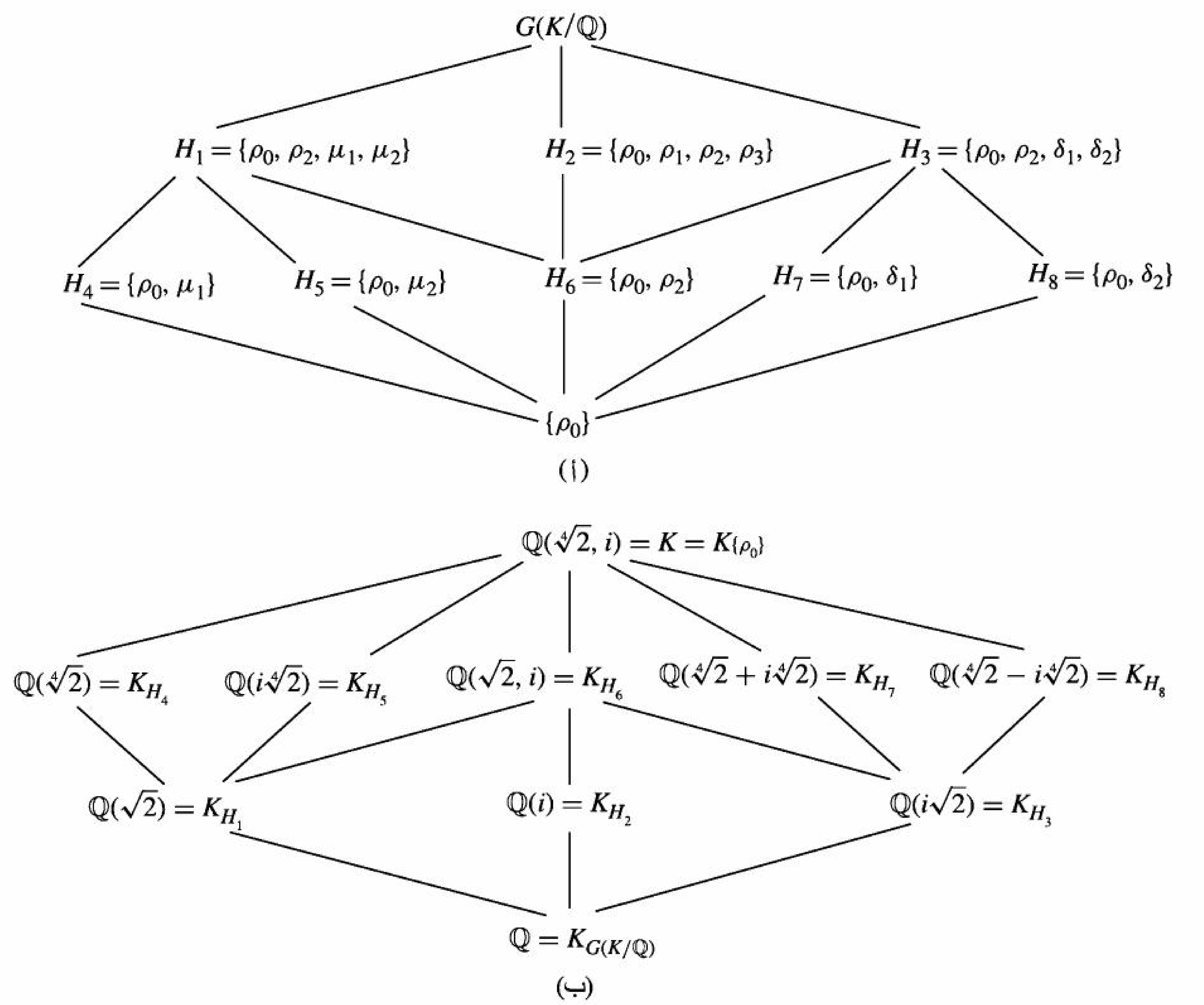
لقد اخترنا ترميز العناصر في $G(K/\mathbb{Q})$ ليكون جدول الزمرة منطبقًا مع جدول الزمرة الثمانية في الجدول 12.8. حيث إنّ الرسم البياني للزمر الجزئية H_i من $G(K/\mathbb{Q})$ معطًى في الشكل 13.8، ونعيد كتابته هنا في الشكل 6.54 ، ونعطي كذلك الرسم البياني للحقول المتوسطة بين $\mathbb{Q}$ و K، هذا في النهاية يوضح بصورة لطيفة أنّ أحد الرسمين هو معكوس الآخر.

تحديد الحقول الثابتة K_{H_i} يحتاج أحيانًا إلى بعض الإبداع، لنوضح ذلك ، لإيجاد K_{H_2}، لا يجب علينا غير إيجاد امتداد لـ $\mathbb{Q}$ من الدرجة 2 يترك ثابتًا بـ $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$، ولأنّ كل ρ_j تترك i ثابتة، فإنّ $\mathbb{Q}(i)$ هو الحقل الذي نبحث عنه، ولإيجاد K_{H_4}، يجب علينا إيجاد امتداد لـ $\mathbb{Q}$ من الدرجة 4 يترك ثابتًا بـ ρ_0 و μ_1، ولأنّ μ_1 تترك α ثابتة و α صفر لـ $\mathrm{irr}(\alpha, Q) = x^4 - 2$ ، نرى أنّ $\mathbb{Q}(\alpha)$ من الدرجة 4 على $\mathbb{Q}$ ويترك ثابتًا بـ $\{\rho_0, \mu_1\}$. بحسب مبرهنة جالوا، إنه الحقل الوحيد. نستخدم هنا بقوة التقابل المعطى بمبرهنة جالوا، فإذا وجدنا حقلاً يلائم القائمة، فإنه الحقل الذي نبحث عنه، أضف إلى ذلك، إيجاد K_{H_7} يحتاج إلى مزيد من الإبداع، فلأنّ $H_7 = \{\rho_0, \delta_1\}$ زمرة، فلكل $\beta \in K$ نرى أنّ $\rho_0(\beta) + \delta_1(\beta)$ تترك ثابتة بـ ρ_0 و δ_1، وبأخذ $\beta = \alpha$، نرى أنّ $\rho_0(\alpha) + \delta_1(\alpha) = \alpha + i\alpha$ تترك ثابتة بـ H_7، حيث يمكننا التحقق ورؤية أنّ ρ_0 و δ_1 هي

التماثلات الذاتية الوحيدة التي تترك $\alpha + i\alpha$ ثابتة؛ إذن:

جدول 5.54

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2
$\alpha \rightarrow$	α	$i\alpha$	$-\alpha$	$-i\alpha$	α	$i\alpha$	$-\alpha$	$-i\alpha$
$i \rightarrow$	i	i	i	i	$-i$	$-i$	$-i$	$-i$



الشكل 6.54 (أ) الرسم البياني للزمر (ب) الرسم البياني للحقول

بحسب التقابل، يجب أن نحصل على:

$$\mathbb{Q}\left(\alpha + i\,\alpha\right) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}) = K_{H_7}$$

افترض أننا نودّ إيجاد $\mathrm{irr}(\alpha + i\alpha, \mathbb{Q})$، فإذا كانت $\gamma = \alpha + i\alpha$، فإن لكل مرافق لـ γ على $\mathbb{Q}$، يوجد تماثل ذاتي على K يربط γ بمرافق لها؛ إذن، نحتاج فقط إلى حساب القيم المختلفة لـ $\sigma(\gamma)$، حيث $\sigma \in G(K/\mathbb{Q})$ لإيجاد بقية أصفار $\mathrm{irr}(\gamma, \mathbb{Q})$، وبحسب المبرهنة 2.53، عناصر σ في $G(K/\mathbb{Q})$ التي تعطي هذه القيم المختلفة، يمكن إيجادها بأخذ مجموعة الممثلات للمجموعة المشاركة اليسرى $G(K/\mathbb{Q}(\gamma)) = \{\rho_0, \delta_1\}$ في $G(K/\mathbb{Q})$. مجموعة الممثلات لهذه المجموعات المشاركة اليسرى هي:

$$\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}.$$

إذن، مرافقات $\gamma = \alpha + i\alpha$ هي $\alpha + i\alpha$، $i\alpha - \alpha$، $-\alpha - i\alpha$، و $-i\alpha + \alpha$

إذن:

$$\begin{aligned}\operatorname{irr}(\gamma, Q) &= [(x - (\alpha + i\alpha))(x - (i\alpha - \alpha))] \\ &\cdot[(x - (-\alpha - i\alpha))(x - (-i\alpha + \alpha))] \\ &= (x^2 - 2i\alpha x - 2\alpha^2)(x^2 + 2i\alpha x - 2\alpha^2) \\ &= x^4 + 4\alpha^4 = x^4 + 8.\end{aligned}$$

▲

رأينا أمثلة فيها حقل الانشطار لكثيرة حدود من الدرجة الرابعة على حقل F، يكون امتدادًا على F من الدرجة 8 (المثال 3.54) ومن الدرجة 24 (المبرهنة 2.54، حيث n=4). درجة امتداد للحقل F الذي يكون حقل انشطار لرباعي الدرجة على F، يجب أن تقسم دائمًا $24 = 4!$، وحقل الانشطار لـ $(x-2)^4$ على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}$، امتداد من الدرجة 1، وحقل الانشطار لـ $(x^2-2)^2$ على $\mathbb{Q}$ هو $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$، امتداد من الدرجة 2. مثالنا الأخير سيعطي امتدادًا من الدرجة 4 لحقل امتداد لرباعي الدرجة.

7.54 مثال افترض حقل الانشطار لـ $x^4 + 1$ على $\mathbb{Q}$، فيمكننا بحسب المبرهنة 11.23 إثبات أنّ $x^4 + 1$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$، بمناقشة عدم إمكانية تحليلها في $\mathbb{Z}[x]$. (انظر التمرين 1). العمل في الأعداد المركبة في الفصل 1 يثبت أنّ أصفار x^4+1، هي: $(1 \pm i)/\sqrt{2}$ و $(-1 \pm i)/\sqrt{2}$.

تثبت الحسابات أنه إذا كانت:

$$\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

فإنّ

$$\alpha^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha^5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \text{و} \quad \alpha^7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

إذن، حقل الانشطار K لـ x^4+1 على $\mathbb{Q}$ ، هو $\mathbb{Q}(\alpha)$، و $[K:\mathbb{Q}]=4$. لنحسب $G(K/\mathbb{Q})$ ، ونعطي الرسم البياني للزمر والحقول، فلأنّه توجد تماثلات ذاتية على K تربط α بكل مرافق لها؛ ولأنّ أيّ تماثل σ على $\mathbb{Q}(\alpha)$ يتحدد تمامًا بـ $\sigma(\alpha)$، فنرى أنّ العناصر الأربعة لـ $G(K/\mathbb{Q})$ معرفة بالجدول 54.8، ولأنّ $(\sigma_j \sigma_k)(\alpha) = \sigma_j(\alpha^k) = (\alpha^j)^k = \alpha^{jk}$ و $\alpha^8 = 1$، نرى أنّ $G(K/\mathbb{Q})$ يماثل الزمرة $\{1, 3, 5, 7\}$ مع الضرب مقياس 8. هذه هي الزمرة G_8 في المبرهنة 6.20، ولأنّ $\sigma_j^2 = \sigma_1$ – الدالة المحايدة – لكل j، فيجب أن تكون $G(K/\mathbb{Q})$ مماثلة لزمرة كلاين الرباعية. الرسوم البيانية معطاة في الشكل 9.54.

لإيجاد $K_{\{\sigma 1,\ \sigma 3\}}$، فإنه من الضروري فقط إيجاد عنصر في K وليس في $\mathbb{Q}$ يترك ثابتًا بـ $\{\sigma_1,\ \sigma_3\}$، لأنّ $[K_{\{\sigma 1,\ \sigma 3\}}:\ \mathbb{Q}]=2$.
من الواضح أنّ $\sigma_1(\alpha)+\sigma_3(\alpha)$ تترك ثابتة بكلا σ_1 و σ_3؛ ولأن $\{\sigma_1,\ \sigma_3\}$ زمرة نحصل على:

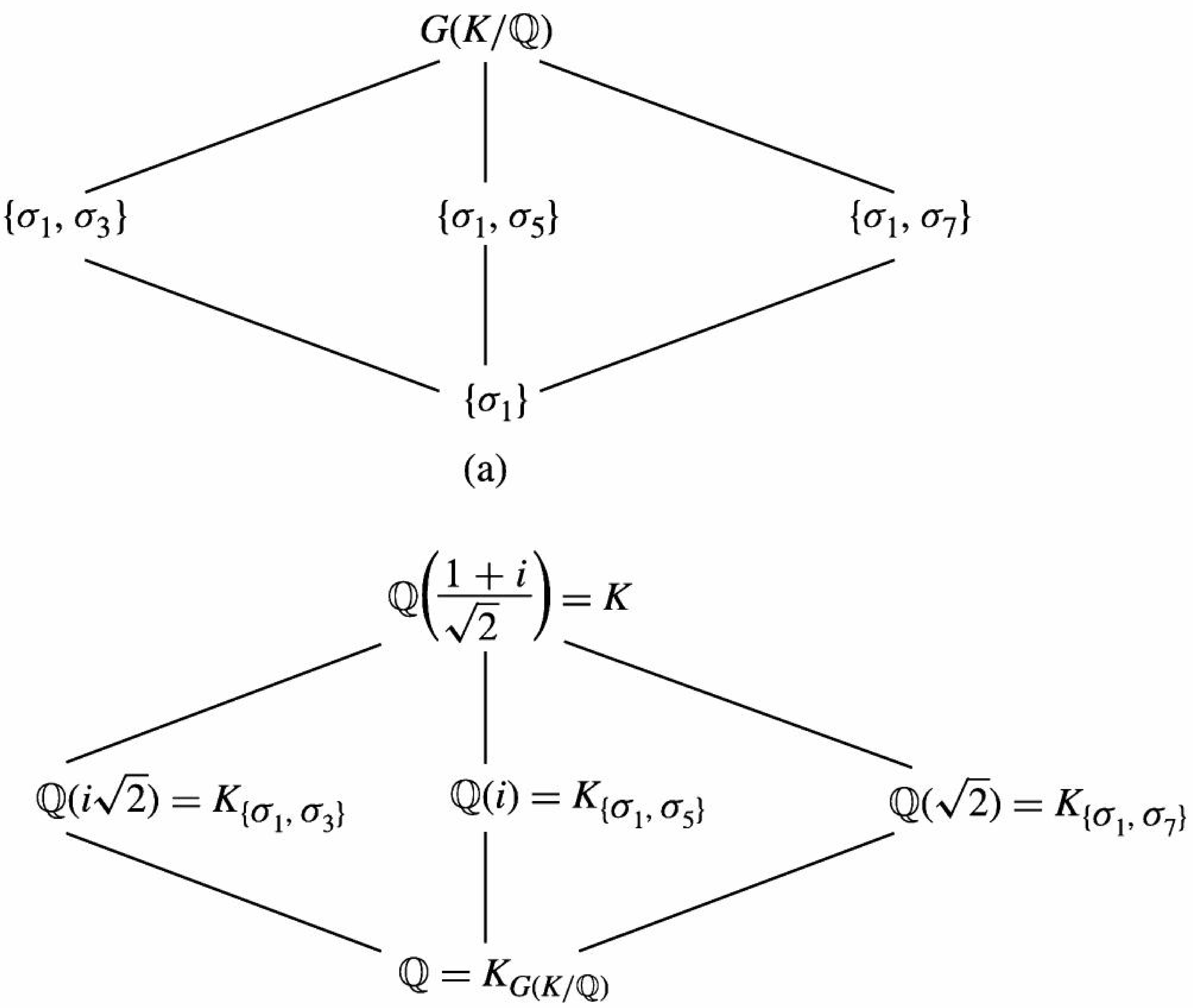
$$\sigma_1(\alpha)+\sigma_3(\alpha)=\alpha+\alpha^3=i\sqrt{2}.$$

بالمثل:

$$\sigma_1(\alpha)+\sigma_7(\alpha)=\alpha+\alpha^7=\sqrt{2}$$

الجدول 8.54

	σ_1	σ_3	σ_5	σ_7
$\alpha \rightarrow$	α	α^3	α^5	α^7



الشكل 9.54 (أ) الرسم البياني للزمر. (ب) الرسم البياني للحقول.

يترك ثابتًا بـ $\{\sigma_1,\sigma_7\}$. لن تُجدي هذه التقنيات لإيجاد $E_{\{\sigma_1,\sigma_5\}}$؛ لأن

$$\sigma_1(\alpha)+\sigma_5(\alpha)=\alpha+\alpha^5=0$$

و $0\in\mathbb{Q}$، ولكن بمناقشة مشابهة، $\sigma_1(\alpha)\,\sigma_5(\alpha)$ تترك ثابتة بكلا σ_1 و σ_5،

و $\sigma_1(\alpha)\sigma_5(\alpha)=\alpha\alpha^5=-i$

إذن، $\mathbb{Q}(-i)=\mathbb{Q}(i)$ هو الحقل الذي نسعى وراءه. ▲

■ تمارين 54

حسابات (تتطلب استخدام مبرهنات أكثر من المعتاد)

.1 أثبت أنّ x^4+1 غير مختزل على $\mathbb{Q}[x]$ – كما ذكرنا في المثال 7.54.

.2 تحقق من أنّ الحقول المتوسطة المعطاة في الرسم البياني للحقول في الشكل 6.54 صحيحة. (تمّ التحقق من بعضها في الكتاب. تحقق من الباقي).

.3 لكل حقل من الحقول في الرسم البياني في الشكل 6.54، أوجد العنصر البدائي المولد للحقل على $\mathbb{Q}$ (انظر المبرهنة 5.51)، وأعطِ كثيرة الحدود غير المختزلة لها على $\mathbb{Q}$.

.4 ليكن ζ جذرًا بدائيًّا من الرتبة 5 للواحد في $\mathbb{Q}$.

أ. أثبت أنّ $\mathbb{Q}(\zeta)$ حقل انشطار لـ x^5-1 على $\mathbb{Q}$.

ب. أثبت أنّ أيّ تماثل ذاتي على $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ يربط ζ بأحد القوى ζ^r لـ ζ.

جـ. مستخدمًا الفرع (ب)، صف عناصر $G(K/\mathbb{Q})$.

د. أعطِ الرسم البياني للزمر والحقول لـ $\mathbb{Q}(\zeta)$ على $\mathbb{Q}$، واحسب الحقول المتوسطة، كما فعلنا في المثالين 3.54 و 7.54.

.5 صف زمرة كثيرة الحدود $(x^5-2)\in(\mathbb{Q}(\zeta))[x]$ على $\mathbb{Q}(\zeta)$، حيث ζ الجذر البدائي من الرتبة 5 للواحد.

.6 أعد التمرين 4 لـ ζ الجذر البدائي من الرتبة 7 للواحد في $\mathbb{C}$.

.7 صف زمرة كثيرة الحدود بأسهل طريقة ممكنة على $\mathbb{Q}$.

$$(x^8-1)\in\mathbb{Q}[x]$$

.8 أوجد حقل الانشطار K في $\mathbb{C}$ لكثيرة الحدود $(x^4-4x^2-1)\in\mathbb{Q}[x]$، احسب زمرة كثيرة الحدود على $\mathbb{Q}$، وأظهر التقابل بين الزمر الجزئية لـ $G(K/\mathbb{Q})$ والحقول المتوسطة. بعبارة أخرى، قم بالعمل كله.

.9 عبّر عن الدوال المتناظرة الآتية كلها في y_1, y_2, y_3 على $\mathbb{Q}$ بوصفها دالة نسبية في الدوال المتناظرة البدائية s_1, s_2, s_3.

أ. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

ب. $\dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}+\dfrac{y_1}{y_3}+\dfrac{y_3}{y_1}+\dfrac{y_2}{y_3}+\dfrac{y_3}{y_2}$

.10 لتكن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ أصفارًا في $\mathbb{C}$ لكثيرة الحدود

$$(x^3-4x^2+6x-2)\in\mathbb{Q}[x].$$

أوجد كثيرة الحدود ذات الأصفار المحددة الآتية:

أ. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

ب. $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$

براهين

.11 أثبت أنّ أيّ زمرة منتهية تماثل زمرة جالوا $G(K/F)$ لامتداد منتهٍ ناظمي K لأحد الحقول F.

.12 لتكن $f(x)\in F[x]$ كثيرة حدود أحادية من الدرجة n، بحيث إنّ عواملها غير المختزلة كلها قابلة للفصل على F. ليكن $K\le\overline{F}$ حقل انشطار $f(x)$ على F، وافترض أنّ $f(x)$ تتحلل في $K[x]$ إلى:

$$\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i).$$

لتكن:

$$\Delta(f)=\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j);$$

يسمى حاصل الضرب $\Delta(f)^2$ بـالممايز لـ $f(x)$ **(discriminant)**

أ. أثبت أنّ $\Delta(f)=0$، إذا وفقط إذا كان أحد عوامل $f(x)$ مربعًا لكثيرة حدود غير مختزلة في $F[x]$.

ب. أثبت أنّ $(\Delta(f))^2 \in F$.

ج. يمكن النظر لـ $G(K/F)$ بوصفها زمرة جزئية من $\overline{S}_n$، حيث $\overline{S}_n$ زمرة جميع التبادل $\{\alpha_i \mid i=1, \ldots, n\}$. أثبت أنّ $G(K/F)$ – عندما ينظر لها بهذه الطريقة – زمرة جزئية من $\overline{A}_n$ – الزمرة المكوّنة من التباديل الزوجية جميعها في $\{\alpha_i \mid i=1, \ldots, n\}$ –، إذا وفقط إذا كان $\Delta(f)\in F$.

13. يسمى العنصر في $\mathbb{C}$ عددًا صحيحًا جبريًّا، **(algebraic integer)** إذا كان صفرًا لكثيرة حدود أحادية في $\mathbb{Z}[x]$. أثبت أنّ مجموعة العناصر الصحيحة الجبرية، تشكل حلقة جزئية من $\mathbb{C}$.

الفصل 55 الامتدادات الدورية Cyclotomic Extensions

زمرة جالوا لامتداد دوري

سيعالج هذا الفصل حقول الامتداد لحقل F، التي يحصل عليها بإضافة بعض جذور الواحد لـ F، غُطّيت حالة الحقل المنتهي في الفصل 33؛ لذا، سنكون مهتمين بصورة أساسية بحالة F غير المنتهي.

1.55 تعريف يسمى حقل انشطار x^n-1 على F **الامتداد الدوري من الرتبة n لـ F** (**nth cyclotomic extension**). ■

افترض أنّ F أيّ حقل، وافترض $(x^n - 1) \in F[x]$ ، فباستخدام القسمة الطويلة – كما في برهان التمهيدية 8.33- نرى أنه إذا كانت α صفرًا لـ $x^n - 1$ و $g(x) = (x^n - 1) / (x\text{-}\alpha)$، فإنّ $g(\alpha) = (n \,.\, 1)\,(1/\alpha) \neq 0$، بشرط أنّ مميز F لا يقسم n؛ لذلك – وتحت هذا الشرط – يكون حقل انشطار $x^n - 1$ قابلًا للفصل، وهكذا، فهو امتداد ناظمي لـ F.

نبذة تاريخية

عالج كارل جاوس كثيرات الحدود الدورية في الفصل الأخير من كتابه (*Disquisitiones Arithmeticae*) عام 1801م. في ذلك الفصل، أعطى إجراءات بنائية لتحديد أصفار $\Phi_p(x)$، حيث p عدد أولي.

أصبحت طريقة جاوس مثالاً مهمًّا لجالوا في تطوير المبرهنة العامة، التي كانت حلّ سلسلة من المعادلات المساعدة، كلٌّ من درجة أولية تقسم $p - 1$، ومعاملات كل منها، وعليه، تحدد من جذور المعادلة السابقة، فقد علم جاوس – بلا ريب – أنّ جذور $\Phi_p(x)$ هي قوى إحداها، وليكن ζ، وقد حدّد المعادلات المساعدة بأخذ مجموعات محددة من مجاميع الجذور ζ^j، التي كانت الجذور المطلوبة لهذه المعادلات، على سبيل المثال: في حالة $p = 19$ و $(p - 1 = 18 = 3 \times 3 \times 2)$، احتاج جاوس إلى إيجاد معادلتين من الدرجة 3 ومعادلة من الدرجة 2 بوصفها مساعدات، وقد تبيّن أنّ الأولى لها الجذور الثلاثة:

$$\alpha_1 = \zeta + \zeta^8 + \zeta^7 + \zeta^{18} + \zeta^{11} + \zeta^{12}$$

$$\alpha_3 = \zeta^4 + \zeta^{13} + \zeta^9 + \zeta^{15} + \zeta^6 + \zeta^{10}, \quad \alpha_2 = \zeta^2 + \zeta^{16} + \zeta^{14} + \zeta^{17} + \zeta^3 + \zeta^5$$

في الحقيقة، هذه القيم الثلاث هي جذور المعادلة التكعيبية $x^3 + x^2 - 6x - 7$، ثم وجد جاوس معادلة تكعيبية ثانية، تتألف معاملاتها من ألـ α، وكانت جذورها مجاميع قوتين لـ ζ، وأخيرًا معادلة تربيعية، تتألف معاملاتها من جذور المعادلة السابقة، التي كانت ζ أحد جذورها.

صرّح جاوس بعدها (من غير برهان كامل): أنّ كل معادلة مساعدة يمكن أن تختزل إلى معادلة على الصورة $x^m - A$ ، التي يمكن حلها باستخلاص الجذور، أي إنه أثبت أنّ قابلية الحل لزمرة جالوا في هذه الحالة – الزمرة الدورية من الرتبة $p - 1$ – تؤدي إلى قابلية حلّ المعادلة الدورية باستخلاص الجذور. (انظر الفصل 56).

افترض من الآن فصاعدًا أنّ هذه هي الحالة، وأنّ K حقل الانشطار لـ $x^n - 1$ على F؛ إذن، $x^n - 1$ لها n من الأصفار في K، وبحسب النتيجة 6.23، تشكل هذه الأصفار زمرة دورية من الرتبة n مع عملية الضرب في الحقل، لقد رأينا في النتيجة 16.6، أنّ الزمرة الدورية من الرتبة n لها $\varphi(n)$ من المولدات – حيث φ هي دالة – فاي لأويلر التي عرفت قبل المبرهنة 8.20. في حالتنا هذه، المولدات $\phi(n)$ هي بالضبط الجذور البدائية من الرتبة n للواحد.

2.55 تعريف كثيرة الحدود

$$\Phi_n(x)=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\alpha_i)$$

حيث ألـ α_i الجذور البدائية من الرتبة n للواحد في $\overline{F}$، **هي كثيرة الحدود الدورية من الرتبة n على F (nth cyclotomic polynomial).** ■

لأنّ التماثل من زمرة جالوا $G(K/F)$، يجب أن يبادل بين الجذور البدائية من الرتبة n للواحد، فنرى أنّ $\Phi_n(x)$ تترك ثابتة مع أيّ عنصر في $G(K/F)$، معدودًا بوصفه تمديدًا طبيعيًّا إلى $K[x]$؛ إذن، $\Phi_n(x) \in F[x]$. بوجه خاص، لـ $F = \mathbb{Q}$، $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$، و$\Phi_n(x)$ تقسم $x^n - 1$؛ إذن، على $\mathbb{Q}$، يجب في الحقيقة أن نعدّ $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ بحسب المبرهنة 11.23. لقد رأينا أنّ $\Phi_p(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$، في النتيجة 17.23، بينما $\Phi_n(x)$ ليست بالضرورة غير مختزلة في حالة الحقول $\mathbb{Z}_p$، حيث يمكن إثبات أنّ $\Phi_n(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$.

دعونا الآن نحدد نقاشنا بالمميز 0، بوجه خاص الحقول الجزئية من الأعداد المركبة. ليكن i الصفر المركب العادي لـ $x^2 + 1$. عملنا بهذا العدد المركب في الفصل 1 يثبت أنّ:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\,\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n=\cos 2\pi+i\,\sin 2\pi=1,$$

إذن $\cos(2\pi/n) + i\,sin(2\pi/n)$، جذر من الرتبة n للواحد، وأقل عدد صحيح m، بحيث $(\cos(2\pi/n)^m + i\,sin(2\pi/n))^m = 1)$ هو n؛ إذن $\cos(2\pi/n) + i\,sin(2\pi/n)$، جذر بدائي من الرتبة n للواحد، وصفر لـ

$$\phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x].$$

3.55 مثال الجذر البدائي من الرتبة 8 للواحد في $\mathbb{C}$، هو:

$$\begin{aligned}\xi &= \cos\frac{2\pi}{8}+i\,\sin\frac{2\pi}{8}\\ &=\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

بحسب مبرهنة الزمر الدورية، وبوجه خاص بحسب النتيجة 16.6، الجذور البدائية من الرتبة 8 للواحد في $\mathbb{Q}$، هي:

ζ^5، ζ^3، ζ، و ζ^7؛ إذن:

$$\Phi_8(x) = (x-\zeta)(x-\zeta^3)(x-\zeta^5)(x-\zeta^7).$$

يمكننا الحساب مباشرة من هذا التعبير، $\Phi_8(x) = x^4+1$ (انظر التمرين 1). قارن هذا بالمثال 7.54. ▲

لنظل محددين عملنا على $F = \mathbb{Q}$، ولنفترض – من غير برهان – أنّ $\Phi_n(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{Q}$. لتكن :

$$\xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ \sin\frac{2\pi}{n},$$

إذن، ζ جذر بدائي من الرتبة n للواحد. لاحظ أنّ ζ مولد لزمرة الضرب الدورية من الرتبة n، المكوّنة من الجذور من الرتبة n للواحد. الجذور البدائية كلها من الرتبة n – أي مولدات هذه الزمرة – تكون على الصورة ζ^m، حيث $1 \leq m < n$ وm أولية بالنسبة إلى n. الحقل $\mathbb{Q}(\zeta)$ هو كامل حقل الانشطار لـ $x^n - 1$ على $\mathbb{Q}$. ليكن $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. إذا كان ζ^m جذرًا بدائيًّا آخر من الرتبة n للواحد؛ إذن – ولأنّ ζ و ζ^m مترافقان على $\mathbb{Q}$ – يوجد تماثل ذاتي τ_m في $G(k / \mathbb{Q})$ يربط ζ بـ ζ^m. ليكن τ_r تماثلا ذاتيًّا مشابهًا في $G(K / \mathbb{Q})$ بالنسبة إلى ζ^r الجذر البدائي من الرتبة n للواحد؛ إذن:

$$(\tau_m\tau_r)(\zeta) = \tau_m(\zeta^r) = (\tau_m(\zeta))^r = (\zeta^m)^r = \zeta^{rm}.$$

هذا يثبت أنّ زمرة جالوا $G(K / \mathbb{Q})$ تماثل الزمرة G_n في المبرهنة 6.20 ، المكوّنة من عناصر $\mathbb{Z}_n$ الأولية بالنسبة إلى n مع عملية الضرب مقياس n، وتحوي هذه الزمرة $\varphi(n)$ من العناصر، وهي إبدالية.

ظهرت بعض الحالات الخاصة من هذه المادة مرات عدة في الكتاب والتمارين، على سبيل المثال: α في المثال 7.54 جذر بدائي من الرتبة 8 للواحد، وقد ناقشنا في ذلك المثال مطابقة لتلك المعطاة هنا. نلخص هذه النتائج في مبرهنة.

4.55 مبرهنة زمرة جالوا للامتداد الدوري من الرتبة n،$\varphi(n)$ من العناصر، وتماثل الزمرة المؤلفة من الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من n والأولية بالنسبة إلى n مع عملية الضرب مقياس n.

5.55 مثال يوضح المثال 7.54 هذه المبرهنة؛ لأنه من السهل رؤية أنّ حقل الانشطار لـ $x^4 + 1$ ، هو نفسه حقل الانشطار لـ $x^8 - 1$ على $\mathbb{Q}$، حيث يستنتج هذا من حقيقة أنّ $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ (انظر المثال 3.55 والتمرين 1). ▲

6.55 نتيجة زمرة جالوا للامتداد الدوري من الرتبة p على $\mathbb{Q}$ ، حيث p أولي، هي الزمرة الدورية من الرتبة $p - 1$.

البرهان بحسب المبرهنة 4.55، لزمرة جالوا للامتداد الدوري من الرتبة p على $\mathbb{Q}$،$\varphi(p) = p - 1$ من العناصر، وهي تماثل زمرة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من p والأولية بالنسبة إلى p مع عملية الضرب مقياس p. هذه بالضبط زمرة الضرب $\langle \mathbb{Z}^*_p\ ,.\rangle$ المؤلفة من العناصر غير الصفرية في الحقل $\mathbb{Z}_p$ مع عملية الضرب في الحقل، وبحسب النتيجة 6.23، هذه الزمرة دورية. ♦

المضلعات القابلة للإنشاء

نختم بتطبيق يحدد أيًّا من المضلعات المنتظمة التي لها n من الأضلاع قابلة للإنشاء بالمسطرة والفرجار، لقد رأينا في الفصل 32، أنّ المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا يكون قابلًا للإنشاء، إذا وفقط إذا كان $\cos(2\pi/n)$ عددًا حقيقيًّا قابلًا للإنشاء. الآن، لتكن:

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

إذن

$$\frac{1}{\zeta} = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$$

لأن:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \cos^2\frac{2\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n} = 1$$

ولكن

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = 2\cos\frac{2\pi}{n}.$$

إذن، تثبت النتيجة 8.32 أنّ المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا، يكون قابلًا للإنشاء، فقط إذا كان $\zeta + 1/\zeta$ يولد امتدادًا على $\mathbb{Q}$ درجته من قوى ألـ 2.

إذا كان K حقل الانشطار لـ $x^n - 1$ على $\mathbb{Q}$، فإنّ $[K : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$، بحسب المبرهنة 4.55، وإذا كانت $\sigma \in G(K/\mathbb{Q})$ و $\sigma(\zeta) = \zeta^r$، فإنّ:

$$\begin{aligned}\sigma\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) &= \zeta^r + \frac{1}{\zeta^r}\\ &= \left(\cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}\right) + \left(\cos\frac{2\pi r}{n} - i\sin\frac{2\pi r}{n}\right)\\ &= 2\cos\frac{2\pi r}{n}.\end{aligned}$$

ولكن إذا كان $1 < r < n$، فنحصل على $\cos(2\pi r/n) = 2\cos(2\pi/n)$ فقط في حالة $r = n - 1$؛ إذن، العناصر الوحيدة في $G(K/G)$ التي تحمل $\tau(\zeta) = \zeta^{n-1} = 1/\zeta$ إلى نفسها، هي التماثل الذاتي المحايد والتماثل الذاتي τ، حيث $\zeta + 1/\zeta$، يثبت هذا أنّ الزمرة الجزئية من $G(K/\mathbb{Q})$ التي تترك $\mathbb{Q}(\zeta + 1/\zeta)$ ثابتًا، هي من الرتبة 2؛ إذن وبحسب مبرهنة جالوا:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) : \mathbb{Q}\right] = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

إذن، يكون المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا قابلاً للإنشاء، فقط إذا كان $\varphi(n)/2$ – وهكذا $\varphi(n)$ كذلك – من قوى ألـ 2.

يمكن الإثبات بمناقشة أولية في مبرهنة الأعداد، أنه إذا كانت:

$$n = 2^v p_1^{s1} \cdots p_t^{st},$$

حيث ألـ p_i أعداد أولية مختلفة تقسم n؛ إذن:

$$\varphi(n) = 2^{v-1} p_1^{s1-1} \cdots p_t^{st-1}(p_1 - 1) \cdots (p_t - 1). \qquad (1)$$

إذا كانت $\varphi(n)$ قوة لـ 2، فإنّ كل عدد أولي فردي يقسم n ، يجب أن يظهر فقط للقوة الأولى، ويجب أن يكون أكثر بواحد من إحدى قوى ألـ 2؛ إذن، يجب أن يكون كل

$$p_i = 2^m + 1$$

لأي m. ولأنّ -1 صفر لـ $x^q + 1$ ، حيث q عدد أولي فردي، $x + 1$ تقسم $x^q + 1$ ، حيث q عدد أولي فردي؛ إذن، إذا كانت $m = q^u$، حيث q عدد أولي فردي، فإنّ $2^m + 1 = (2^u)^q + 1$ تقسم بـ 2^u+1؛ وعليه، ليكون $p_i = 2^m + 1$ عددًا أوليًا، يجب أن تكون m تقسم بـ 2 فقط، وبهذا يجب أن تكون p_i على الصورة:

$$p_i = 2^{(2^k)} + 1,$$

عدد فيرما الأولي (Fermat prime): خمّن فيرما أنّ هذه الأعداد $2^{(2^k)}+1$ أعداد أولية لكل عدد صحيح غير سالب k، ولكن أثبت أويلر أنه بينما تعطى $k = 0,1,2,3$ و $k = 4$ الأعداد الأولية 3 ، و5 ، و17 ، و257 و 65537 ، فإنّ لـ $k = 5$، العدد الصحيح $2^{(2^5)} + 1$ يقبل القسمة على 641، وقد أثبت أنّ لـ $5 \leq k \leq 19$ ، تكون الأعداد $2^{(2^k)} + 1$ كلها غير أولية. حالة $k = 20$ ما زالت غير محلولة على حدّ علمنا، وكذلك لـ 60 قيمة على الأقل لـ k أكبر من 20، بما فيها $k = 9448$ ، وقد أثبت أنّ $2^{(2^k)} + 1$ غير أوليّ، ومن غير المعلوم ما إذا كان عدد أعداد فيرما الأولية منتهيًا أم غير منته.

لقد أثبتنا أنّ المضلعات المنتظمة التي لها n ضلعًا والوحيدة التي يمكن أن تكون قابلة للإنشاء، هي تلك التي تكون الأعداد الأولية الفردية القاسمة لـ n أعداد فيرما الأولية، التي لا تقسم مربعاتها n. بوجه خاص، المضلعات المنتظمة التي لها p ضلعًا الوحيدة التي يمكن أن تكون قابلة للإنشاء، حيث p أكبر من 2 ، هي تلك التي تكون حيث p عدد فيرما أولي.

مثال 7.55 المضلع المنتظم الذي له 7 أضلاع غير قابل للإنشاء؛ لأن 7 ليس عدد فيرما أوليًا. بالمثل المضلع المنتظم الذي له 18 ضلعًا ليس قابلًا للإنشاء؛ لأنه على الرغم من أنّ 3 عدد فيرما أولي، فإنّ مربعها يقسم ألـ 18. ▲

سنبين الآن أنّ هذه المضلعات المنتظمة التي لها n ضلعًا المرشحة لتكون قابلة للإنشاء، هي في الحقيقة قابلة للإنشاء. لتكن ζ مرة أخرى الجذر البدائي من الرتبة n للواحد $\cos(2\pi/n) + i\, sin(2\pi/n)$. لقد رأينا قبل قليل أنّ:

$$2\cos\frac{2\pi}{n} = \zeta + \frac{1}{\zeta},$$

وأنّ

$$\left[\mathbb{Q}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) : \mathbb{Q}\right] = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

افترض الآن أنّ $\varphi(n)$ القوة 2^s لـ 2. ليكن $E=\mathbb{Q}(\zeta+1/\zeta)$، لقد رأينا سابقًا أنّ $\mathbb{Q}(\zeta+1/\zeta)$ حقل جزئي من $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ يترك ثابتًا بـ $H_1=\{\iota,\tau\}$، حيث ι العنصر المحايد في $G(K/\mathbb{Q})$ و $\tau(\zeta)=1/\zeta$، وبحسب مبرهنة سيلو، توجد زمر جزئية إضافية H_j من الرتبة 2^j من $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$، حيث $j=0,2,3,\ldots,s$، بحيث إنّ:

$$\{\iota\}=H_0<H_1<\cdots<H_s=G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}).$$

بحسب مبرهنة جالوا

$$\mathbb{Q}=K_{H_s}<K_{H_{s-1}}<\ldots<K_{H_1}=\mathbb{Q}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

و $[K_{H_{j-1}}:K_{H_j}]=2$. لاحظ أنّ $(\zeta+1/\zeta)\in\mathbb{R}$، وهكذا $\mathbb{Q}(\zeta+1/\zeta)<\mathbb{R}$ إذا كان $K_{H_{j-1}}=K_{H_j}(\alpha_j)$، فإنّ α_j صفر لـ $(a_j x^2+b_j x+c_j)\in K_{H_j}[x]$. وبحسب "القانون العام لحلّ المعادلة التربيعية" المشهور، نحصل على:

$$K_{H_{j-1}}=K_{H_j}(\sqrt{b_j^2-4a_jc_j})$$

لأننا رأينا في الفصل 33 أنّ إنشاء الجذور التربيعية لعدد موجب قابل للإنشاء يمكن تحقيقه بالمسطرة والفرجار، نرى أنّ كلّ عنصر في $\mathbb{Q}(\zeta+1/\zeta)$، وبوجه خاص، $\cos(2\pi/n)$ قابل للإنشاء؛ إذن، المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا، حيث $\varphi(n)$ إحدى قوى الـ 2 قابل للإنشاء.

نلخص عملنا تحت هذا العنوان بمبرهنة.

8.55 مبرهنة المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا قابل للإنشاء بالمسطرة والفرجار، إذا وفقط إذا كانت الأعداد الأولية الفردية كلها التي تقسم n، أعداد فيرما الأولية، وبحيث لا تقسم مربعاتها n.

9.55 مثال المضلع المنتظم الذي له 60 ضلعًا قابلًا للإنشاء؛ لأن $(5)(3)(2^2)=60$ وكلا 3 و 5 أعداد فيرما الأولية. ▲

■ تمارين 55

حسابات

.1 بالرجوع إلى المثال 3.55، أكمل الحسابات المشار إليها، مثبتًا أنّ $\Phi_8(x) = x^4 + 1$.

[اقتراح: احسب حاصل الضرب بدلالة ζ، ثمّ استخدم حقيقة أنّ $\zeta^8 = 1$ و $\zeta^4 = -1$ لتبسيط المعاملات].

.2 صنّف زمرة كثيرة الحدود $(x^{20} - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ بحسب المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التولد.

[**مساعدة**: استخدام المبرهنة 4.55].

.3 مستخدمًا صيغة $\varphi(n)$ بدلالة تحليل n، كما هو معطًى في المعادلة (1)، احسب القيم المشار إليها:

أ. $\varphi(60)$ ب. $\varphi(1000)$ جـ. $\varphi(8100)$

.4 أعطِ القيم الـ 30 الأولى لـ $n \geq 3$، بحيث يكون المضلع المنتظم الذي له n ضلعًا قابلًا للإنشاء بالمسطرة والفرجار.

.5 أوجد أصغر زاوية ذات درجة صحيحة، أي $1°$ ، $2°$ ، $3°$ ، إلى آخره، قابلة للإنشاء بالمسطرة والفرجار. [مساعدة: إنشاء الزاوية $1°$ يعادل إنشاء المضلع المنتظم الذي له 360 ضلعًا، وهكذا].

.6 ليكن K حقل انشطار $x^{12} - 1$ على $\mathbb{Q}$.

أ. أوجد $[K : \mathbb{Q}]$.

ب. أثبت أنه لكل $\sigma \in G(K/\mathbb{Q})$ ، σ^2 هو التماثل الذاتي المحايد. صنّف $G(K/\mathbb{Q})$ بحسب المبرهنة الأساسية 12.11 للزمر الإبدالية منتهية التولد.

.7 أوجد $\Phi_3(x)$ على $\mathbb{Z}_2$. وأوجد $\Phi_8(x)$ على $\mathbb{Z}_3$.

.8 كم عنصرًا يوجد في حقل انشطار $x^6 - 1$ على $\mathbb{Z}_3$؟

مفاهيم

.9 ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. $\Phi_n(x)$ غير مختزلة على أيّ حقل مميزه 0.

________ ب. كل صفر في $\mathbb{C}$ لـ $\Phi_n(x)$ ، هو جذر بدائي من الرتبة n للواحد.

________ جـ. زمرة $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ تحوي n من العناصر.

________ د. زمرة $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ إبدالية.

________ هـ. زمرة جالوا لحقل انشطار $\Phi_n(x)$ على $\mathbb{Q}$ من الرتبة $\varphi(n)$.

________ و. المضلع المنتظم الذي له 25 ضلعًا، قابل للإنشاء بالمسطرة والفرجار.

________ ز. المضلع المنتظم الذي له 17 ضلعًا، قابل للإنشاء بالمسطرة والفرجار.

________ ح. لكل عدد أولي p، المضلع المنتظم الذي له p ضلعًا، قابل للإنشاء إذا وفقط إذا كان p عدد فيرما الأولي.

________ ط. الأعداد الصحيحة كلها على الشكل $2^{(2^k)} + 1$ ، حيث k عدد صحيح غير سالب، هي أعداد فيرما الأولية.

________ ي. أعداد فيرما الأولية كلها أعداد على الصورة $2^{(2^k)} + 1$، حيث k عدد صحيح غير سالب.

براهين

.10 أثبت أنه إذا كان F حقلًا مميزه لا يقسم n، فإنّ

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

في $F[x]$، حيث الضرب على القواسم d لـ n كلها.

11. أوجد كثيرة الحدود الدورية $\Phi_n(x)$ على $\mathbb{Q}$ لـ $n = 1,2,3,4,5,6$. [مساعدة: استخدم التمرين 10].

12. أوجد $\Phi_{12}(x)$ في $\mathbb{Q}[x]$. [مساعدة: استخدم التمرينين 10 و 11].

13. أثبت أنه في $\mathbb{Q}[x]$، $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ لكل عدد صحيح فردي $n > 1$. [مساعدة: إذا كانت ζ جذرًا بدائيًّا من الرتبة n الفردية للواحد، فما رتبة $-\zeta$؟].

14. لتكن $n,m \in \mathbb{Z}^+$ أولية نسبيًّا. أثبت أنّ حقل الانشطار في $\mathbb{C}$ لـ $x^{nm} - 1$ على $\mathbb{Q}$ هو نفسه حقل الانشطار في $\mathbb{C}$ لـ $(x^n - 1)(x^m - 1)$ على $\mathbb{Q}$.

15. لتكن $n, m \in \mathbb{Z}^+$ أولية نسبيًّا. أثبت أنّ زمرة $(x^{nm} - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$ تماثل الضرب المباشر لزمرتي $(x^n - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ و $(x^m - 1) \in \mathbb{Q}[x]$ على $\mathbb{Q}$. [مساعدة: مستخدمًا مبرهنة جالوا، أثبت أنّ زمرتي $x^m - 1$ و $x^n - 1$ كلتيهما يمكن أن تُعدّا زمرتين جزئيتين من زمرة $x^{nm} - 1$. ثم استخدم التمرينين 50 و 51 في الفصل 11].

الفصل 56 عدم قابلية حل المعادلة من الدرجة الخامسة للحلّ Insolvability of the Quintic

المشكلة نحن معتادون على حقيقة أنّ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية $f(x) = ax^2 + bx + c$، $a \neq 0$ ذات المعاملات الحقيقية لها $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a)$ بوصفها أصفارًا في $\mathbb{C}$. في الحقيقة، هذا صحيح لـ $f(x) \in F[x]$ حيث F أيّ حقل مميزه $\neq 2$ والأصفار في $\overline{F}$. سيُطلب منا في التمرين 4 إثبات هذا. وهكذا، وعلى سبيل المثال: $(x^2 + 2x + 3) \in \mathbb{Q}[x]$ أصفارها في $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

امتدادات بالجذور

قد تتساءل ما إذا كانت أصفار كثيرة حدود من الدرجة الثالثة على $\mathbb{Q}$، يمكن دائمًا التعبير عنها باستخلاص الجذور، والجواب نعم بالتأكيد، وحتى أصفار كثيرة حدود من الدرجة 4 على $\mathbb{Q}$، يمكن التعبير عنها باستخلاص الجذور، وبعد أن حاول الرياضيون سنوات إيجاد "صيغة باستخلاص الجذور". لأصفار كثيرة الحدود من الدرجة 5، فقد كان نصرًا، عندما أثبت "أبل" أنّ المعادلة الخامسة لا تحلّ بالضرورة باستخلاص الجذور، سيكون عملنا الأول الوصف الدقيق لما يعنيه هذا، وسيُستخدم في المناقشة المقبلة قدر كبير من الجبر الذي طوّرناه.

1.56 تعريف يسمى الامتداد K للحقل F **امتدادًا لـ F بالجذور. (extension of F by radicals)**، إذا وجدت عناصر $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in K$ وأعداد صحيحة موجبة $n_1, \ldots, n_r$، بحيث إنّ $\alpha_1^{n_1} \in F$، $K = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$، و $\alpha_i^{n_i} \in F(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1})$، لكل $1 < i \leq r$ حيث كثيرة الحدود $f(x) \in F[x]$ **قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F (Solv-able by radicals over F)**، إذا كان حقل الانشطار E لـ $f(x)$ على F محتوًى في امتداد لـ F بالجذور. ■

إذن، تكون كثيرة الحدود $f(x) \in F(x)$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F، إذا كان بالإمكان الحصول على كل صفر لـ $f(x)$ باستخدام سلسلة منتهية من عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وأخذ الجذور n_i بدءًا بعناصر من F. الآن، قولنا: إنّ المعادلة من الدرجة الخامسة غير قابلة للحل في الحالة التقليدية – أي المميز 0– لا يعني قولنا: إنه لا معادلة من الدرجة الخامسة قابلة للحلّ، كما يثبت المثال الآتي.

■ نبذة تاريخية

كان أول نشر لصيغة حلّ المعادلة من الدرجة الثالثة باستخلاص الجذور عام 1545م في كتاب (*Ars Magna*) لجيرولامو كاردانو (*Girolamo Cardano*)، على الرغم من أنّ بداية اكتشاف الطريقة جزئيًّا يعود كذلك لسيبوني ديل فيرو، ونيكولو تارتاجليا (*Scipione del Ferro and Niccolo Tartaglia*). اكتشف تلميذ كاردانو، لودوفيكو فيراري (*Lodovico Ferrari*) طريقة لحلّ المعادلة من الدرجة الرابعة باستخلاص الجذور، التي ظهرت كذلك ضمن عمل كاردانو.

وبعد أن حاول كثير من الرياضيين حلّ المعادلة من الدرجة الخامسة بطرق مشابهة، كان جوزيف لويس لاجرانج (*Joseph Louis Lagrange*) عام 1770م أول من حاول بالتفصيل تحليل المبدأ العام وراء حلول كثيرات الحلول من الدرجة 3 و 4، وبرهن لماذا فشلت هذه الطرق في حل تلك المعادلات ذات الدرجات الأعلى، كان أساس فهمه العميق لهذه الطرق السابقة يقوم على وجود دوال نسبية للجذور، التي تأخذ قيمتين أو ثلاثة– على التوالي– تحت التباديل الممكنة للجذور كلها، وهكذا يمكن كتابة هذه الدوال النسبية بوصفها جذورًا لمعادلات ذات درجة أقلّ من الأصلية، لم تكن أي من هذه الدوال واضحة في المعادلات ذات الدرجات الأعلى.

كان أول رياضي يدعي عدم قابلية المعادلة من الدرجة الخامسة للحلّ هو باولو روفيني (*Paolo Ruffini*1765-1822)، في كتابه في الجبر عام 1799م، وقد كان برهانه تبعًا لمقترحات لاجرانج، ففي الواقع، حدّد الزمر الجزئية جميعها من S_5، وأثبت كيف تؤثر هذه الزمر الجزئية في الدوال النسبية لجذور المعادلة، ولسوء الطالع، كان هناك كثير من الثغرات في النسخ المنشورة من البرهان، لقد كان نيلز هينريك أبل (*Niels Henrik Abel*) الذي نشر برهانًا كاملًا عامي 1824م و1826م ، مغلقًا ثغرات روفيني جميعها ، الذي حلّ سؤالًا عمره قرون.

مثال 2.56 كثيرة الحدود $x^5 - 1$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$. حقل الانشطار K لـ $x^5 - 1$ مولد بالجذر البدائي ζ من الرتبة 5 للواحد، أي $\zeta^5 = 1$ و $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. وكذلك $x^5 - 2$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$؛ لأن حقل انشطارها مولد بـ $\sqrt[5]{2}$ و ζ، حيث $\sqrt[5]{2}$ هو الصفر الحقيقي لـ $x^5 - 2$. ▲

للقول: إنّ المعادلة من الدرجة الخامسة غير قابلة للحلّ في الحالة التقليدية، يعني أنه يوجد بعض كثيرات الحدود من الدرجة 5 معاملاتها أعداد حقيقية، ولا يمكن حلها باستخلاص الجذور. سنثبت ذلك، سوف نفترض أنّ الحقول المذكورة خلال هذا الفصل جميعها ذات مميز 0.

الخطوط العريضة للمناقشة هي كما يأتي، ومن النافع محاولة تذكرها.

1. سنثبت أنّ كثيرة الحدود $f(x) \in F(x)$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F، (إذا و) فقط إذا كان حقل انشطارها E على F له زمرة جالوا قابلة للحل.

تذكر أنّ الزمرة القابلة للحلّ، هي تلك التي يكون لها سلسلة تركيب مع خوارج إبدالية، ومع أنّ هذه المبرهنة صحيحة في الاتجاهين، فإننا لن نثبت جزء الـ «إذا».

2. سوف نثبت أنه يوجد حقل جزئي F من الأعداد الحقيقية وكثيرة حدود$f(x) \in F(x)$ من الدرجة 5 مع حقل انشطار E على F، بحيث $G(E/F) \simeq S_5$، زمرة التناظر على 5 حروف. تذكر أنّ سلسلة التركيب لـ S_5 هي $\{\iota\} < A_5 < S_5$، ولأنّ A_5 ليست إبدالية، نكون قد انتهينا.

التمهيدية الآتية تقوم بمعظم عمل الخطوة 1.

3.56 تمهيدية ليكن F حقلًا مميزه 0، وليكن $a \in F$، فإذا كان K حقل انشطار $x^n - a$ على F، فإنّ $G(K/F)$ زمرة قابلة للحل.

البرهان: افترض أولاً أنّ F يحوي الجذور جميعها من الرتبة n للواحد، وبحسب النتيجة 6.23، تشكل الجذور من الرتبة n للواحد زمرة جزئية دورية من $\langle F^*,.\rangle$ ليكن ζ مولدًا لهذه الزمرة الجزئية. (في الحقيقة، المولدات هي بالضبط الجذور البدائية من الرتبة n للواحد)؛ إذن، الجذور من الرتبة n للواحد هي:

$$1, \zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}.$$

فإذا كان $\beta \in \overline{F}$ صفرًا لـ $(x^n - a) \in F[x]$، فإنّ أصفار $x^n - a$ هي:

$$\beta, \zeta\beta, \zeta^2\beta, \cdots, \zeta^{n-1}\beta.$$

ولأنّ $K = F(\beta)$، فإنّ أيّ تماثل ذاتي σ في $G(K/F)$ يتحدّد بقيمة $\sigma(\beta)$ للتماثل الذاتي σ على β. الآن، إذا كان $\sigma(\beta) = \zeta^i\beta$ و $\tau(\beta) = \zeta^j\beta$، حيث $\tau \in G(K/F)$، فإنّ:

$$(\tau\sigma)(\beta) = \tau(\sigma(\beta)) = \tau(\zeta^i\beta) = \zeta^i\,\tau(\beta) = \zeta^i\zeta^j\beta,$$

لأنّ $\zeta^i \in F$. وبالمثل:

$$(\sigma\tau)(\beta) = \zeta^j\zeta^i\beta.$$

إذن، $\sigma\tau = \tau\sigma$، و$G(F/K)$ إبدالية؛ ولذلك، فهي قابلة للحل.

الآن، افترض أنّ F لا يحوي الجذور البدائية من الرتبة n للواحد. ليكن ζ مولدًا للزمرة الدورية للجذور من الرتبة n للواحد مع عملية الضرب في $\overline{F}$. ليكن β مرة أخرى صفرًا لـ $x^n - a$، فلأنّ β و $\zeta\beta$ كليهما في حقل الانشطار K لـ $x^n - a$، فإنّ $\zeta = (\zeta\beta)/\beta$ تقع في K. ليكن $F' = F(\zeta)$، نحصل على $F < F' \leq K$. الآن، F' امتداد ناظمي على F؛ لأن F' حقل انشطار $x^n - 1$. ولأنّ $F' = F(\zeta)$، فيتحدد التماثل الذاتي η من $G(F'/F)$ بـ $\eta(\zeta)$، ويجب أن نحصل على $\eta(\zeta) = \zeta^i$؛ لأن أصفار $x^n - 1$ كلها هي قوًى لـ ζ، وإذا كان $\mu(\zeta) = \zeta^j$، حيث $\mu \in G(F'/F)$؛ إذن:

$$(\mu\eta)(\zeta) = \mu(\eta(\zeta)) = \mu(\zeta^i) = \mu(\zeta)^i = (\zeta^j)^i = \zeta^{ij}$$

وكذلك بالمثل،

$$(\eta\mu)(\zeta) = \zeta^{ij}.$$

إذن، $G(F'/F)$ إبدالية. وبحسب المبرهنة الأساسية لمبرهنة جالوا،

$$\{\iota\} \leq G(K/F') \leq G(K/F)$$

سلسلة ناظمية؛ ولذلك فهي سلسلة تحت ناظمية من الزمر. أثبت الجزء الأول من البرهان أنّ $G(K/F')$ إبدالية، وتخبرنا مبرهنة جالوا بأنّ $G(K/F)/G(K/F')$ تماثل $G(F'/F)$، وهي إبدالية، حيث يثبت التمرين 6، أنه إذا كان لزمرة سلسلة تحت ناظمية من الزمر الجزئية وزمر خارجة إبدالية، فإنّ أيّ تصفية لهذه السلسلة لها كذلك زمر خارجة إبدالية؛ إذن، سلسلة التركيب لـ $G(K/F)$ لها زمر خارجة إبدالية، وهكذا، فإنّ $G(K/F)$ قابلة للحل. ♦

ستكمل المبرهنة الآتية الخطوة 1 في برنامجنا.

4.56 مبرهنة ليكن F حقلًا مميزه صفر، وليكن $F \leq E \leq K \leq \overline{F}$ ، حيث E امتداد ناظمي لـ F و K امتداد بالجذور لـ F؛ إذن، $G(E/F)$ زمرة قابلة للحل.

البرهان سنثبت في البداية أنّ K محتوًى في امتداد ناظمي منته L لـ F بالجذور، وأنّ الزمرة $G(L/F)$ قابلة للحل. لأنّ K امتداد بالجذور، $K' = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$

حيث $\alpha_i^{n_i} \in F(\alpha_1, \cdots, \alpha^{i-1})$ و $1 < i \leq r$ و $\alpha_1^{n1} \in F$. ولتكوين L، نكوّن أولاً حقل الانشطار L_1 لكثيرة الحدود $f_1(x) = x^{n1} - \alpha^{n1}$ على F؛ إذن، L_1 امتداد ناظمي على F، وتثبت التمهيدية 3.56 أنّ $G(L_1/F)$ زمرة قابلة للحل. الآن، $\alpha_2^{n2} \in L_1$ ونكوّن كثيرة الحدود.

$$f_2(x) = \prod_{\sigma \in G(L_1/F)} \left[\left(x^{n_2} - \sigma(\alpha_2) \right)^{n_2} \right].$$

لأنّ كثيرة الحدود لا تتغير تحت تأثير أيّ σ في $G(L_1/F)$ ، نرى أنّ $f_2(x) \in F[x]$. سنترك L_2 ليكون حقل انشطار $f_2(x)$ على L_1؛ إذن، L_2 حقل انشطار على F كذلك، وهو امتداد ناظمي على F بالجذور، نستطيع بناء L_2 من L_1 عن طريق خطوات متكررة كما في التمهيدية 3.56 مرورًا إلى حقل انشطار $x^{n2} - \sigma(\alpha_2)^{n2}$ بكل خطوة، وبحسب التمهيدية 3.56 وتمرين 7، نرى أنّ زمرة جالوا على F لكل امتداد جديد مكوّن تظل قابلة للحل، نستمر بهذه الخطوات بتكوين حقول انشطار على F بهذا الأسلوب: في المرحلة i، نكوّن حقل انشطار لكثيرة الحدود

$$f_i(x) = \prod_{\alpha \in G(L_{i-1}/F)} \left[\left(x^{n_i} - \sigma(\alpha_i) \right)^{n_i} \right]$$

على L_{i-1} نحصل أخيرًا على الحقل $L = L_r$ ، الذي يكون امتدادًا ناظميًا على F بالجذور، ونرى أنّ $G(L/F)$ زمرة قابلة للحلّ، حيث نرى من خلال العمل أنّ $K \leq L$.

لنختم عملنا، نحتاج إلى أن نلاحظ أنه بحسب المبرهنة 6.53، يكون $G(E/F) \simeq G(L/F)/G(L/E)$. إذن $G(E/F)$، زمرة عامل، وعليه، هي صورة تشاكل من $G(L/F)$. ولأنّ $G(L/F)$ قابل للحل، فيثبت التمرين 29 في الفصل 35 أنّ $G(E/F)$ قابل للحل. ♦

عدم قابلية المعادلة من الدرجة الخامسة للحل باستخلاص الجذور

بقي علينا إثبات وجود حقل جزئي F من الأعداد الحقيقية وكثيرة حدود $f(x) \in F(x)$ من الدرجة الخامسة، بحيث إنّ حقل الانشطار E لـ $f(x)$ على F له زمرة جالوا تماثل S_5.

ليكن $y_1 \in \mathbb{R}$ متساميًا على $\mathbb{Q}$، $y_2 \in \mathbb{R}$ متساميًا على $\mathbb{Q}(y_1)$ ، وهكذا، حتى نصل إلى $y_5 \in \mathbb{R}$ متسامية على $\mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_4)$. بالإمكان برهنة وجود مثل هذه الأعداد الحقيقية المتسامية باستخدام مقاربة العدّ، فالأعداد المتسامية التي يمكن إيجادها بهذه الطريقة تسمى **عناصر متسامية مستقلة** على $\mathbb{Q}$ (**independent transcendental elements**). ليكن $E = \mathbb{Q}(y_1, \cdots, y_5)$، ولتكن:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{5} (x - y_i).$$

إذن، $f(x) \in E[x]$ الآن معاملات $f(x)$– ما عدا احتمال الإشارة – ضمن الدوال المتناظرة الابتدائية في y_i، يعني:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= y_1 + y_2 + \ldots + y_5, \\
s_2 &= y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_1y_5 + y_2y_3 \\
&\quad + y_2y_4 + y_2y_5 + y_3y_4 + y_3y_5 + y_4y_5, \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
s_5 &= y_1y_2y_3y_4y_5.
\end{aligned}
$$

معامل x^i في $f(x)$ هو $\pm s_{5-i}$. ليكن $F = \mathbb{Q}(s_1, s_2, \cdots, s_5)$؛ إذن، $f(x) \in F[x]$ (انظر الشكل 5.56)؛ وعليه، E حقل انشطار على F لـ $f(x)$.

لأن الـ y_i تتصرف بوصفها غير معين على $\mathbb{Q}$ ، فإنّ كل $\sigma \in S_5$ زمرة التماثل على خمسة حروف – تولد تماثلاً ذاتيًا على E معرّف بـ $\sigma(a) = a$ لكل $a \in \mathbb{Q}$ و $\sigma(y_i) = y_{\sigma(i)}$. ولأنّ $\prod_{i=1}^{5}(x - y_i)$ هي كثيرة الحدود نفسها، $\prod_{i=1}^{5}(x - y_{\sigma(i)})$ فنحصل على

$$\overline{\sigma}(s_i) = s_i$$

لكل i، وهذا يؤدي إلى أنّ $\overline{\sigma}$ تترك F ثابتة، وهكذا، فإنّ $\overline{\sigma} \in G(E/F)$ الآن، رتبة S_5 تساوي !5، وعليه،

$$|G(E/F)| \geq 5!.$$

لأنّ درجة حقل الانشطار على F لكثيرة حدود من الدرجة 5 على F، هي على الأكثر !5، فنرى أنّ:

$$|G(E/F)| \leq 5!.$$

إذن، $|G(E/F)| = 5!$، والتماثلات الذاتية $\overline{\sigma}$ تصنع كامل زمرة جالوا $G(E/F)$.
لذلك، $G(E/F) \simeq S_5$، وهذا يؤدي إلى أنّ $G(E/F)$ غير قابلة للحل، هذا يكمل خطوطنا العريضة، ونلخص ذلك في مبرهنة.

$$
\begin{array}{c}
E = \mathbb{Q}(y_1,\ldots,y_5) \\
| \\
F = \mathbb{Q}(s_1,\ldots,s_5) \\
| \\
\mathbb{Q}
\end{array}
$$

الشكل **5.56**

6.56 مبرهنة لتكن $y_1, \ldots, y_5$ أعدادًا حقيقية متسامية مستقلة على $\mathbb{Q}$. كثيرة الحدود

$$f(x) = \prod_{i=1}^{5}(x - y_i)$$

غير قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $F = \mathbb{Q}(s_1, s_2, \cdots, s_5)$، حيث s_i هي الدالة المتناظرة الابتدائية i في $y_1, \ldots, y_5$.

من الواضح أنّ تعميم هذه المناقشة يثبت (الهدف النهائي)، أنّ كثيرة الحدود من الدرجة n ليست بالضرورة قابلة للحلّ باستخلاص الجذور لـ $n \geq 5$.

وختامًا، نشير إلى أنه توجد كثيرات حدود من الدرجة 5 في $\mathbb{Q}[x]$ غير قابلة للحل باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$. يترك برهان هذا إلى التمارين (انظر التمرين 8).

■ تمارين 56

مفاهيم

.1 هل يمكن الحصول على حقل الانشطار K لـ x^2+x+1 على $\mathbb{Z}_2$ بإضافة جذر تربيعي لـ $\mathbb{Z}_2$ لأحد عناصر $\mathbb{Z}_2$؟ هل K امتداد بالجذور لـ $\mathbb{Z}_2$؟

.2 هل كل كثيرة حدود في $F[x]$ على الصورة $ax^8+bx^6+cx^4+dx^2+e$، حيث $a \neq 0$، قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F، إذا كان مميز F يساوي 0؟ لماذا نعم أو لا؟

.3 ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. ليكن F حقلًا مميزه 0. كثيرة الحدود في $F[x]$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور إذا وفقط إذا كان حقل انشطارها في $\bar{F}$ محتوًى في امتداد بالجذور لـ F.

________ ب. ليكن F حقلًا مميزه 0. كثيرة الحدود في $F[x]$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور إذا وفقط إذا كان حقل انشطارها في $\bar{F}$ له زمرة جالوا قابلة للحلّ على F.

________ جـ. حقل انشطار $x^{17}-5$ على $\mathbb{Q}$ له زمرة جالوا قابلة للحلّ.

________ د. العددان π و $\sqrt{\pi}$ متساميان مستقلان على $\mathbb{Q}$.

________ هـ. زمرة جالوا لامتداد منتهٍ لحقل منتهٍ قابلة للحل.

________ و. لا معادلة من الدرجة الخامسة قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على أيّ حقل.

________ ز. كل كثيرة حدود من الدرجة 4 على حقل مميزه 0 ، قابلة للحلّ باستخلاص الجذور.

________ ح. أصفار كثيرة حدود تكعيبية على حقل F مميزه 0 ، يمكن دائمًا الوصول إليها بسلسلة منتهية من عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وأخذ الجذور التربيعية بدءًا من عناصر في F.

________ ط. لا يمكن أبدًا الوصول إلى أصفار كثيرة حدود تكعيبية على حقل F مميزه 0، بسلسلة منتهية من عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وأخذ الجذور التربيعية بدءًا من عناصر في F.

________ ي. أدت مبرهنة سلاسل الزمر تحت الناظمية دورًا مهمًّا في تطبيقات مبرهنة جالوا.

براهين

.4 ليكن F حقلاً، ولتكن $f(x)=ax^2+bx+c$ في $F[x]$ ، حيث $a \neq 0$. أثبت أنه إذا كان مميز F لا يساوي 2، فإنّ حقل انشطار $f(x)$ على F هو $F(\sqrt{b^2-4ac})$.

[مساعدة: أكمل المربع، تمامًا كما في عمل المدرسة العليا، لاستنتاج «القانون العام لحلّ المعادلة التربيعية»].

.5 أثبت أنه إذا كان F حقلاً مميزه لا يساوي 2 و $f(x)=ax^4+bx^2+c,$
حيث $a \neq 0$، فإنّ $f(x)$ قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على F.

.6 أثبت أنه لزمرة منتهية، كل تصفية لسلسلة تحت ناظمية مع خوارج إبدالية، لها كذلك خوارج إبدالية، وهكذا يكتمل إثبات التمهيدية 3.56. [مساعدة: استخدم المبرهنة 7.34].

.7 أثبت أنه لزمرة منتهية، يمكن تصفية سلسلة تحت ناظمية مع زمر خارجة قابلة للحلّ إلى سلسلة تركيب مع خوارج إبدالية، وهكذا يكتمل إثبات المبرهنة 4.56.

[مساعدة: استخدم المبرهنة 7.34].

8. يقدم هذا التمرين كثيرة حدود من الدرجة 5 في $\mathbb{Q}[x]$ غير قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$.

أ. أثبت أنه إذا كانت H زمرة جزئية من S_5، وتحوي حلقة طولها 5 وحلقة طولها 2، فإنّ $H=S_5$. [مساعدة: أثبت أنّ H تحوي الحلقات الثنائية جميعها في S_5، وطبق النتيجة 12.9. انظر التمرين 39، في الفصل 9].

ب. أثبت أنه إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ من الدرجة 5، ولها بالضبط صفران مركبان وثلاثة أصفار حقيقية في $\mathbb{C}$، فإنّ زمرة $f(x)$ على $\mathbb{Q}$ تماثل S_5. [مساعدة: استخدم مبرهنة سيلو في إثبات أنّ الزمرة تحوي عنصرًا رتبته 5. استخدم حقيقة أنّ $f(x)$ له بالضبط صفران مركبان لإثبات أنّ الزمرة تحوي عنصرًا رتبته 2، ثم طبّق الفرع (أ)].

جـ. كثيرة الحدود $f(x)=2x^5-5x^4+5$ غير مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ – بحسب معيار أيزنستين، حيث $p=5$. استخدم تقنيات التفاضل والتكامل في إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية و"رسم دالة كثيرة الحدود f" ؛ لمشاهدة أنّ $f(x)$ يجب أن يكون لها بالضبط ثلاثة أصفار حقيقية في $\mathbb{C}$. استنتج من الفرع (ب) والمبرهنة 4.56، أنّ $f(x)$ غير قابلة للحلّ باستخلاص الجذور على $\mathbb{Q}$.

حلول التمارين ذات الأرقام الفردية

التي لا تسأل عن تعريفات أو براهين

الفصل 0

1. $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

3. $\{1,-1, 2,-2, 3,-3, 4,-4, 5,-5, 6,-6, 10,-10, 12,-12, 15,-15, 20,-20, 30,-30, 60,-60\}$

5. ليست مجموعة (ليست حسنة التعريف). حالة يمكن عملها أيضًا للمجموعة الخالية ϕ

7. المجموعة ϕ

9. المجموعة $\mathbb{Q}$

11. $(a, 1), (a, 2), (a, c), (b, 1), (b, 2), (b, c), (c, 1), (c, 2), (c, c)$

13. ارسم الخط المارّ خلال P و x، ولتكن y هي نقطة تقاطعه مع القطعة المستقيمة CD

17. مخمّنة: $2^s = n(\mathscr{P}(A))$ (البراهين عادة تحذف من الحلول)

21. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = 12^{\aleph_0} = 10^{\aleph_0}, 10^5, 10^2$. [(الأعداد x حيث $0 \le x \le 1$ يمكن كتابتها للأساس 12 وللأساس 2 وأيضًا للأساس 10)

23. 1 **25.** 5 **27.** 52

29. ليست علاقة تكافؤ.

31. علاقة تكافؤ، $\bar{0} = \{0\}$ ، $\bar{a} = \{a,-a\}$ لأيّ عنصر غير صفري $a \in \mathbb{R}$.

33. علاقة تكافؤ:

$$\bar{1} = \{1, 2, \ldots, 9\},$$

$$\overline{10} = \{10, 11, \ldots, 99\},$$

$$\overline{100} = \{100, 101, \ldots, 999\},$$ وبوجه عام

$$\overline{10^n} = \{10^n, 10^n + 1, \ldots, 10^{n+1} - 1\}$$

35. أ. $\{1, 3, 5, \ldots\}, \{2, 4, 6, \ldots\}$

ب. $\{1, 4, 7, \ldots\}, \{2, 5, 8, \ldots\}, \{3, 6, 9, \ldots\}$

جـ. $\{1, 6, 11, \ldots\}, \{2, 7, 12, \ldots\}, \{3, 8, 13, \ldots\}, \{4, 9, 14, \ldots\}, \{5, 10, 15, \ldots\}$

37. الاسم دالة اثنين إلى اثنين يقترح أنّ دالة f كهذه يجب أن تحمل كل زوج من النقاط المختلفة إلى نقطتين مخلفتين، دالة كهذه أحادية بالمعنى الاصطلاحي . (إذا كان في المجال عنصر واحد، فالدالة لا يمكن أن تفشل في أن تكون دالة اثنين إلى اثنين؛ لأن الطريقة الوحيدة التي يمكن أن تفشل فيها أن تكون دالة اثنين إلى اثنين هي أن تحمل نقطتين إلى نقطة واحدة، والمجموعة ليس فيها نقطتان)، في المقابل، كل دالة أحادية بالمعنى الاصطلاحي تحمل أيّ زوج من النقاط إلى نقطتين مختلفتين. وعليه، فمن الناحية الاصطلاحية، فإن الدوال التي تسمى أحادية هي بالضبط تلك التي تحمل أيّ نقطتين إلى نقطتين، وذلك باعتبار أن هذه الدوال وبصورة بدهية هي ذات طريق أحادي الاتجاه. أيضًا، الطريقة القياسية لإثبات أن الدالة أحادية، هي بالتحديد إثبات أنها لا تحمل نقطتين إلى نقطة واحدة فقط. وعليه، إثبات أنّ الدالة أحادية صار طبيعيًا من خلال اصطلاح اثنين إلى اثنين.

الفصل 1

1. $-i$ **3.** $-i$ **5.** $23+7i$

7. $17-15i$ **9.** $-4+4i$

11. $2\sqrt{13}$ **13.** $\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

15. $\sqrt{34}\left(\frac{-3}{\sqrt{34}}+\frac{5}{\sqrt{34}}i\right)$

17. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$ **19.** $\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i, 3i$

21. $\sqrt{3}\pm i\ ,\ \pm 2i\ ,\ -\sqrt{3}\pm i$ **23.** 4 **25.** $\frac{3}{8}$ **27.** $\sqrt{2}$

29. 11 **31.** 5 **33.** $7, 1$

35. $\zeta^0 \leftrightarrow 0,\ \zeta^3 \leftrightarrow 7\ ,\ \zeta^4 \leftrightarrow 4, \zeta^5 \leftrightarrow 1,\ \zeta^6 \leftrightarrow 6,\ \zeta^7 \leftrightarrow 3$

37. مع $4 \leftrightarrow \zeta$ يجب أن يكون لدينا $1 \leftrightarrow \zeta^2$، $0 \leftrightarrow \zeta^3$، وأيضًا $4 \leftrightarrow \zeta^4$، التي هي مستحيلة في التقابل الأحادي.

39. بالضرب، نحصل على:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)i\ ]$$

والنتيجة المطلوبة تنتج مباشرة من التمرين 38 ومن المعادلة $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

الفصل 2

1. e, b, a **3.** a ، c. * ليست تجميعية

5. الصف الأوّل: d الصف الثاني: a، الصف الرابع: c، b

7. ليست تبديلية، ليست تجميعية.

9. تبديلية، تجميعية.

11. ليست تبديلية، ليست تجميعية.

13. 8، 729، $n^{[n(n+1)/2]}$

17. لا، الشرط 2 يفشل **19.** نعم

21. لا، الشرط 1 يفشل

23. أ. نعم ب. نعم

25. لتكن $S = \{?,\Delta\}$. عرِّف * و *' على S بـ $a * b = ?$ و $a *' b = \Delta$ لكل $a, b \in S$ (هناك حلول أخرى ممكنة).

27. صح. **29.** صح

31. خطأ، افترض أنّ $f(x) = x^2$، $g(x) = x$، و $h(x) = 2x + 1$. عندئذٍ:

$$(f(x) - g(x)) - h(x) = x^2 - 3x - 1$$ لكن

$$f(x) - (g(x) - h(x)) = x^2 - (-x - 1) = x^2 + x + 1$$

33. صح **35.** خطأ، افترض أنّ * هي + ، وافترض أن *' على $\mathbb{Z}$

الفصل 3

1. أ. ϕ يجب أن يكون أحاديًّا ب. $\phi[S]$ يجب أن تكون جميع S'

جـ. $\phi(a * b) = \phi(a) *' \phi(b)$ لكل $a, b \in S$

3. لا؛ لأن ϕ لا ترسل $\mathbb{Z}$ بصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}'$. $\phi(n) \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

5. نعم **7.** نعم **9.** نعم

11. لا؛ لأنّ $\phi(x^2) = \phi(x^2 + 1)$

13. لا؛ لأنّ $\phi(f) = x + 1$ ليس لها حل $f \in F$

15. لا؛ لأنّ $\phi(f)=1$ ليس لها حل $f \in F$

17. أ. $m * n = mn - m - n + 2$؛ العنصر المحايد 2

ب. $m * n = mn + m + n$؛ العنصر المحايد 0

19. أ. $a * b = \frac{1}{3}(ab + a + b - 2)$؛ العنصر المحايد 2

ب. $a * b = 3ab - a - b + \frac{2}{3}$؛ العنصر المحايد $\frac{2}{3}$

25. لا، إذا كانت $\langle S, *\rangle$ لها عنصر محايد أيسر e_L وعنصر محايد أيمن e_R، فإن $e_L = e_R$. (من عادتنا حذف البراهين من الحلول).

الفصل 4

1. لا. $\mathscr{G}_3$ تفشل **3.** لا. $\mathscr{G}_1$ تفشل **5.** لا. $\mathscr{G}_1$ تفشل

7. الزمرة $\langle U_{1000}, .\rangle$ لحلول المعادلة $z^{1000} = 1$ في $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الضرب فيها 1000 عنصر.

9. المعادلة على الصورة: $x * x * x * x = e$ لها أربعة حلول في $\langle U, .\rangle$، حل واحد في $\langle \mathbb{R}, +\rangle$، وحلّان في $\langle \mathbb{R}^*, .\rangle$

11. نعم **13.** نعم

15. لا. المصفوفة التي جميع مدخلاتها 0 هي مثلثية علوية، لكن ليس لها معكوس.

17. نعم

19. (البرهان محذوف) جـ. $-\frac{1}{3}$

21. 2، 3. (تصبح الإجابة صعبة في حالة أربعة عناصر، حيث إنّ الجواب ليس 4).

25. أ. خطأ جـ. صح هـ. خطأ ز. صح ط. خطأ

الفصل 5

1. نعم **3.** نعم **5.** نعم 7. $\mathbb{Q}^+$ و $\{\pi^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ **9.** نعم

11. لا، ليست مغلقة بالنسبة إلى الضرب.

13. نعم

15. أ. نعم ب. لا، إنها ليست حتى مجموعة جزئية من $\tilde{F}$

17. أ. لا، ليست مغلقة بالنسبة إلى الجمع ب. نعم

19. أ. نعم ب. لا، الدالة الثابتة الصفرية ليست في $\tilde{F}$

21. أ. $-50, -25, 0, 25, 50$ ب. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$ جـ. $1, \pi, \pi^2, 1/\pi, 1/\pi^2$

23. جميع المصفوفات $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ لـ $n \in \mathbb{Z}$

25. المصفوفات جميعها على الصورة: $\begin{bmatrix}4^n & 0\\ 0 & 4^n\end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix}0 & -2^{2n+1}\\ -2^{2n+1} & 0\end{bmatrix}$ لـ $n \in \mathbb{Z}$

27. 4 **29.** 3 **31.** 4 **33.** 2 **35.** 3

39. أ. صح ج. صح هـ. خطأ ز. خطأ ط. صح

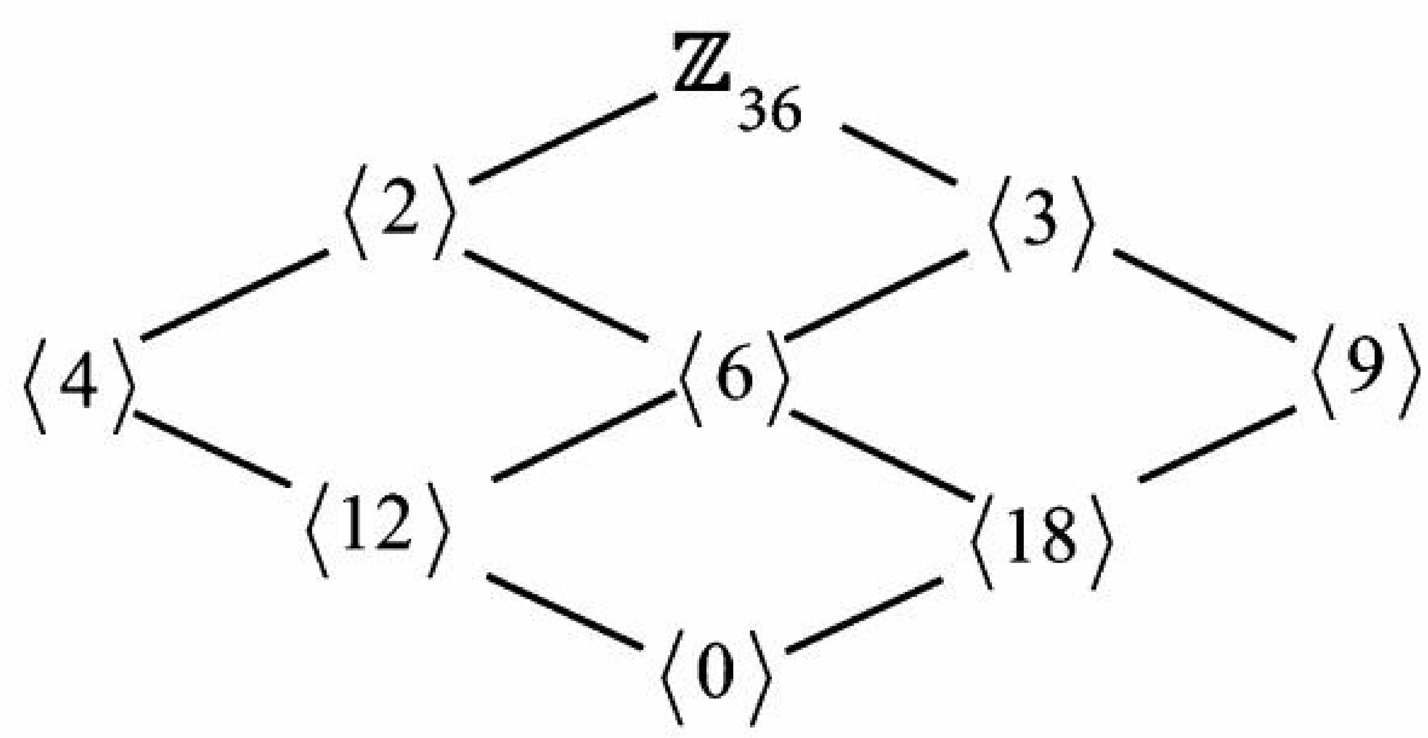
الفصل 6

1. $q = 4, r = 6$ **3.** $q = -7, r = 6$ **5.** 8 **7.** 60

9. 4 **11.** 16 **13.** 2 **15.** 2 **17.** 6 **19.** 4

19. زمرة دورية لا نهائية

23.



25. 1، 2، 3، 6 **27.** 1، 2، 3، 4، 6، 12 **29.** 1، 17

33. زمرة كلاين الرباعية **35.** $\mathbb{Z}_2$ **37.** $\mathbb{Z}_8$

39. $\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و $\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$

41. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ ، $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$ ، $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$ ، $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i)$

51. $(p-1)(q-1)$

الفصل 7

1. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

3. $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$

5. $\ldots, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, \ldots$

7. أ. a^3b ب. a^2 ج. a^2

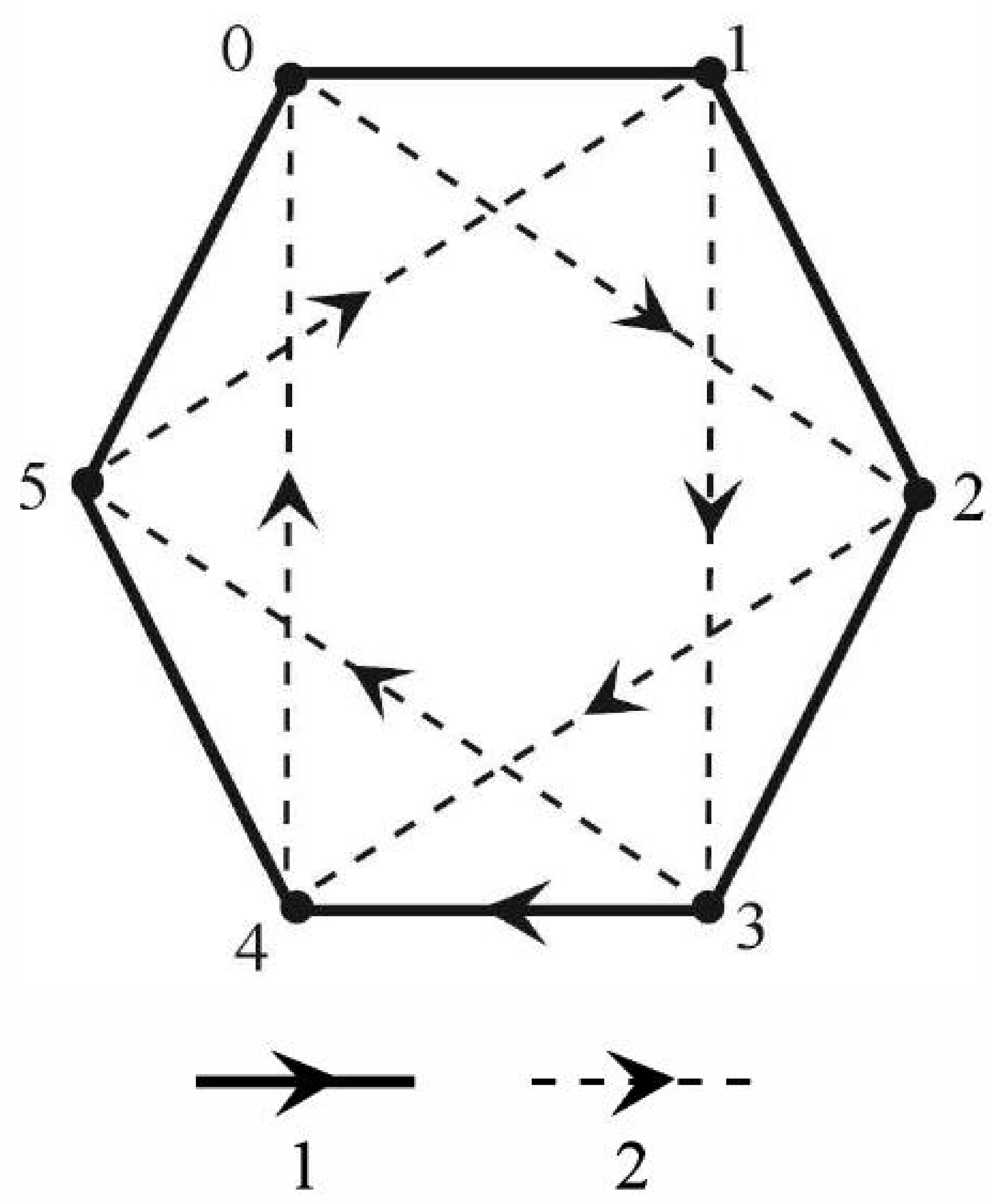
.9

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	c	b	f	d
b	b	d	e	f	a	c
c	e	f	a	d	e	b
d	d	b	f	e	c	a
f	f	c	d	a	b	e

11. اختر زوجًا من الحوافّ الموجّهة المولّدة، أطلق عليهما الاسمين $arc1$ و$arc2$، ابدأ من أيّ رأس لرسم موجه، وانظر فيما إذا كانت المتتالية $arc1$، $arc2$ و$arc2$، $arc1$ تؤدي إلى الرأس نفسه. (هذه تقابل السؤال فيما إذا كان المولدان المقابلان للزمرتين تبديليين). الزمرة تبديلية إذا وفقط إذا كانت هاتان المتسلسلتان تؤديان إلى الرأس نفسه لأيّ زوج من الحوافّ الموجّهة المولّدة.

13. إنها ليست واضحة؛ لأن رسم موجه لزمرة دورية يمكن أن يشكل باستخدام مجموعة مولدة من عنصرين أو أكثر، ليس أيّ منهما يولد الزمرة.

15.



17. أ. البدء من أيّ رأس a، أيّ مسار خلال البيان ينتهي عند الرأس a نفسه، يمثل ضربًا لمولدات أو لمعكوساتها، التي تساوي المحايد، وعليه، تعطي علاقة.

ب. $a^4 = e \;, b^2 = e, (ab)^2 = e$

الفصل 8

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. 2

9. ι

11. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

13. $\{1, 5\}$

15. $\in, \rho, \rho^2, \rho^3, \phi, \rho\phi, \rho^2\phi, \rho^3\phi$، حيث ϕ هنا هي μ_1 خاصتنا. هذه تعطي عناصرنا على الترتيب: $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \delta_1, \mu_2, \delta_2$

17. 24

19. بالرجوع إلى الجدول 12.8، نجد أنّ: $\langle \rho_0 \rangle = \{\rho_0\}$ ، $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_3 \rangle = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$

$\langle \rho_2 \rangle = \{\rho_0, \rho_2\}$ ، $\mu_1 = \{\rho_0, \mu_1\}$ ، $\mu_2 = \{\rho_0, \mu_2\}$ ، $\langle \delta_1 \rangle = \{\rho_0, \delta_1\}$ ، و $\langle \delta_2 \rangle = \{\rho_0, \delta_2\}$ ، تلك هي جميع الزمر الجزئية الدورية. الزمرة الجزئية التي تحوي واحدة من التباديل μ_1, μ_2, δ_1 ، أو δ_2 اللواتي "تعيد المربع" وتحوي أيضًا ρ_1 أو ρ_3 سوف تصف أوضاع المربع جميعها، وهكذا يجب أن تكون الزمرة D_4 جميعها. بفحص الصف في الجدول المقابل لـ μ_1 ، نرى أن العناصر الأخرى الوحيدة التي يمكن أن تكون في زمرة جزئية فعلية مع μ_1 هي ρ_0 ، ρ_2 ، μ_2 . نفحص أن $\{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\}$ مغلقة بالنسبة إلى الضرب، وفيما إذا كانت زمرة جزئية. بفحص الصف في الجدول المقابل لـ μ_2 يعطي الزمرة الجزئية نفسها، وبفحص الصفين في الجدول والمقابلين لـ δ_1 و δ_2 يعطي – باستخدام التفسير نفسه – الزمرة الجزئية $\{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}$ كالاحتمال الوحيد المتبقي.

21. أ. هذه هي "مصفوفات التباديل البسيطة" التي تنتج عن تبديل صفوف مصفوفة الوحدة. عند ضرب مصفوفة أخرى A من اليسار بواحدة من هذه المصفوفات P، فإن صفوف المصفوفة A تتبدل بالطريقة نفسها التي تبدلت فيها صفوف مصفوفة الوحدة من الدرجة 3×3 لتنتج P؛ ولأن احتمالات التباديل ألـ 6 جميعها للصفوف الثلاثة مُثِّلَت، نرى أنها تؤثر كتأثير عناصر S_3 في تبديل المدخلات 1 ,2 ,3 لمتجه العمود المعطى. وعليه، فإنها تشكل زمرة، وذلك؛ لأن S_3 زمرة.

ب. زمرة التناظر S_3 على ثلاثة أحرف.

23. $\mathbb{Z}_2$ **25**. D_4

27. لـ $\mathbb{Z}_4$، $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

الجدول للتمثيل المنتظم الأيسر هو نفسه الجدول لـ $\mathbb{Z}_4$ مع تبديل n بـ λ_n . لـ S_3،

$\rho_0 = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & m_1 & m_2 & m_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ ، $\rho_1 = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & m_1 & m_2 & m_3 \\ r_1 & r_2 & r_0 & m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix}$ ، ...إلخ، حيث الصف في الأسفل في التبديل ρ_σ يتكوّن من عناصر S_3 بالترتيب الذي تظهر فيه من الأعلى إلى الأسفل في العمود تحت تأثير σ في الجدول 8.8. الجدول للتمثيل المنتظم الأيمن هو نفسه الجدول لـ S_3 باستبدال σ بـ ρ_σ .

31. ليس تبديلًا **33**. ليس تبديلا

35. أ. صح ب. صح جـ– خطأ د– خطأ

37. مونويد **41**. لا **43**. نعم

الفصل 9

1. $\{1, 2, 5\}, \{3\}, \{4, 6\}$

3. $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}, \{7, 8\}$

5. $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 8 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

11. $(1, 3, 4)(2, 6)(5, 8, 7) = (1, 4)(1, 3)(2, 6)(5, 7)(5, 8)$

13. أ. 4

ب. الدورة التي طولها n رتبتها n

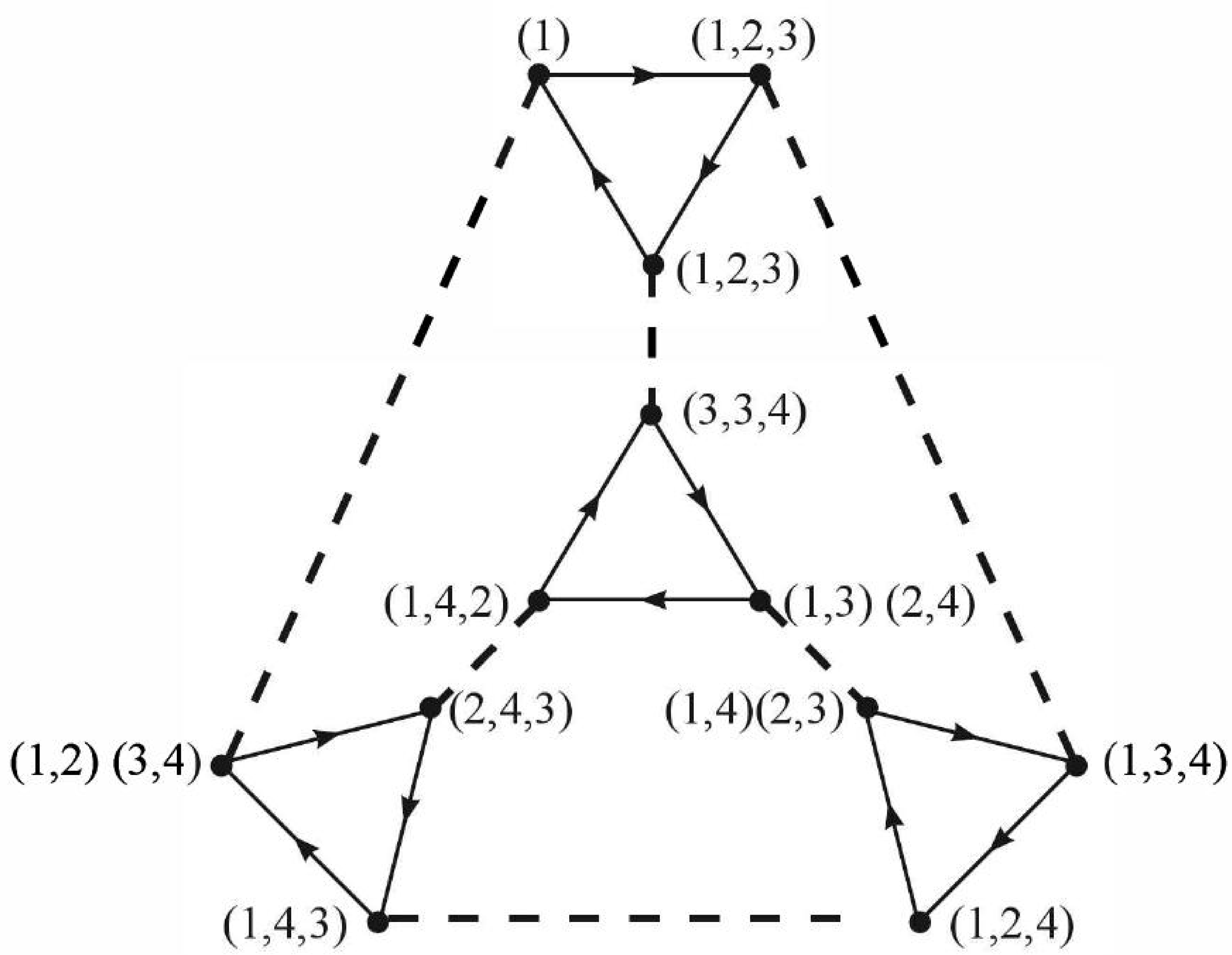
جـ. σ رتبتها 6؛ τ رتبتها 4

د. 6 في التمارين 10 و11، 8 في التمرين 12

هـ. رتبة التبديل المعبر عنه كضرب دورات منفصلة هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال تلك الدورات.

15. 6 **17.** 30

19.



23. أ. خطأ   جـ. خطأ   هـ. خطأ   ز. صح   ط. صح

الفصل 10

1. $4\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$1 + 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$

$2 + 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$

$3 + 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$

3. $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \ 1 + \langle 2 \rangle = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

5. $\langle 18 \rangle = \{0, 18\} \ , \ 1 + \langle 18 \rangle = \{1, 19\} \ , \ 2 + \langle 18 \rangle = \{2, 20\} \ , \ \ldots, \ 17 + \langle 18 \rangle = \{17, 35\}$

7. $\{\rho_3, m_2\}, \{\rho_2, \mu_1\}, \{\rho_1, \delta_1\}, \{\rho_0, \mu_2\}$. ليست نفسها

9. $\{\delta_1, \delta_2\}, \{\mu_1, \mu_2\}, \{\rho_1, \rho_3\}, \{\rho_0, \rho_2\}$

11. نعم، نحصل على زمرة مجموعات مشاركة تماثل زمرة كلاين الرباعية V

	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_1	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_2	δ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	δ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	δ_2	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	δ_1	μ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

13. 3   **15.** 24

19. أ. صح   ج. صح   هـ. صح   ز. صح   ط. خطأ

21. $G = \mathbb{Z}_2$، الزمرة الجزئية $H = \mathbb{Z}_2$

23. مستحيل، عدد الخلايا يجب أن يقسم رتبة الزمرة و12 لا يقسم 6

الفصل 11

1.

العنصر	الرتبة	العنصر	الرتبة
(0, 0)	1	(0, 2)	2
(1, 0)	2	(1, 2)	2
(0, 1)	4	(0, 3)	4
(1, 1)	4	(1, 3)	4

الزمرة ليست دورية

3. 2   **5.** 9   **7.** 60

9. $\{(0,0), (1,1)\}$, $\{(0,0), (1,0)\}$, $\{(0,0), (0,1)\}$

11. $\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3)\}$

$\{(0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\}$

$\{(0,0), (1,1), (0,2), (1,3)\}$

13. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5$ ، $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_3$

15. 12

17. 120

19. 180

21. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_8$

23. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ ، $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$ ، $\mathbb{Z}_{32}$

25. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ ، $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ ، $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{121}$ ، $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{121}$

29. أ.

n	2	3	4	5	6	7	8
عدد الزمر	2	3	5	7	11	15	22

ب. i) 225 ii) 225 iii) 110

31. أ. إنها إبدالية، عندما تكون الأسهم على كلا المضلعين ذوي ألـ n ضلعاً لها الاتجاه نفسه (مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة).

ب. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$

جـ. عندما يكون n فرديًا

د. الزمرة الزوجية D_n

33. $\mathbb{Z}_2$ مثال على ذلك.

35. S_3 مثال على ذلك.

37. الأعداد هي نفسها

41. $\{-1, 1\}$

الفصل 12

1. أ. التقايسات الوحيدة من $\mathbb{R}$ التي تترك العدد c مثبتًا، هي الانعكاس خلال c، الذي يحمل $c + x$ إلى $c - x$ لكل $x \in \mathbb{R}$، إضافة إلى الدالة المحايدة.

ب. التقايسات من $\mathbb{R}^2$ التي تترك نقطة P مثبتة، هي الدورانات حول P خلال أيّ زاوية θ، حيث $0 \leq \theta < 360°$ بالإضافة إلى الانعكاسات عبر أيّ محور يمر خلال P.

ج. التقايسات الوحيدة من $\mathbb{R}$ التي تحمل القطعة المستقيمة إلى نفسها هي الانعكاس خلال نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة (انظر إجابة الفرع (أ)) إضافة إلى الدالة المحايدة.

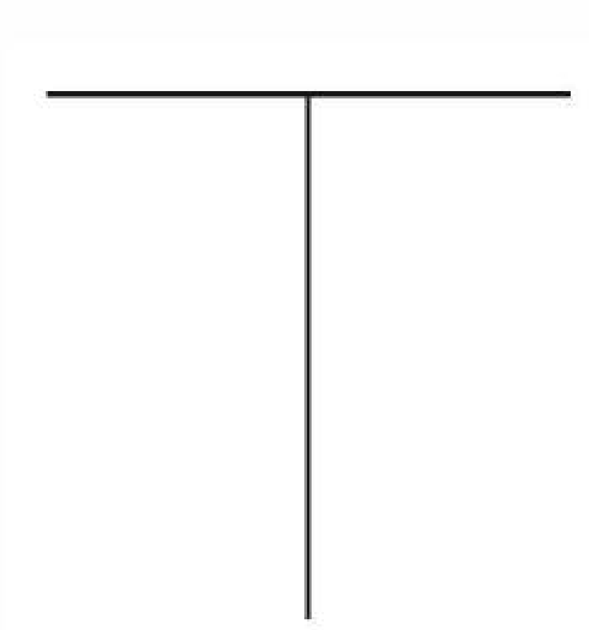
د. التقايسات لـ $\mathbb{R}^2$ التي تحمل القطعة المستقيمة إلى نفسها، هي تدوير بـ $180°$ حول نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة، وانعكاس في المحور الذي يحوي القطعة المستقيمة، وانعكاس في المحور الذي يعامد القطعة المستقيمة في نقطة منتصفها، إضافة إلى الدالة المحايدة.

هـ. التقايسات لـ $\mathbb{R}^3$ التي تحمل القطعة المستقيمة إلى نفسها تتضمن التدويرات خلال أيّ زاوية حول محور يحوي القطعة المستقيمة، والانعكاسات عبر أيّ مستوًى يحوي القطعة المستقيمة، والانعكاس عبر المستوى العمودي على القطعة المستقيمة في نقطة منتصفها.

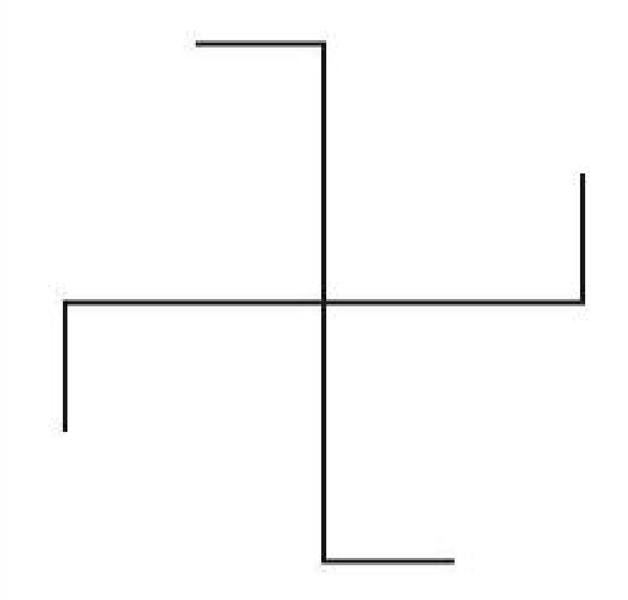
.3

	τ	ρ	μ	γ
τ	τ	ρ	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$
ρ	ρ	$\rho\tau$	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$
μ	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$	$\tau\rho$	$\tau\rho$
γ	$\mu\gamma$	$\mu\gamma$	$\tau\rho$	$\tau\rho$

.5



.7



9. انسحاب: الرتبة ∞

دوران: الرتبة أي $n \geq 2$ أو ∞

انعكاس: الرتبة 2

انعكاس انحداري: الرتبة ∞

11. دورانات **13.** فقط المحايد والانعكاسات

17. نعم، الضرب لانسحابين هو انسحاب، ومعكوس الانسحاب هو انسحاب.

19. نعم، يوجد انعكاس واحد فقط μ عبر خط معين L، و μ^2 هو المحايد، وهكذا لدينا زمرة تماثل $\mathbb{Z}_2$

21. فقط الانعكاسات والدورانات (والمحايد)؛ لأن الانسحابات والانعكاسات الانحدارية رتبها ليست منتهية في زمرة تقايسات المستوى جميعها.

25. أ. لا ب. لا جـ. نعم د. لا هـ. D_∞

27. أ. نعم ب. لا جـ. لا د. لا هـ. D_∞

29. أ. لا ب. لا جـ. لا د. نعم هـ. $\mathbb{Z}$

31. أ. نعم. $90°$، $180°$ ب. نعم جـ. لا

33. أ. لا ب. لا جـ. لا

35. أ. نعم. $180°$ ب. نعم جـ. لا

37. أ. نعم. $120°$ ب. نعم جـ. لا

39. أ. نعم. $90°$، $180°$ ب. نعم جـ. لا د. $(-1, 1)$ و $(1, 1)$

41. أ. نعم. $120°$ ب. نعم جـ. لا د. $(0, 1)$ و $(1, \sqrt{3})$

الفصل 13

1. نعم **3.** نعم **5.** لا

7. نعم **9.** نعم

11. نعم **13.** نعم **15.** لا

17. $\mathrm{Ker}(\phi) = 7\mathbb{Z}$ ؛ $\phi(25) = 2$

19. $\mathrm{Ker}(\phi) = 6\mathbb{Z}$ ؛ $\phi(20) = (1,\ 2,\ 7)(4,\ 5,\ 6)$

21. $\text{Ker}(\phi)=\{0,4,8,12,16,20\}$ ؛ $\phi(14)=(1,6)(4,7)$

23. $\text{Ker}(\phi)=\{(0,0)\}$ ؛ $\phi(4,6)=(2,18)$

25. 2 **27.** 2 **29.** لكل $g \in G$

33. لا يوجد تشـاكل غير تـافه. المبرهنة 12.13 تبين أن الصـورة لـ ϕ يجب أن تكون زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_5$، وعليه، لتشـاكل غير تـافه ϕ، سـتكون الصـورة لـ ϕ هي $\mathbb{Z}_5$ جميعها. لكن عدد مجموعات المشاركة لزمرة جزئية من زمرة منتهية هو قاسم لرتبة الزمرة، و 5 لا تقسم 12.

35. ليكن $\phi(m,n)=(m,0)$ لـ $(m,n)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$

37. ليكن $\phi(n)=\rho_n$ لـ $n\in\mathbb{Z}_3$، مستخدمًا رموزنا في الكتاب لعناصر S_3

39. ليكن $\phi(m,n)=2m$

41. بالنظر إلى D_4 بوصفها زمرة تباديل، ليكن $\phi(\sigma)=(1,2)$ لكل $\sigma\in D_4$ فردية و $\phi(\sigma)$ هو المحايد لكل $\sigma\in D_4$ زوجية.

43. ليكن $\phi(\sigma)=(1,2)$ لكل $\sigma\in S_4$ فردية و$\phi(\sigma)$ هو المحايد لكل $\sigma\in S_4$ زوجية.

51. الصورة لـ ϕ هي $\langle a\rangle$ و $\text{Ker}(\phi)$ يجب ان تكون زمرة جزئية ما $n\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$.

53. $hk=kh$ **55.** h^n يجب أن يكون المحايد e في G.

الفصل 14

1. 3 **3.** 4 **5.** 2 **7.** 2

9. 4 **11.** 3 **13.** 4 **15.** 1

21. أ. عند العمل مع زمرة العامل G/H، يمكنك جعل a و b عنصرين في G، ليسا في G/H. من المحتمل أن الطالب لا يدرك صورة العناصر في G/H، ولا يستطيع كتابة شيء منطقي متعلق بهم.

ب. يجب أن نثبت أن G/H إبدالية. ليكن aH و bH عنصرين في G/H

23. أ. صح ج. صح هـ. صح ز. صح ط. صح

29. $\{\rho_0,\mu_1\}$، $\{\rho_0,\mu_2\}$، و $\{\rho_0,\mu_3\}$

35. مثال: لتكن $G=N=S_3$، ولتكن $H=\{\rho_0,\mu_1\}$. عندئذٍ N ناظمية في G، لكن $H\cap N=H$ ليست ناظمية في G.

الفصل 15

.1 $\mathbb{Z}_2$ **.3** $\mathbb{Z}_4$ **.5** $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$ **.7** $\mathbb{Z}$ **.9** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$

.11 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ **.13** $\mathbb{Z}(D_4) = C = \{\rho_0, \rho_2\}$

.15 $Z(S_3 \times D_4) = \{(\rho_0, \rho_0), (\rho_0, \rho_2)\}$ مستخدمًا الرموز الواردة في الفصل 8 لهذه الزمر–
$C = A_3 \times \{\rho_0, \rho_2\}$

.19 أ. صح ج. خطأ هـ. خطأ ز. خطأ ط. صح

.21 $\{f \in F^* \mid f(0) = 1\}$

.23 نعم. ليكن $f(x) = 1$ لـ $x \leq 0$ و $f(x) = -1$ لـ $x > 0$. عندئذٍ، $f(x).f(x) = 1$ لكل x، وهكذا $f^2 \in K^*$ لكن f ليس في K^*. وعليه، fK^* رتبتها 2 في F^*/K^*

.25 U

.27 زمرة الضرب U للأعداد المركبة ذات القيمة المطلقة 1

.29 لتكن $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. عندئذٍ $H = \langle(1,0)\rangle$ تماثل $K = \langle(0,2)\rangle$، لكن G/H تماثل $\mathbb{Z}_4$، بينما G/K تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

.31 أ. $\{e\}$ ب. الزمرة جميعها

الفصل 16

.1 $X_{\rho_0} = X$, $X_{\rho_1} = \{C\}$, $X_{\rho_2} = \{m_1, m_2, d_1, d_2, C\}$, $X_{\rho_3} = \{C\}$,

$X_{\mu_1} = \{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\}$, $X_{\mu_2} = \{s_2, s_4, m_1, m_2, C, P_2, P_4\}$,

$X_{\delta_1} = \{2, 4, d_1, d_2, C\}$, $X_{\delta_2} = \{1, 3, d_1, d_2, C\}$

.3 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $\{m_1, m_2\}$, $\{d_1, d_2\}$, $\{C\}$, $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

.7 مجموعة–G المتعدية لها مدار واحد فقط.

.9 أ. $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ و $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

.13 ب. مجموعة النقاط على الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وتمر في النقطة P

ج. الزمرة الجزئية الدورية $\langle 2\pi \rangle$ من $G = \mathbb{R}$

.17 أ. $K = g_0 H g_0^{-1}$

ب. مخمّنة: H وK يجب أن تكونا زمرتين جزئيتين مترافقتين من G

19. يوجد أربعة منها: X، Y، Z و $\mathbb{Z}_6$

	X	Y		Z		
	a	a	b	a	b	c
0	a	a	b	a	b	c
1	a	b	a	b	c	a
2	a	a	b	c	a	b
3	a	b	a	a	b	c
4	a	a	b	b	c	a
5	a	b	a	c	a	b

الفصل 17

1. 5 **3.** 2 **5.** 11, 712

7. أ. 45 ب. 231

9. أ. 90 ب. 6, 246

الفصل 18

1. 0 **3.** 1 **5.** (1, 6)

7. حلقة إبدالية، لا يوجد محايد، ليست حقلًا.

9. حلقة إبدالية مع عنصر محايد، ليست حقلًا.

11. حلقة إبدالية مع عنصر محايد، ليست حقلًا.

13. لا. $\{ri \mid r \in \mathbb{R}\}$ ليست مغلقة بالنسبة إلى الضرب.

15. $(1, 1)$ ، $(1,-1)$، $(-1, 1)$، $(-1,-1)$

17. جميع الأعداد غير الصفرية $q \in \mathbb{Q}$ **19.** 1، 3

21. لتكن $\mathbb{R}=\mathbb{Z}$ مع عنصر محايد 1 و $R'=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ مع العنصر المحايد $1'=(1,1)$. ليكن $\phi:R\to R'$ معرّف بـ $\phi(n)=(n,\ 0)$. عندئذٍ: $\phi(1)=(1,0)\neq 1'$

23. $\phi_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_1(n)=0$ ، $\phi_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_2(n)=n$

25. $\phi_1:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_1(n,m)=0$ ، $\phi_2:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_2(n,m)=n$

$\phi_3:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi_3(n,m)=m$.

27. التفسير غير صحيح؛ لأن الضرب $(X-I_3)(X+I_3)$ لمصفوفتين يمكن أن يكون المصفوفة الصفرية 0 دون أن يكون أيّ من المصفوفتين مصفوفة صفرية. مثال مناقض:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^2=I_3$$

31. $a=2$ ، $b=3$ في $\mathbb{Z}_6$

33. أ. صح ج. خطأ هـ. صح ز. صح ط. صح

الفصل 19

1. 0، 3، 5، 8، 9، 11 **3.** لا توجد حلول **5.** 0 **7.** 0 **9.** 12

11. $a^4+2a^2b^2+b^4$ **13.** $a^6+2a^3b^3+b^6$

17. أ. خطأ ج. خطأ هـ. صح ز. خطأ ط. خطأ

19. 1. $\mathrm{Det}(A)=0$ 2. متّجهات الأعمدة لـ A غير مستقلة (تابعة).

3. متّجهات الصفوف لـ A غير مستقلة (تابعة). 4. الصفر هو قيمة ذاتية لـ A

5. A ليس لها معكوس.

الفصل 20

1. 3 أو 5 **3.** أي من 3، 5، 6، 7، 10، 11، 12 أو 14 **5.** 2

7. $\varphi(1)=1$ $\varphi(7)=6$ $\varphi(13)=12$ $\varphi(19)=18$ $\varphi(25)=20$

$\varphi(2)=1$ $\varphi(8)=4$ $\varphi(14)=6$ $\varphi(20)=8$ $\varphi(26)=12$

$\varphi(3)=2$ $\varphi(9)=6$ $\varphi(15)=8$ $\varphi(21)=12$ $\varphi(27)=18$

$\varphi(28)=12$ $\varphi(22)=10$ $\varphi(16)=8$ $\varphi(10)=4$ $\varphi(4)=2$

$\varphi(29)=28$ $\varphi(23)=22$ $\varphi(17)=16$ $\varphi(11)=10$ $\varphi(5)=4$

$\varphi(30)=8$ $\varphi(24)=8$ $\varphi(18)=6$ $\varphi(12)=4$ $\varphi(6)=2$

9. $(p-1)(q-1)$ **11.** $1+4\mathbb{Z}$, $3+4\mathbb{Z}$ **13.** لا توجد حلول

15. لا توجد حلول.

17. $55+65\mathbb{Z}$ ، $42+65\mathbb{Z}$ ، $29+65\mathbb{Z}$ ، $16+65\mathbb{Z}$ ، $3+65\mathbb{Z}$

19. 1 **21.** 9

23. أ. خطأ ج. صح هـ. صح ز. خطأ ط. خطأ

الفصل 21

1. $\{q_1+q_2 i \mid q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$

15. إنها تماثل حلقة جميع الأعداد النسبية D، التي يمكن أن يعبر عنها بوصفها خارج قسمة أعداد صحيحة مقامها قوة ما لـ 2

17. سنقع في مشكلة عند محاولتنا إثبات خاصية التعدي في التمهيدية 2.21؛ لأن الحذف في الضرب من الممكن ألا يتحقق. لـ $R=\mathbb{Z}_6$ و $T=\{1,2,4\}$ لدينا $(2,4)\sim(1,2)$ ؛ لأن $4=(2)(2)=(4)(1)$ و $(2,1)\sim(2,4)$ ؛ لأن $(2)(4)=(1)(2)$ في $\mathbb{Z}_6$. وفي الأحوال كلها، $(2,1)$ لا تكافئ $(1,2)$؛ لأن $(2)(2)\neq(1)(1)$ في $\mathbb{Z}_6$

الفصل 22

1. $f(x)+g(x)=2x^2+5$ ، $f(x)g(x)=6x^2+4x+6$

3. $f(x)+g(x)=5x^2+5x+1$ ، $f(x)g(x)=x^3+5x$

5. 16 **7.** 7 **9.** 2 **11.** 0 **13.** 2، 3 **15.** 0، 2، 4

17. 0، 1، 2، 3

21. x^4-5x^3 , x^2-5x , x^2-25 , $2x-10$, $x-5$, 0. (هناك حلول أخرى ممكنة).

23. أ. صح ج. صح هـ. خطأ ز. صح ط. صح

25. أ. إنها عناصر الوحدة في D ب. 1، -1 ج. 1، 2، 3، 4، 5، 6

27. ب. F جـ. $F[x]$ **31**. أ. 4، 27 ب. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

الفصل 23

1. $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 2,\ r(x) = 4x + 3$

3. $q(x) = 6x^4 + 7x^3 + 2x^2 - x + 2,\ r(x) = 4$

5. 2، 3 **7**. 3، 10، 5، 11، 14، 7، 12، 6

9. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

11. $(x-3)(x+3)(2x+3)$

13. نعم. إنها من الدرجة 3، وليس لها أصفار في $\mathbb{Z}_5$

$2x^3 + x^2 + 2x + 2$

15. إجابة مختصرة: $g(x)$ غير مختزلة على $\mathbb{R}$، لكنها مختزلة على $\mathbb{C}$

19. نعم. $p = 3$ **21**. نعم. $p = 5$

25. أ. صح جـ. صح هـ. صح ز. صح ط. صح

27. $x^2 + x + 1$

29. $x^2 + 1,\ x^2 + x + 2,\ x^2 + 2x + 2,\ 2x^2 + 2,\ 2x^2 + x + 1,\ 2x^2 + 2x + 1$

31. $p(p-1)^2/2$

الفصل 24

1. $1e + 0a + 3b$ **3**. $2e + 2a + 2b$ **5**. j **7**. $(1/50)j - (3/50)k$

9. $\mathbb{R}^*$، أي إن، $\{a_1 + 0i + 0j + 0k \mid a_1 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0\}$

11. أ. خطأ جـ. خطأ هـ. خطأ ز. صح ط. صح

جـ. إذا كان $|A| = 1$، فإن $\text{End}(A) = \{0\}$ هـ. $0 \in \text{End}(A)$ ليس في $\text{Iso}(A)$

19. أ. $K=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

ب. نرمز بالرمز B للمصفوفة ذات المعامل b، ونرمز بالرمز C للمصفوفة ذات المعامل c، ونرمز لمصفوفة الوحدة من الدرجة 2×2 بالرمز I، يجب علينا فحص أنّ:

$$B^2=-I \; , \; C^2=-I \; , \; K^2=-I$$

$$CK=B \; , \; KB=C \; , \; CB=-K \; , \; KC=-B \; , \; BK=-C$$

ج. يجب علينا فحص أنّ ϕ أحادي

الفصل 25

1. $a<x<x^2<x^3<\ldots<x^n\ldots$ لأيّ $a\in R$

3. $m+n\sqrt{2}$ موجب إذا كان $m>0$ و $n>0$، أو إذا كان $m>0$ و $m^2>2n^2$، أو إذا كان $n>0$ و $2n^2>m^2$

5. i. أ جـ هـ د ب ii. هـ جـ ب أ د

7. i. د أ ب جـ هـ ii. د جـ هـ أ ب

9. i. جـ أ هـ د ب ii. هـ جـ ب أ د

11. د ب أ هـ جـ 13. د هـ ب أ جـ

15. أ. صح ج. خطأ هـ. صح ز. صح ط. خطأ

الفصل 26

1. هناك تسعة احتمالات فقط:

$\phi(1, 0) = (1, 0)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (0, 1)$

$\phi(1, 0) = (0, 1)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (1, 0)$

$\phi(1, 0) = (1, 1)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 0)$،

و $\phi(1, 0) = (0, 0)$، بينما $\phi(0, 1) = (0, 1)$ أو $\phi(0, 1) = (1, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (0, 0)$ أو $\phi(0, 1) = (1, 1)$

3. $\langle 0 \rangle = \{0\},\ \mathbb{Z}_{12} / \{0\} \simeq \mathbb{Z}_{12}$

$\langle 1 \rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},\ \mathbb{Z}_{12} / \langle 1 \rangle \simeq \{0\}$

$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \mathbb{Z}_{12} / \langle 2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$

$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}, \mathbb{Z}_{12} / \langle 3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$

$\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\},\ \mathbb{Z}_{12} / \langle 4 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$

$\langle 6 \rangle = \{0, 6\},\ \mathbb{Z}_{12} / \langle 6 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$

9. لتكن $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ معطاة بـ $\phi(n) = (n, 0)$ لـ $n \in \mathbb{Z}$.

11. R/R و $R/\{0\}$ ليست ذات أهمية فعلية؛ لأن R/R هي الحلقة التي تحوي العنصر صفر فقط، و $R/\{0\}$ تماثل R.

13. $\mathbb{Z}$ حلقة تامة. $\mathbb{Z} / 4\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_4$، التي لها قاسم 2 لـ 0.

15. $\{(n, n \mid n \in \mathbb{Z})\}$ (هناك إجابات أخرى محتملة).

31. متلاشي الجذر لـ $\mathbb{Z}_{12}$ هو $\{0, 6\}$. متلاشي الجذر لـ $\mathbb{Z}$ هو $\{0\}$ ، ومتلاشي الجذر لـ $\mathbb{Z}_{32}$ هو $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots, 30\}$.

35. أ. لتكن $R = \mathbb{Z}$، ولتكن $N = 4\mathbb{Z}$، عندئذٍ يكون $\sqrt{N} = 2\mathbb{Z} \neq 4\mathbb{Z}$.

ب. لتكن $R = \mathbb{Z}$، ولتكن $N = 2\mathbb{Z}$، عندئذٍ يكون $\sqrt{N} = N$.

الفصل 27

1. $\{0, 2, 4\}$ و $\{0, 3\}$ كلاهما أوليّ وأعظميّ.

3. $\{(0, 0), (1, 0)\}$ و $\{(0, 0), (0, 1)\}$ كلاهما أوليّ وأعظميّ.

5. 1 **7.** 2 **9.** 1، 4 **15.** $2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **17.** $4\mathbb{Z}\times\{0\}$

19. نعم. $x^2 - 6x + 6$ غير مختزل على $\mathbb{Q}$ بالاعتماد على آيزنشتاين مع $p = 2$.

21. نعم. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$

23. لا. بتكبير المجال إلى حقل خوارج، يجب أن يكون لديك حقل يحوي حقلين أوليين مختلفين $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{Z}_q$، وهذا مستحيل.

الفصل 28

1. $-3x^3 + 7x^2y^2z - 5x^2yz^3 + 2xy^3z^5$

3. $2x^2yz^2 - 2xy^2z^2 - 7x + 3y + 10z^3$

5. $2z^5y^3x - 5z^3yx^2 + 7zy^2x^2 - 3x^3$

7. $10z^3 - 2z^2y^2x + 2z^2yx^2 + 3y - 7x$

9. $1<z<y<x<z^2<yz<y^2<xz<xy<x^2<z^3<yz^2<y^2z<y^3<xz^2<xyz<xy^2<x^2z<x^2y<x^3<\cdots$

11. $3y^2z^5 - 8z^7 + 5y^3z^3 - 4x$ **13.** $3yz^3 - 8xy - 4xz + 2yz + 38$

15. $\langle y^5 + y^3, y^3 + z, x - y^4\rangle$ **17.** $\langle y^2z^3 + 3, -3y - 2z, y^2z^2 + 3\rangle$

19. $\{1\}$ **21.** $\{x - 1\}$

23. $\{2x + y - 5, y^2 - 9y + 18\}$

المتنوعة الجبرية هي $\{(1,3), (-\frac{1}{2},6)\}$.

25. $\{x + y, y^3 - y + 1\}$

تتكوّن المتنوّعة الجبرية من نقطة واحدة $(a,-a)$، حيث $a \approx 1.3247$.

27. أ. صح جـ. صح هـ. صح ز. صح ط. خطأ

الفصل 29

1. $x^2 - 2x - 1$ **3.** $x^2 - 2x + 2$

5. $x^{12} + 3x^8 - 4x^6 + 3x^4 + 12x^2 + 5$

7. $\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{62}{9}; \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 4$

9. جبري، $\deg(\alpha,F) = 2$

11. متسامٍ

13. جبري، $\deg(\alpha,F) = 2$

15. جبري، $\deg(\alpha,F) = 1$

17. $x^2 + x + 1 = (x-\alpha)(x + 1 + \alpha)$

23. أ. صح جـ. صح هـ. خطأ ز. خطأ ط. خطأ

25. ب. $x^3 + x^2 + 1 = (x-\alpha)(x - \alpha^2)[x - (1+\alpha+\alpha^2)]$

27. هي كثيرة الحدود الواحدية في $F[x]$ ذات الدرجة الأصغرية، التي α صفر لها.

الفصل 30

1. $\{(0, 1), (1, 0)\}$، $\{(1, 1), (-1, 1)\}$، $\{(2, 1), (1, 2)\}$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

3. لا. $2(-1, 1, 2) - 4(2,-3, 1) + (10,-14, 0) = (0, 0, 0)$.

5. $\{1\}$ **7.** $\{1, i\}$ **9.** $\{1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, (\sqrt[4]{2})^3\}$

15. أ. صح جـ. صح هـ. خطأ ز. خطأ ط. صح

17. أ. **الفضاء الجزئي من V المولد بـ S** هو تقاطع جميع الفضاءات الجزئية من V التي تحوي S.

19. جواب جزئي: أساس لـ F^n هو $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ حيث 1 هو المحايد الضربي لـ F.

25. أ. تشاكل

ب. جواب جزئي: **النواة (kernel)** (أو **الفضاء الصفري (nullspace)**) لـ ϕ هو $\{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = 0\}$.

جـ. ϕ تماثل من V إلى V' إذا كان $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$، و$\phi$ ترسل V بصورة غامرة إلى V'.

الفصل 31

1. $2, \{1, \sqrt{2}\}$ **3.** $4, \left\{1, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\right\}$

5. $6, \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\ (\sqrt[3]{2})^2, (\sqrt[3]{2})^2, \sqrt{2}(\sqrt[3]{2})^2\}$ **7.** $2, \{1, \sqrt{6}\}$

9. $9, \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{18}, \sqrt[3]{36}\}$

11. $2, \left\{1, \sqrt{2}\right\}$ **13.** $2, \left\{1, \sqrt{2}\right\}$

19. أ. خطأ جـ. خطأ هـ. خطأ ز. خطأ ط. خطأ

23. جواب جزئي: يتمّ الحصول على امتدادات من الدرجة 2^n لـ $n \in \mathbb{Z}^+$.

الفصل 32

الأسئلة جميعها ذات الأرقام الفردية تحتاج إلى براهين، وهي ليست مسرودة هنا.

الفصل 33

1. نعم **3.** نعم **5.** 6 **7.** 0

الفصل 34

.1 أ. $K = \{0, 3, 6, 9\}$

ب. $0 + K = \{0, 3, 6, 9\}, 1 + K = \{1, 4, 7, 10\}, 2 + K = \{2, 5, 8, 11\}$

جـ. $\mu(0 + K) = 0, \mu(1 + K) = 2 , \mu(2 + K) = 1$

.3 أ. $HN = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}, H \cap N = \{0, 12\}$

ب. $0 + N = \{0, 6, 12, 18\}, 2 + N = \{2, 8, 14, 20\}, 4 + N = \{4, 10, 16, 22\}$

جـ. $0 + (H \cap N) = \{0, 12\}, 4 + (H \cap N) = \{4, 16\}, 8 + (H \cap N) = \{8, 20\}$

د. $\phi(0 + N) = 0 + (H \cap N), \phi(2 + N) = 8 + (H \cap N), \phi(4 + N) = 4 + (H \cap N)$

.5 أ. $0 + H = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}, 1 + H = \{1, 5, 9, 13, 17, 21\},$

$2 + H = \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}, 3 + H = \{3, 7, 11, 15, 19, 23\}.$

ب. $0 + K = \{0, 8, 16\}, 1 + K = \{1, 9, 17\}, 2 + K = \{2, 10, 18\},$

$3 + K = \{3, 11, 19\},$

$4 + K = \{4, 12, 20\}, 5 + K = \{5, 13, 21\}, 6 + K = \{6, 14, 22\},$

$7 + K = \{7, 15, 23\}.$

جـ. $0 + K = \{0, 8, 16\}, 4 + K = \{4, 12, 20\}$

د. $(0 + K) + (H/K) = H/K = \{0 + K, 4 + K\} = \{\{0, 8, 16\}, 4, 12, 20\}\}$

$(1 + K) + (H/K) = \{1 + K, 5 + K\} = \{\{1, 9, 17\}, \{5, 13, 21\}\}$

$(2 + K) + (H/K) = \{2 + K, 6 + K\} = \{\{2, 10, 18\}, \{6, 14, 22\}\}$

$(3 + K) + (H/K) = \{3 + K, 7 + K\} = \{\{3, 11, 19\}, \{7, 15, 23\}\}.$

هـ. $\phi(0 + H) = (0 + K) + (H/K), \phi(1 + H) = (1 + K) + (H/K)$

$\phi(2 + H) = (2 + K) + (H/K), \phi(3 + H) = (3 + K) + (H/K).$

الفصل 35

1. التصفيات $\{0\}| < 250\mathbb{Z} < 10\,\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ لـ $\{0\} < 10\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ و $\{0\} < 250\mathbb{Z} < 25\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ لـ $0 < 25\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ متماثلة.

3. المتسلسلات المعطاة متماثلة.

5. التصفيات $\{(0, 0)\} < (4800\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (240\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (60\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (10\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ للمتسلسلة الأولى،

و $\{(0, 0)\} < \mathbb{Z} \times (4800\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (480\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (80\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (20\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ للمتسلسلة الثانية هي تصفيات متماثلة.

7. $\{0\} < 16 < 8 < 4 < 2 < \mathbb{Z}_{48}$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 8\rangle < \langle 4\rangle < \langle 2\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 12\rangle < \langle 4\rangle < \langle 2\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 12\rangle < \langle 6\rangle < \langle 2\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

$$\{0\} < \langle 24\rangle < \langle 12\rangle < \langle 6\rangle < \langle 3\rangle < \mathbb{Z}_{48}$$

9. $\{(\rho_0, 0)\} < A_3 \times \{0\} < S_3 \times (0) < S_3 \times \mathbb{Z}_2$

$$\{(\rho_0, 0)\} < \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_2 < A_3 \times \mathbb{Z}_2 < S_3 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\{(\rho_0, 0)\} < A_3 \times \{0\} < A_3 \times \mathbb{Z}_4 < S_3 \times \mathbb{Z}_2$$

11. $\{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4$

13. $.\{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4 \le \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4 \le \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_4 \le \ldots$

17. أ. صح   جـ. صح   هـ. خطأ   ز. خطأ   ط. صح

ط. تطبيق مبرهنة جوردن–هولدر على الزمر $\mathbb{Z}_n$ يضمن المبرهنة الأساسية للحساب.

19. نعم. $\{\rho_0\} < \{\rho_0, \rho_2\} < \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\} < D_4$ هي متسلسلة تركيب (فعليًا رئيسة) وزمر العامل جميعها تماثل $\mathbb{Z}_2$، وعليه، فهي إبدالية.

21. سلسلة (3)

$$\{0\} \le \langle 12\rangle \le \langle 12\rangle \le \langle 12\rangle \le \langle 12\rangle \le \langle 12\rangle \le \langle 4\rangle \le \langle 2\rangle \le \mathbb{Z}_{24} \le \mathbb{Z}_{24}$$

سلسلة (4)

$$\{0\} \le \langle 12\rangle \le \langle 12\rangle \le \langle 6\rangle \le \langle 6\rangle \le \langle 6\rangle \le \langle 3\rangle \le \langle 3\rangle \le \mathbb{Z}_{24} \le \mathbb{Z}_{24}$$

التماثلات

$$\langle 12\rangle/\{0\} \simeq \langle 12\rangle/\{0\} \simeq \mathbb{Z}_4 \qquad \langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 6\rangle/\langle 6\rangle \simeq \{0\}$$

$$\langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 3\rangle/\langle 3\rangle \simeq \{0\} \qquad \langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \{0\}$$

$$\langle 12\rangle/\langle 12\rangle \simeq \langle 6\rangle/\langle 6\rangle \simeq \{0\} \qquad \langle 4\rangle/\langle 12\rangle \simeq \mathbb{Z}_{24}/\langle 3\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$$

$$\langle 2\rangle/\langle 4\rangle \simeq \langle 6\rangle/\langle 12\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_{24}/\langle 2\rangle \simeq \langle 3\rangle/\langle 6\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}_{24}/\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_{24}/\mathbb{Z}_{24} \simeq \{0\}$$

الفصل 36

1. 3   **3.** 1، 3

5. زمر سيلو الجزئية من النوع 3 هي: $\langle(1, 2, 3)\rangle$، $\langle(1, 2, 4)\rangle$، $\langle(1, 3, 4)\rangle$، و $\langle(2, 3, 4)\rangle$.

كذلك $\langle(1, 2, 4)\rangle = (3, 4)\langle(1, 2, 3)\rangle(3, 4)$، إلى آخره.

الفصل 37

1. أ. صفوف الترافق هي: $\{\rho_0\}$، $\{\rho_2\}$، $\{\rho_1,\rho_3\}$، $\{\mu_1,\mu_2\}$، $\{\delta_1,\delta_2\}$.

ب. $8 = 2 + 2 + 2 + 2$

3. أ. صح   جـ. خطأ   هـ. صح   ز. صح   ط. خطأ

هـ. هذا يُعدّ إلى حدّ ما وجهة نظر.

9. $24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6$

الفصل 38

1. $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$

3. لا. $n(2, 1) + m(4, 1)$ لا يمكن أن تؤدي إلى عدد فردي للإحداثي الأول.

7. $\mathbb{Z} < 2\mathbb{Z}$، المرتبة $r = 1$

الفصل 39

1. أ. $a^2b^2a^3c^3b^{-2}$ ، $b^2c^{-3}a^{-3}b^{-2}a^{-2}$ ب. $a^{-1}b^3a^4c^6a^{-1}$ ، $ac^{-6}a^{-4}b^{-3}a$

3. أ. 16 ب. 36 جـ. 36

5. أ. 16 ب. 36 جـ. 18

11. أ. جواب جزئي: $\{1\}$ هو أساس لـ $\mathbb{Z}_4$. جـ. نعم

13. جـ. زمرة بلوب على S تماثل الزمرة الحرة $F[S]$ على S.

الفصل 40

1. $(a : a^4 = 1)$؛ $(a, b : a^4 = 1, b = a^2)$؛ $(a, b, c : a = 1, b^4 = 1, c = 1)$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

3. الزمرة الثمانية:

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	1	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	1	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	1	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1

الزمرة الرباعية: جدول الزمرة الثمانية نفسه ما عدا ألـ **16** مدخلًا في الزاوية اليمنى السفلى، فتكون:

a^2	a	1	a^2
a^3	a^2	a	1
1	a^3	a^2	a
a	1	a^3	a^2

5. $(a, b : a^7 = 1,\ b^3 = 1,\ ba = a^2 b)$.$\mathbb{Z}_{21}$

الفصل 41

1. أ. $2P_1P_3 - 3P_1P_4 + P_1P_6 - 3P_2P_3 + 3P_2P_4 - 5P_3P_4 + 4P_3P_6 - 5P_4P_6$

ب. لا   ج. نعم

3. $C_i(P) = Z_i(P) = B_i(P) = H_i(P) = 0$ لـ $i > 0$. $B_0(P) = 0$. $Z_0(P) \simeq \mathbb{Z}$ وتتولد من P الدورة-0 (0-cycle) $H_0(P) \simeq Z$

5. $C_i(X) = Z_i(X) = B_i(X) = H_i(X) = 0$ لـ $i > 0$. $B_0(x) \simeq \mathbb{Z}$، وتتولد من السلسلة-0 (0-chain) $P_2 - P_1$.

$Z_0(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، وتتولد من الدورتين$-0$ (two 0-cycles) P_1 و P_2؛ لأن $Z_0(X)/B_0(X)$ "تطابق P_1 مع P_2"، $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$، وتتولدت من مجموعة المشاركة $P_1 + B_0(X)$

7. أ. **مبسّط موجّه من الرتبة n هو متتالية مرتبة** $P_1P_2 \dots P_{n+1}$

ب. الحدود لـ $P_1P_2 \dots P_{n+1}$ **تعطي بـ**

$$\partial_n\left(P_1P_2\dots \mathrm{P}_{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}P_1P_2\dots P_{i-1}P_{i+1}\dots P_{n+1}.$$

ج. كل مجموع مفرد من حدود مبسّط موجّه من الرتبة n **هو وجه للمبسّط**

11. أ. $\delta^{(n)}\left(\sum_i m_i\sigma_i\right) = \sum_i m_i\delta^{(n)}(\sigma_i)$

13. $H^{(n)}(X) = Z^{(n)}(X)/B^{(n)}(X)$

$H^{(0)}(S) \simeq \mathbb{Z}$ وتتولد من $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + \{0\}$

$H^{(2)}(S) \simeq \mathbb{Z}$ وتتولد من $P_1P_2P_3 + B^{(2)}(S)$

الفصل 42

1. $H_n(X) = 0$.$H_1(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ لـ $n > 1$

3. $H_n(X) = 0$.$H_2(X) \simeq \mathbb{Z}$.$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$.$H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ لـ $n > 2$

5. $H_n(X) = 0$.$H_2(X) \simeq \mathbb{Z}$.$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$.$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ لـ $n > 2$

7. أ. صح   ج. خطأ هـ. صح ز. صح ط. خطأ

9. $H_n(X) = 0$.$H_2(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.$H_1(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ لـ $n > 2$.

11. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.\ H_2(X) \simeq \mathbb{Z}.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 2$

الفصل **43**

1. كلا العَدَّان يبينان أنّ $\chi(X) = 1$

3. ستتحقق للمنطقة المربعة؛ لأن منطقة كهذه تماثل E^2. من الوضوح أنها لا تتحقق لخليتين منفصلتين من الرتبة 2، لأن كلاً منهما يمكن أن ترسل بصورة متصلة وغامرة إلى الأخرى، ومثل هذه الدالة ليس لها نقاط مثبتة.

5. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.\ H_1(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.\ H_n(X) = 0$ لـ $n > 1$

7. $2 - 2n$

9. $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}.H_1(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}_{\text{عامل } (q\text{-}1)}.H_n(X) = 0$ لـ $n > 1$

11. ليكن Q رأسًا لـ b، ولتكن c متسلسلة–2 (**2-chain**) تتكوّن من جميع المبسطات (**2-simplexes**) لـ X، موجهة بالطريقة نفسها، بحيث تكون $c \in Z_2(X)$

أ. f_{*0} معطًى بـ $f_{*0}(Q + B_0(X)) = Q + B_0(b)$

f_{*1} معطًى بـ $f_{*1}((ma + nb) + B_1(X)) = nb + B_1(b)$

f_{*2} معطًى بـ $f_{*2}(c + B_1(X)) = 0$

ب. f_{*0} كما في (أ)

f_{*1} معطًى بـ $f_{*1}((ma + nb) + B_1(X)) = 2nb + B_1(b)$

f_{*2} كما في (أ)

13. ليكن Q رأسًا لـ b،

f_{*0} معطًى بـ $f_{*0}(Q + B_0(X)) = Q + B_0(b)$

f_{*1} معطًى بـ $f_{*1}((ma + nb) + B_1(X)) = nb + B_1(b)$ حيث $m = 0,1$

f_{*2} تافه؛ لأن كلًّا من $H_2(X)$ و $H_2(b)$ هو 0.

الفصل 44

5. للمبرهنة 4.44، الشرط $f_k\ \partial'_k = f_{k-1}\partial_k$ يؤدي إلى $f_{k-1}(B_{k-1}(A)) \subseteq B_{k-1}(A')$

عندئذ التمرين 39.14 يبيّن أنّ f_{k-1} ينشئ تشاكلًا طبيعيًا من $Z_{k-1}(A)/B_{k-1}(A)$ إلى $Z_{k-1}(A')/B_{k-1}(A')$. هذه هي الطريقة الصحيحة للنظر إلى المبرهنة 4.44.

للمبرهنة 7.44، إذا استخدمنا التمرين 39.14، الحقيقة أن $\partial_k(A'_k) \subseteq A'_{k-1}$ تبين أن ∂_k ينشئ تشاكلًا طبيعيًا $\overline{\partial}_k : (A_k/A'_k) \to (A_{k-1}/A'_{k-1})$

7. متتالية الشباه المضبوطة هي

$$[H_2(a) = 0] \xrightarrow{i_{*2}} [H_2(X) \simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*2}} [H_2(X, a) \simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*2}} [H_1(a) \simeq \mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*1}} [H_1(X) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*1}} [H_1(X, a) \simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*1}} [H_0(a \simeq \mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*0}} [H_0(X) \simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*0}} [H_0(X, a) = 0]$$

j_{*2} ترسل المولد $c + B_2(X)$ في $H_2(X)$ بصورة غامرة إلى المولد

$(c + C_2(a)) + B_2(X, a)$

في $H_2(X, a)$ وهي تماثل. وعليه، $0 = (\text{image } i_{*2}) = (\text{kernel } j_{*2})$.

∂_{*2} ترسل كل شيء بصورة غامرة إلى 0، وهكذا $\mathbb{Z} \simeq (\text{image } j_{*2}) = (\text{kernel } \partial_{*2})$.

i_{*1} ترسل المولد $a + B_1(a)$ بصورة غامرة إلى $(a + 0b) + B_1(X)$، وهكذا i_{*1} هي تماثل إلى، و$0 = (\text{image } \partial_{*2}) = (\text{kernel } i_{*1})$.

j_{*1}ترسل $(ma + nb) + B_1(X)$ بصورة غامرة إلى $(nb + C_1(a)) + B_1(X, a)$، وهكذا $\mathbb{Z} \simeq (\text{image } i_{*1}) = (\text{kernel } j_{*1})$.

∂_{*1} ترسل $(nb + C_1(a)) + B_1(X, a)$ بصورة غامرة إلى 0، وهكذا $\mathbb{Z} \simeq (\text{image } j_{*1}) = (\text{kernel } \partial_{*1})$.

للرأس Q لـ a، i_{*0} ترسل $Q + B_0(a)$ بصورة غامرة إلى $Q + B_0(X)$، وهكذا i_{*0} تماثل، و$0 = (\text{image } \partial_{*1}) = (\text{kernel } i_{*0})$.

j_{*0}ترسل $Q + B_0(X)$ بصورة غامرة إلى $B_0(X, a)$ من $H_0(X, a)$، وهكذا $\mathbb{Z} \simeq (\text{image } i_{*0}) = (\text{kernel } j_{*0})$.

9. الحل بصورة منهجية مماثل لذلك في التمرين 44.7

11. إجابة جزئية: متتالية الشباه المضبوطة هي

$$[H_2(Y)=0] \xrightarrow{i_{*2}} [H_2(X)=0] \xrightarrow{j_{*2}} [H_2(X,Y)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*2}} [H_1(Y)\simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*1}} [H_1(X)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*1}} [H_1(X,Y)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{\partial_{*1}} [H_0(Y)\simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}]$$

$$\xrightarrow{i_{*0}} [H_0(X)\simeq \mathbb{Z}] \xrightarrow{j_{*0}} [H_0(X,Y)=0]$$

يترك لك التحقق من أنها مضبوطة. لاحظ أنّ الحافّة P_1Q_1 في الشكل 11.42 تنشئ مولدًا لـ $H_1(X, Y)$. بالبدء بـ ∂_{*2}، تلك الدوال ممتعة:

الفصل 45

1. نعم **3.** لا **5.** لا **7.** نعم

9. في $\mathbb{Z}[x]$: فقط $2x-7$، $-2x+7$

في $\mathbb{Q}[x]$: $4x-14$، $x-\frac{7}{2}$، $6x-21$، $-8x+28$

في $\mathbb{Z}_{11}[x]$: $2x-7$، $10x-2$، $6x+1$، $3x-5$، $5x-1$

11. 26، -26 **13.** 198، -198

15. إنها "كثيرة حدود بدائية"؛ لأن كل عنصر غير صفري في $\mathbb{Q}$ هو عنصر وحدة. في الواقع $18ax^2-12ax+48a$ كثيرة حدود بدائية لكل $a\in\mathbb{Q}$، $a\neq 0$

17. $2ax^2-3ax+6a$ كثيرة حدود بدائية لكل $a\neq 0$ في $\mathbb{Z}_7$؛ لأن كل عنصر a مثل هذا هو عنصر محايد في $\mathbb{Z}_7$.

21. أ. صح ج. صح هـ. صح ز. خطأ ط. خطأ

ط. أما p أو إحدى مرافقاتها **(associates)** فيجب أن تظهر في كل تحليل إلى غير مختزلات.

23. $2x+4$ غير مختزل في $\mathbb{Q}[x]$ لكن ليس في $\mathbb{Z}[x]$

31. إجابة جزئية: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

الفصل 46

1. نعم **3**. لا. (1) لا يتحقق **5**. نعم

7. 61 **9**. $x^3 + 2x - 1$ **11**. 66

13. أ. صح ج. صح هـ. صح ز. صح ط. صح

23. إجابة جزئية: المعادلة $ax = b$ لها حل في $\mathbb{Z}_n$ للعناصر غير الصفرية $a, b \in \mathbb{Z}_n$ إذا كان وفقط إذا كان gcd الموجب لـ a و n في $\mathbb{Z}$ يقسم b.

الفصل 47

1. $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ **3**. $4 + 3i = (1 + 2i)(2 - i)$

5. $6 = (2)(3) = \left(-1+\sqrt{-5}\right)\left(-1-\sqrt{-5}\right)$ 7. $7 - i$

15. جـ. i) الرتبة 9، المميز 3 ii) الرتبة 2، المميز 2 iii) الرتبة 5، المميز 5

الفصل 48

1. $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ **3**. $3+\sqrt{2}$ ، $3-\sqrt{2}$ **5**. $\sqrt{2}+i$ ، $\sqrt{2}-i$ ، $-\sqrt{2}+i$ ، $-\sqrt{2}-i$

7. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ، $-\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{1-\sqrt{2}}$ ، $-\sqrt{1-\sqrt{2}}$ **9**. $\sqrt{3}$

11. $-\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ **13**. $-\sqrt{2}+\sqrt{45}$

15. أ. $\mathbb{Q}$ ب. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{6}\right)$ جـ. $\mathbb{Q}$

17. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\right)$ **19**. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3},\sqrt{10}\right)$ **21**. $\mathbb{Q}$

25. أ. $3-\sqrt{2}$ ب. إنهما الدالة نفسها

27. $\sigma_3(0) = 0$، $\sigma_3(1) = 1$، $\sigma_3(2) = 2$، $\sigma_3(\alpha) = -\alpha$، $\sigma_3(2\alpha) = -2\alpha$،

$\sigma_3 (1 + \alpha) = 1 - \alpha$، $\sigma_3 (1 + 2\alpha) = 1 - 2\alpha$، $\sigma_3 (2 + \alpha) = 2 - \alpha$،

$\sigma_3(2+ 2\alpha)=2-2\alpha$، $\mathbb{Z}_3 (\alpha)\{\sigma_3\} = \mathbb{Z}_3$.

29. أ. خطأ ج. صح هـ. خطأ ز. صح ط. صح

37. نعم

الفصل 49

1. الدالة المحايدة من E وبصورة غامرة إلى E

τ المعطاة بـ $\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

3. τ_1 المعطاة بـ $\tau_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \tau_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \tau_1(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

τ_2 المعطاة بـ $\tau_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \tau_2(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau_2(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

τ_3 المعطاة بـ $\tau_3(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \tau_3(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \tau_3(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

τ_4 المعطاة بـ $\tau_4(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \tau_4(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau_4(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

5. الدالة المحايدة من $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\right)$ إلى نفسها؛

τ_1 المعطاة بـ $\tau_1(\alpha_1) = \alpha_1$، $\tau_1(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ حيث $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$

τ_2 المعطاة بـ $\tau_2(\alpha_1) = \alpha_2$، $\tau_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$، حيث $\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)/2$

τ_3 المعطاة بـ $\tau_3(\alpha_1) = \alpha_2$، $\tau_3(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

τ_4 المعطاة بـ $\tau_4(\alpha_1) = \alpha_3$، $\tau_4(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ حيث $\alpha_3 = \sqrt[3]{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)/2$

τ_5 المعطاة بـ $\tau_5(\alpha_1) = \alpha_3$، $\tau_5(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

7. أ. $\mathbb{Q}(\pi^2)$ ب. τ_1 المعطاة بـ $\tau_1(\sqrt{\pi}) = i\sqrt{\pi}$، τ_2 المعطاة بـ $\tau_2(\sqrt{\pi}) = -i\sqrt{\pi}$

الفصل 50

.1 2 **.3** 4 **.5** 2 **.7** 1 **.9** 2 **.13** $1 \leq [E:F] \leq n!$

.15 ليكن $F = \mathbb{Q}$ و $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. عندئذٍ، يكون لـ

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

صفر في E، لكنه لا ينشطر في E.

.23 أ. 6

الفصل 51

.1 $\sqrt[3]{2} = (\sqrt[6]{2})^2,\ \sqrt{2} = (\sqrt[6]{2})^3,\ \sqrt[6]{2} = 2/(\sqrt[3]{2}\sqrt{2})$. $\alpha = \sqrt[6]{2}$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

.3 $\sqrt{3} = (\frac{11}{2})\alpha - (\frac{1}{2})\alpha^3,\ \sqrt{2} = (\frac{9}{2})\alpha - (\frac{1}{2})\alpha^3$. $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. (هناك إجابات أخرى محتملة).

.7 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$. هنا $f(x)$ ليست كثيرة حدود غير مختزلة. كل عامل غير مختزل لـ $f(x)$ له أصفار تكرارها 1 فقط.

.15 ب. الحقل F. جـ. $F[x^p]$

الفصل 52

.1 $\mathbb{Z}_3(y^3, z^9)$ **.3** $\mathbb{Z}_3(y^4, z^2)$

.5 أ. خطأ جـ. خطأ هـ. خطأ ز. صح ط. صح

الفصل 53

.1 8 **.3** 8 **.5** 4 **.7** 2

.9 للزمرة عنصران، التماثل الذاتي المحايد ι لـ $\mathbb{Q}(i)$ و σ، بحيث إنّ $\sigma(i) = -i$.

11. أ. ليكن $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$، $\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$، و $\alpha_3 = \sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

الدوال هي

ρ_0، حيث ρ_0 هي الدالة المحايدة؛

ρ_1، حيث $\rho_1(\alpha_1) = \alpha_2$ و $\rho_1(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$؛

ρ_2، حيث $\rho_2(\alpha_1) = \alpha_3$ و $\rho_2(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$؛

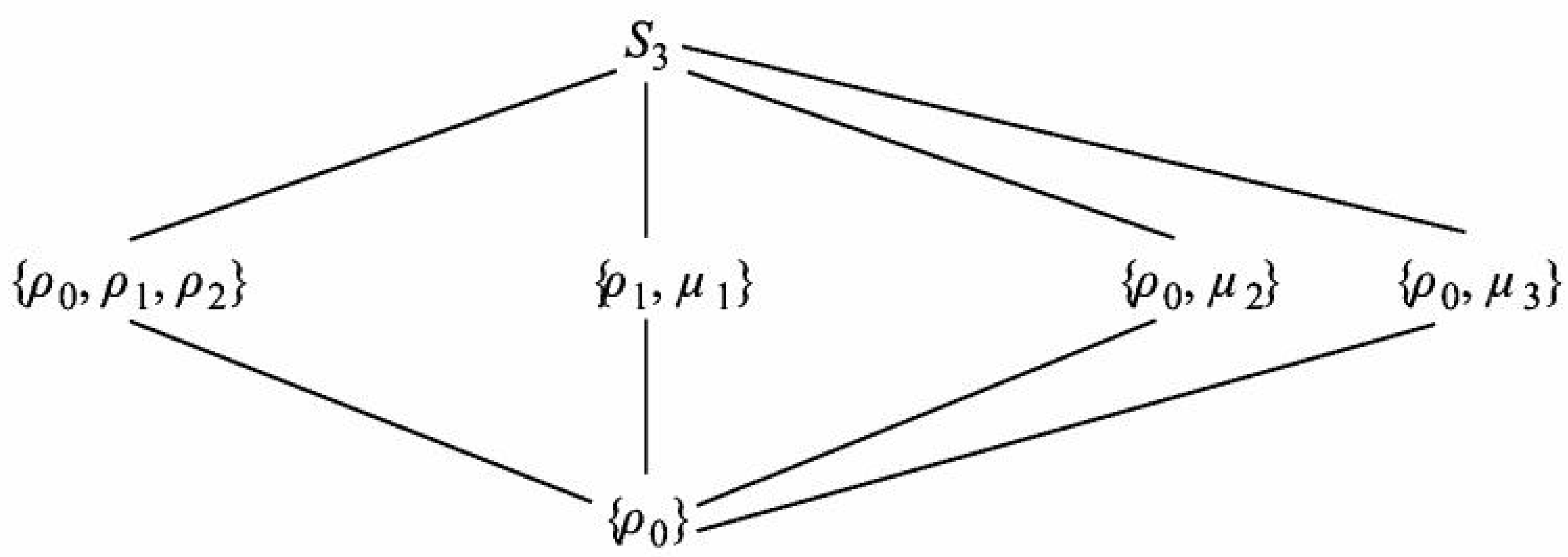
μ_1، حيث $\mu_1(\alpha_1) = \alpha_1$ و $\mu_1(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$؛

μ_2، حيث $\mu_2(\alpha_1) = \alpha_3$ و $\mu_2(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$؛

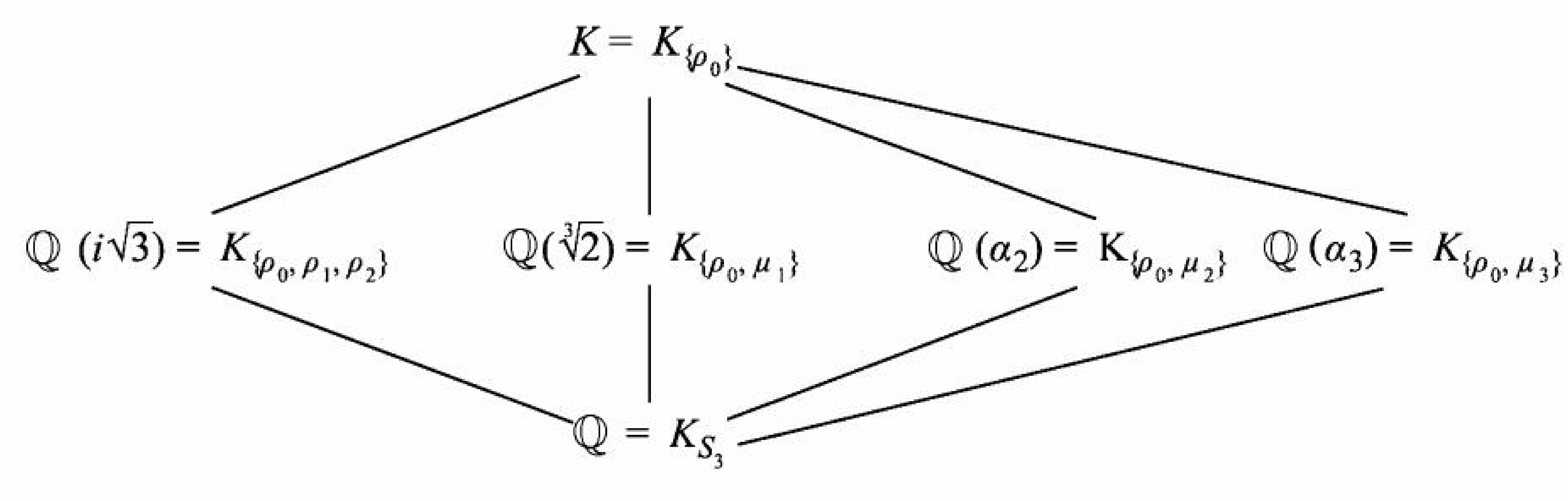
μ_3، حيث $\mu_3(\alpha_1) = \alpha_2$ و $\mu_3(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$.

ب. S_3. تمّ اختيار الرموز في (أ) لتتطابق مع الرموز لـ S_3 في المثال 7.8.

جـ.



مخطط الزمرة



مخطط الحقل

13. حقل الانشطار لـ $(x^3-1) \in \mathbb{Q}[x]$ هو $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ ، والزمرة دورية من الرتبة 2 وعناصرها: ι، حيث ι هي الدالة المحايدة لـ $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$، و σ، حيث $\sigma(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$.

15. أ. خطأ جـ. صح هـ. صح ز. خطأ ط. خطأ

25. جواب جزئي: $G(K/(E \vee L)) = G(K/E) \cap G(K/L)$

الفصل 54

3. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$: $\sqrt[4]{2} + i$, $x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 28x^2 + 1$;

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$: $\sqrt[4]{2}$, $x^4 - 2$;

$\mathbb{Q}(i(\sqrt[4]{2}))$: $i(\sqrt[4]{2})$, $x^4 - 2$;

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$: $\sqrt{2} + i$, $x^4 - 2x^2 + 9$;

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i(\sqrt[4]{2}))$: $\sqrt[4]{2} + i(\sqrt[4]{2})$, $x^4 + 8$;

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} - i(\sqrt[4]{2}))$: $\sqrt[4]{2} - i(\sqrt[4]{2})$, $x^4 + 8$;

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: $\sqrt{2}$, $x^2 - 2$;

$\mathbb{Q}(i)$: i, $x^2 + 1$;

$\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$: $i\sqrt{2}$, $x^2 + 2$;

$\mathbb{Q}$: 1, $x - 1$

5. الزمرة دورية من الرتبة 5، وعناصرها هي:

	ι	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
$\sqrt[5]{2} \rightarrow$	$\sqrt[5]{2}$	$\zeta(\sqrt[5]{2})$	$\zeta^2(\sqrt[5]{2})$	$\zeta^3(\sqrt[5]{2})$	$\zeta^4(\sqrt[5]{2})$

حيث $\sqrt[5]{2}$ هو الجذر الحقيقي الخامس لـ 2.

7. حقل الانشطار لـ $x^8 - 1$ على $\mathbb{Q}$ هو حقل الانشطار نفسه لـ x^4+1 على $\mathbb{Q}$، وعليه، فهناك وصف كامل ضمن المثال 7.54. (هذه أسهل طريقة للإجابة عن السؤال).

9. أ. $s_1^2 - 2s_2$ ب. $\dfrac{s_1 s_2 - 3s_3}{s_3}$

الفصل 55

3. أ. 16 ب. 400 جـ. 2160

5. 3°

7. $\phi_3(x)$ على $\mathbb{Z}_2$ هي x^2+x+1

$\phi_8(x)$ على $\mathbb{Z}_3$ هي $x^4+1=(x^2+x+2)(x^2+2x+2)$.

9. أ. صح جـ. خطأ هـ. صح ز. صح ط. خطأ

$$\phi_1(x) = x-1$$
$$\phi_2(x) = x+1$$
$$\phi_3(x) = x^2+x+1$$
$$\phi_4(x) = x^2+1$$
$$\phi_5(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$$
$$\phi_6(x) = x^2-x+1$$

الفصل 56

1. لا. نعم، K امتداد لـ $\mathbb{Z}_2$ بالجذور

3. أ. صح جـ. صح هـ. صح ز. صح ط. خطأ (x^3-2x على $\mathbb{Q}$ تعطى مثالًا مناقضًا)

ملحق

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -3+2i & -1-4i \\ 2 & -i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 5 & 16 & -3 \\ 0 & -18 & 24 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 4-6i & -2-2i \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 8 & -8i \\ 8i & 8 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** -48

ملحق: جبر المصفوفات

نعطي هنا ملخّصًا مختصرًا لجبر المصفوفات. تظهر المصفوفات في أمثلة لبعض وحدات الكتاب، كما ضُمِّنَت في كثير من التمارين.

المصفوفة (**matrix**) هي ترتيب على صورة مستطيل لصفوفٍ من الأعداد، على سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

مصفوفة لها صفان وثلاثة أعمدة. مصفوفة لها m صفًّا وn عمودًا، هي مصفوفة من الدرجة $m \times n$، وهكذا المصفوفة (1) هي مصفوفة من الدرجة 2×3، إذا كان $m = n$، فإننا نقول: إن **المصفوفة مربعة** (**square**).

يمكن أن تكون مدخلات المصفوفة من أيّ نوع من الأعداد – صحيحة، أو نسبية، أو حقيقية، أو مركبة، وقد جعلنا $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ترمز لمجموعة جميع المصفوفات من الدرجة $m \times n$ بمدخلات حقيقية، فإذا كان $m = n$، فيختصر الرمز إلى $M_n(\mathbb{R})$، ويمكننا بصورة مشابهة أن نعُدّ $M_n(\mathbb{Z})$، $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$، ... إلخ.

مصفوفتان لهما عدد الصفوف نفسه m ، وعدد الأعمدة نفسه n، يمكن جمعهما بطريقة واضحة: نجمع المدخلات في المواقع المتقابلة.

مثال A1 في $M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$، لدينا

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

▲

سوف نستخدم الأحرف الكبيرة لنرمز للمصفوفات، فإذا كانت A، وB وC مصفوفات من الدرجة $m \times n$، فمن السهل رؤية أنّ $A + B = B + A$ و $A+(B + C) = (A + B) + C$.

ضـرب المصفوفات، AB مُعَرَّف فقط إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B، أي إنه إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m\times n$، فإنّ B يجب أن تكون مصفوفة من الدرجة $n\times s$ لعدد ما صحيح s، ونبدأ على النحو الآتي بتعريف الضرب AB، حيث A مصفوفة من الدرجة $1 \times n$ وB مصفوفة من الدرجة $n \times 1$:

$$AB = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. \tag{2}$$

لاحظ أنّ النتيجة عدد. (لن نميز بين العدد والمصفوفة من الدرجة 1×1 التي لها هذا العدد بوصفه مدخلتها الوحيدة)، يمكنك تمييز هذا الضرب على أنه الضرب النقطي لمتجهين. المصفوفات التي لها صف واحد فقط أو عمود واحد فقط، هي **متجهات صف (row vectors)** أو **متجهات عمود (column vectors)**، على الترتيب.

مثال A2 نجد أنّ:

$$[3 \quad -7 \quad 2]\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix} = (3)(1)+(-7)(4)+(2)(5) = -15$$

▲

لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$، ولتكن B مصفوفة من الدرجة $n \times s$. لاحظ أنّ العدد n للمدخلات في كل صَف من A هو العدد نفسه n للمدخلات في كل عمود من B. الضرب $C = AB$ هو مصفوفة $m \times s$، أمّا المدخلة في الصف ذي الترتيب i والعمود ذي الترتيب j في AB، فهي الضرب للصف ذي الترتيب i من A بالعمود ذي الترتيب j من B، كما عُرِّف من خلال المعادلة (2)، ووضِّح في المثال $A2$.

مثال A3 احسب

$$AB = \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\1 & 4 & 1 & -1\\-1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

الحل لاحظ أنّ A من الدرجة 2×3، وB من الدرجة 3×4. وعليه، AB ستكون من الدرجة 2×4، والمدخلة في صفها الثاني وعمودها الثالث، هي:

$$\text{(الصف الثاني } A\text{)}\,\text{(العمود الثالث } B\text{)} = [1 \quad 4 \quad 6]\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = 2+4+12 = 18.$$

بحساب المدخلات الثمانية جميعها لـِ AB بهذا الأسلوب، نحصل على:

$$AB = \begin{bmatrix}2 & -2 & 9 & 6\\1 & 17 & 18 & 3\end{bmatrix}$$

▲

مثال A4 الضرب

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}$$

غير مُعَرَّف؛ لأنّ عدد المدخلات في صفّ للمصفوفة الأولى لا يساوي عدد المدخلات في عمود للمصفوفة الثانية.

▲

لمصفوفتين مربعتين من الدرجة نفسها، الجمع والضرب كلاهما دائمًا مُعَرَّفَان. يسألنا التمرين 10 أن نوضّح الحقيقة الآتية:

ضرب المصفوفات غير إبدالي.

أي إنّ AB ليس بالضرورة تساوي BA، حتى عندما يكون كلا الضربين معرّفًا، كما لـ $A,B \in M_n(\mathbb{Z})$. يمكن إثبات أنّ $A(BC) = (AB)C$ و $A(B + C) = AB + AC$ متى كانت هذه التعابير معرفة.

جعلنا I_n لتكون المصفوفة من الدرجة $n \times n$، مع المدخلات 1 على القطر من الزاوية اليسرى العليا إلى الزاوية اليمنى السفلى والمدخلات 0 في الأماكن الأخرى.

على سبيل المثال:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

من السهل رؤية أنه إذا كانت A أيّ مصفوفة من الدرجة $n \times s$، و B أيّ مصفوفة من الدرجة $r \times n$، فإنّ $I_nA = A$ و $BI_n = B$، أي إنّ المصفوفة I_n تعمل كما يعمل العدد 1 للضرب عندما يكون الضرب بـ I_n مُعَرَّفًا.

لتكن A مصفوفة من الدرجة $n \times n$، وافترض معادلة مصفوفات على الصورة $AX = B$، حيث A و B معلومتان لكن X غير معلومة، فإذا استطعنا إيجاد مصفوفة A^{-1} من الدرجة $n \times n$، بحيث إنّ $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$، فإننا نستطيع استنتاج أنّ:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \qquad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \qquad I_nX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B$$

وقد وجدنا المصفوفة X المطلوبة. مصفوفة مثل A^{-1} تعمل مثل مقلوب العدد: $A^{-1}A = I_n$ و $r = 1$ $(1 / r)$. هذا هو سبب الرمز A^{-1}.

إذا كانت A^{-1} موجودة، فنقول: إن المصفوفة المربعة A لها **معكوس (invertible)**، و A^{-1} هو **معكوس (inverse)** A، إما إذا كانت A^{-1} غير موجودة، فإنّ A يقال عنها: **منفردة (singular)**. يمكن إثبات أنه إذا وجدت مصفوفة A^{-1} بحيث إنّ $A^{-1}A = I_n$، فإنّ $AA^{-1} = I_n$، إضافة إلى ذلك، توجد مصفوفة واحدة فقط A^{-1} لها هذه الخاصية.

مثال A5 لتكن

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 9\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

يمكننا فحص أنّ

$$\begin{bmatrix}-4 & 9\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 9\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 9\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 9\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

وعليه،

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 9\\ 1 & -2\end{bmatrix}.$$

نترك مسائل تحديد وجود A^{-1} وحسابها إلى مقرر دراسي في الجبر الخطي.

يترافق مع كل مصفوفة مربعة A من الدرجة $n \times n$ عدد يسمى المحددة لـ A ، ويرمز له بـ $\det(A)$، ويمكن حساب هذا العدد بوصفه جمعًا وطرحًا لضروب معينة للأعداد التي تظهر في المصفوفة A، على سبيل المثال: المحددة للمصفوفة $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ من الدرجة 2×2 هي ad- bc. لاحظ أنّ مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ مدخلاتها أعداد حقيقية، يمكن النظر إليها بوصفها إعطاء إحداثيات نقطة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ذي البعد n، وبضرب مصفوفة عمود واحد كهذه من اليسار بمصفوفة حقيقية A من الدرجة $n \times n$ ، تنتج مصفوفة عمود واحد تقابل نقطة في $\mathbb{R}^n$، وهذا الضرب من اليسار بـ A يعطي دالة من $\mathbb{R}^n$ إلى نفسها، ومن الممكن إثبات أنّ قطعة من $\mathbb{R}^n$ حجمها V تُرْسَلُ من خلال هذا الضرب بـ A إلى قطعة حجمها $V.|\det(A)|$. هذا أحد أسباب أهمية المحددات.

الخصائص الآتية للمحددات لمصفوفتين A و B من الدرجة $n \times n$ ذات أهمية في هذا الكتاب:

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A) \neq 0$ ، إذا وفقط إذا كانت A مصفوفة لها معكوس.
4. إذا نتجت B عن A بتبديل صفّين (أو عمودين) من A، فإنّ $\det(B) = -\det(A)$
5. إذا كانت كل مدخلة لـ A صفرًا فوق القطر الرئيس من الزاوية اليسرى العليا إلى الزاوية اليمنى السفلى، فإنّ $\det(A)$ هو ضرب مدخلات هذا القطر. النتيجة نفسها صحيحة إذا كانت المدخلات كلها تحت القطر الرئيس أصفارًا.

■ التمارين أ

في التمارين من 1 إلى 9، احسب العبارات الجبرية للمصفوفات المعطاة إذا كانت العملية معرفة.

.1
$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

.2
$$\begin{bmatrix} 1+i & -2 & 3-i \\ 4 & i & 2-i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & i-1 & -2+i \\ 3-i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

.3
$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3-i & 4i \\ 2 & 1+i \\ 3 & -i \end{bmatrix}$$

.4
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

.5
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

.6
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

.7
$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3i & 1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix}$$

.8
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4$$

.9
$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}^4$$

10. أعطِ مثالاً في $M_2(\mathbb{Z})$ يبيّن أنّ ضرب المصفوفات ليس إبداليًّا.

11. أوجد $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ ، بالتجريب إذا لزم.

12. أوجد $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ ، بالتجريب إذا لزم.

13. إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 0 \\ 4 & 17 & 8 \end{bmatrix}$، فأوجد $\det(A)$.

14. أثبت أنه إذا كانت $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ لهما معكوس، فإنّ AB و BA لهما معكوس أيضًا.

قائمة المراجع

Classic Works أعمال كلاسيكية

1. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique,* Book II of Part I, *Algèbre*. Paris: Hermann, 1942–58.
2. N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*. Princeton, N.J.: Van Nostrand, vols. I, 1951, II, 1953, and III, 1964.
3. O. Schreier and E. Sperner, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory* (English translation), 2nd Ed. New York: Chelsea, 1959.
4. B. L. van der Waerden, *Modern Algebra* (English translation). New York: Ungar, vols. I, 1949, and II, 1950.

General Algebra Texts كتب في الجبر العام

5. M. Artin, *Algebra*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1991.
6. A. A. Albert, *Fundamental Concepts of Higher Algebra*. Chicago: University of Chicago Press, 1956.
7. G. Birkhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra,* 3rd Ed. New York: Macmillan, 1965.
8. J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra,* 2nd Ed. Lexington, Mass.: D. C. Heath, 1990.
9. I. N. Herstein, *Topics in Algebra*. New York: Blaisdell, 1964.
10. T. W. Hungerford, *Algebra*. New York: Springer, 1974.
11. S. Lang, *Algebra*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.
12. S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra*. New York: Macmillan, 1967.
13. N. H. McCoy, *Introduction to Modern Algebra*. Boston: Allyn and Bacon, 1960.
14. G. D. Mostow, J. H. Sampson, and J. Meyer, *Fundamental Structures of Algebra*. New York: McGraw-Hill, 1963.
15. W. W. Sawyer, *A Concrete Approach to Abstract Algebra*. San Francisco: Freeman, 1959.

Group Theory مبرهنة الزمرة

16. W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order,* 2nd Ed. New York: Dover, 1955.
17. H. S. M. Coxeter and W. O. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups,* 2nd Ed. Berlin: Springer, 1965.
18. M. Hall, Jr., *The Theory of Groups*. New York: Macmillan, 1959.
19. A. G. Kurosh, *The Theory of Groups* (English translation). New York: Chelsea, vols. I, 1955, and II, 1956.
20. W. Ledermann, *Introduction to the Theory of Finite Groups,* 4th rev. Ed. New York: Interscience, 1961.
21. J. G. Thompson and W. Feit, "Solvability of Groups of Odd Order." *Pac. J. Math.*, **13** (1963), 775–1029.
22. M. A. Rabin, "Recursive Unsolvability of Group Theoretic Problems." *Ann. Math.*, **67** (1958), 172–194.

Ring Theory مبرهنة الحلقة

23. W. W. Adams and P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases* (Graduate Studies in Mathematics, vol. 3). Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1994.
24. E. Artin, C. J. Nesbitt, and R. M. Thrall, *Rings with Minimum Condition*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1944.
25. N. H. McCoy, *Rings and Ideals* (Carus Monograph No. 8). Buffalo: The Mathematical Association of America; LaSalle, III.: Open Court, 1948.
26. N. H. McCoy, *The Theory of Rings*. New York: Macmillan, 1964.

Field Theory مبرهنة الحقل

27. E. Artin, *Galois Theory* (Notre Dame Mathematical Lecture No. 2), 2nd Ed. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1944.
28. O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*. Princeton, N.J.: Van Nostrand, vol. I, 1958.

Number Theory مبرهنة الأعداد

29. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers,* 4th Ed. Oxford: Clarendon Press, 1960.
30. S. Lang, *Algebraic Numbers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
31. W. J. LeVeque, *Elementary Theory of Numbers,* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
32. W. J. LeVeque, *Topics in Number Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 2 vols., 1956.
33. T. Nagell, *Introduction to Number Theory*. New York: Wiley, 1951.
34. I. Nivin and H. S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers*. New York: Wiley, 1960.
35. H. Pollard, *The Theory of Algebraic Numbers* (Carus Monograph No. 9). Buffalo: The Mathematical Association of America; New York: Wiley, 1950.
36. D. Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*. Washington, D.C.: Spartan Books, vol. I, 1962.
37. B. M. Stewart, *Theory of Numbers,* 2nd Ed. New York: Macmillan, 1964.
38. J. V. Uspensky and M. H. Heaslet, *Elementary Number Theory*. New York: McGraw-Hill, 1939.
39. E. Weiss, *Algebraic Number Theory*. New York: McGraw-Hill, 1963.

Homological Algebra الجبر الشّباهي

40. J. P. Jans, *Rings and Homology*. New York: Holt, 1964.
41. S. MacLane, *Homology*. Berlin: Springer, 1963.

Other References مراجع إضافية

42. A. A. Albert (ed.), *Studies in Modern Algebra* (MAA Studies in Mathematics, vol. 2). Buffalo: The Mathematical Association of America; Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963.
43. E. Artin, *Geometric Algebra*. New York: Interscience, 1957.
44. R. Courant and R. Robbins, *What Is Mathematics*? Oxford University Press, 1941.
45. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry,* 2nd Ed. New York: Wiley, 1969.
46. R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. New York: Ginn, 1963.
47. H. B. Edgerton, *Elements of Set Theory*. San Diego: Academic Press, 1977.
48. C. Schumacher, *Chapter Zero*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1996.

الرموز

تولي وزارة التعليم العالي في المملكة العربية السعودية اهتماماً بالغاً بتنمية المجتمع؛ حيث تسعى جاهدة إلى توفير بيئة محفزة على الابتكار، قادرة على الإسهام في التحول إلى مجتمع المعرفة، وتعزيز التنمية المستدامة.

ويأتي مشروع وزارة التعليم العالي لترجمة الكتب المتخصصة في مرحلته الثانية ضمن سلسلة من مختلف التخصصات العلمية، يتم فيها ترجمة نخبة من المقررات الجامعية العالمية، من قِبل فرق أكاديمية متخصصة؛ إسهاماً في تلبية احتياجات الطلاب والباحثين في جميع فروع المعرفة، والعلوم الحديثة على وجه الخصوص، وفق قائمة أولويات واضحة للاحتياجات الراهنة والمستقبلية. وتعد المرحلة الثانية استكمالاً للمرحلة الأولى التي ركزت على (ترجمة كتب التطوير الأكاديمي)، فتناولت تطوير العملية التعليمية، وتطوير النظام الإداري، وصدر منها أكثر من (٦٢) كتاباً.

وتعتمد الوزارة كثيراً من المعايير المحكَّمة في اختيار الكتب للترجمة؛ من بينها أن تكون الكتب قد حازت قبولاً وانتشاراً في المؤسسات الجامعية ذات الشهرة العالمية، إضافة إلى إثرائها المحتوى العربي؛ كونها مراجع أساسية تخدم مختلف التخصصات، ويُراعى فيها أن تتلاءم مع ما يُدرَّس في جامعاتنا؛ لتكون متاحة للطلبة والباحثين في جامعات المملكة العربية السعودية خاصة، وفي العالم العربي عامة، وترفد الطلاب بمراجع لا غنى عنها في المعرفة، وتسهم في تعزيز التواصل الحضاري والثقافي ونقل المعرفة.

وزير التعليم العالي

د. خالد بن محمد العنقري

ISBN:978-603-503-534-7

9 786035 035347

موضوع الكتاب: الجبر - رياضيات